Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Der Parameter

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich nach Fig. 47 wie folgt:

$$y = PR \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \alpha$$

Quadriert: $y^2 = b^2 \cdot \sin^2 \alpha$

Erweitert: $a^2 y^2 = a^2 b^2 \cdot \sin^2 \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I}$

$$x = PQ \cdot \sin(90^0 - \alpha) = a \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 x^2 = a^2 b^2 \cdot \cos^2 \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{II}$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$. Diese Gleichung stellt aber die Ellipse mit den Halbachsen a und b dar.

Übung: 1. Wie groß ist x für $y = 0$, und wie groß y für $x = 0$?

2. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ mit einer Geraden $y = Mx + n$ zu berechnen.

Anleitung: Man vergleiche die entsprechende Aufgabe beim Kreis (S. 19).

3. Bei einer Ellipse die Brennpunkte zu zeichnen, wenn die Achsen gegeben sind.

4. Man zeichne die Kurve der Gleichung $16 x^2 + 9 y^2 = 144$, schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß beliebige Punkte der Erklärung der gefundenen Kurve genügen.

5. Ein Punkt der Ellipse $25 x^2 + 16 y^2 = 400$ hat die Ordinate $y_1 = 2$. Wie groß ist seine Abszisse?

6. Zwei Punkte der Ellipse $25 x^2 + 16 y^2 = 400$ haben die Abszissen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Wie groß ist die zugehörige Sehne?

7. Von einer Ellipse ist $e = 4$ cm und $a = 5$ cm gegeben. Wie lautet ihre Gleichung?

8. Auf der Ellipse $25 x^2 + 16 y^2 = 400$ ist ein Punkt mit der Abszisse $x_1 = 2{,}5$ gegeben. Wie lang sind seine Brennlinien?

Der Parameter.

Wir berechnen die Ordinate y_1 im Brennpunkt, indem wir die Abszisse $x_1 = e$ in die Gleichung der Ellipse einsetzen:

$$e^2 b^2 + y_1{}^2 a^2 = a^2 b^2$$

Nach Fig. 45 ist aber $e^2 = a^2 - b^2$. Dies wird eingesetzt und ergibt: $a^2 b^2 - b^4 + y_1^2 a^2 = a^2 b^2$

Also ist: $y_1^2 = \frac{b^4}{a^2}$ und $y_1 = \pm \frac{b^2}{a}$

Bei der Parabel war die Ordinate im Brennpunkt $y_1 = p$.

Bei der Ellipse kann man nun die Ordinate $y_1 = \frac{b^2}{a} = p$ setzen. Dann ist die ganze Sehne des Brennpunktes, die senkrecht zur Achse steht, gleich $2p$. Auch hier nennen wir diese Sehne den Parameter (Fig. 48).

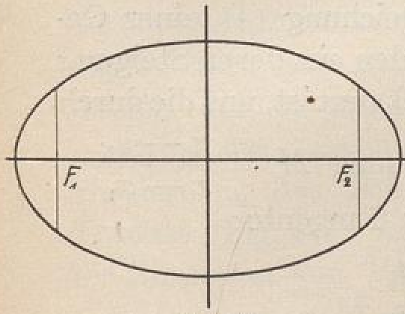

Fig. 48.

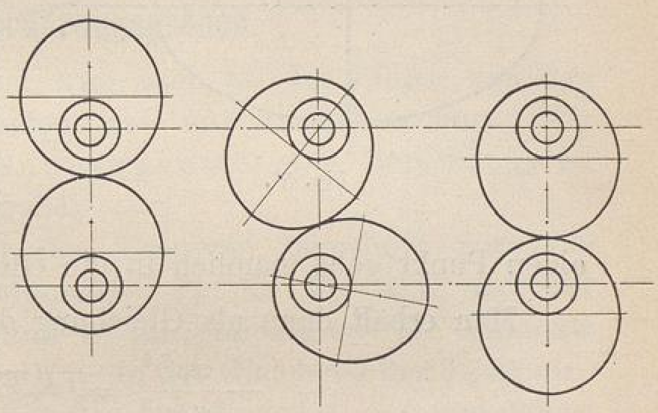
Fig. 49 (a—c).

Anwendung: Die Eigenschaft der Ellipse, daß die Summe der Fahrstrahlen konstant ist, findet unter anderem Anwendung bei elliptischen Zahnrädern, welche man an manchen Textilmaschinen findet. Der Zahnkranz hat die Form einer Ellipse, und beide Zahnräder sind einander kongruent. Die Bohrungen der Zahnräder liegen in den Brennpunkten der Ellipse. Wenn sich nach Fig. 49 das obere Rad mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit dreht, so dreht sich das untere Rad mit veränderlicher Geschwindigkeit. Fig 49 *a* zeigt die Stellung der kleinsten, Fig. 49 *b* diejenige einer mittleren und Fig. 49 *c* diejenige der größten Winkelgeschwindigkeit des unteren Rades.

Die Tangente an die Ellipse.

Wie bisher berechnen wir auch bei der Ellipse ihre Steigung durch Differenzieren der Gleichung der Ellipse: