Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Tangente

Nach Fig. 45 ist aber $e^2 = a^2 - b^2$. Dies wird eingesetzt und ergibt: $a^2 b^2 - b^4 + y_1^2 a^2 = a^2 b^2$

Also ist: $y_1^2 = \frac{b^4}{a^2}$ und $y_1 = \pm \frac{b^2}{a}$

Bei der Parabel war die Ordinate im Brennpunkt $y_1 = p$.

Bei der Ellipse kann man nun die Ordinate $y_1 = \frac{b^2}{a} = p$ setzen. Dann ist die ganze Sehne des Brennpunktes, die senkrecht zur Achse steht, gleich $2p$. Auch hier nennen wir diese Sehne den Parameter (Fig. 48).

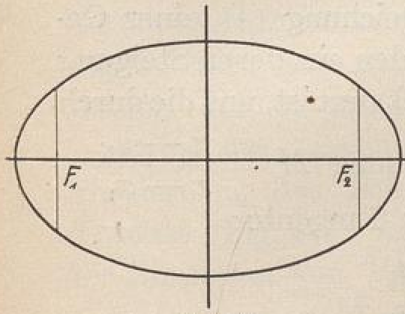

Fig. 48.

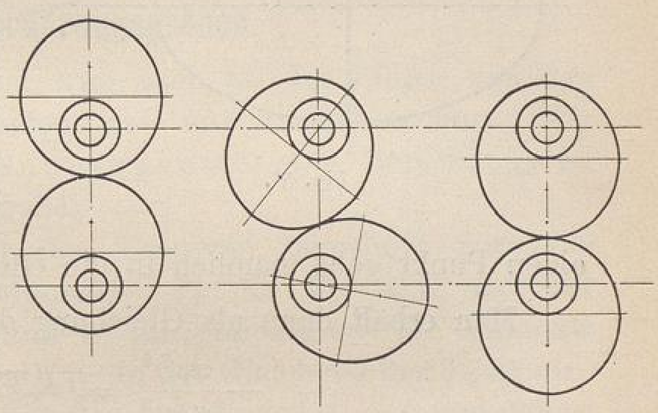
Fig. 49 (a—c).

Anwendung: Die Eigenschaft der Ellipse, daß die Summe der Fahrstrahlen konstant ist, findet unter anderem Anwendung bei elliptischen Zahnrädern, welche man an manchen Textilmaschinen findet. Der Zahnkranz hat die Form einer Ellipse, und beide Zahnräder sind einander kongruent. Die Bohrungen der Zahnräder liegen in den Brennpunkten der Ellipse. Wenn sich nach Fig. 49 das obere Rad mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit dreht, so dreht sich das untere Rad mit veränderlicher Geschwindigkeit. Fig 49 *a* zeigt die Stellung der kleinsten, Fig. 49 *b* diejenige einer mittleren und Fig. 49 *c* diejenige der größten Winkelgeschwindigkeit des unteren Rades.

Die Tangente an die Ellipse.

Wie bisher berechnen wir auch bei der Ellipse ihre Steigung durch Differenzieren der Gleichung der Ellipse:

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$2 x b^2 + 2 y a^2 \frac{d y}{d x} = 0$$

Die Steigung ist also: $\boldsymbol{\frac{d y}{d x} = -\frac{x b^2}{y a^2}}$ . . . . . . (22)

Folglich ist $-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$ die Steigung der Kurve im Punkte P_1 mit den Koordinaten $x_1 y_1$ (Fig. 50). Diese Steigung ist aber auch zugleich die Steigung der Tangente im Berührungspunkt P_1. Man setzt diese Steigung in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung bekannt ist, und die durch einen Punkt geht, nämlich in die Gleichung $M = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

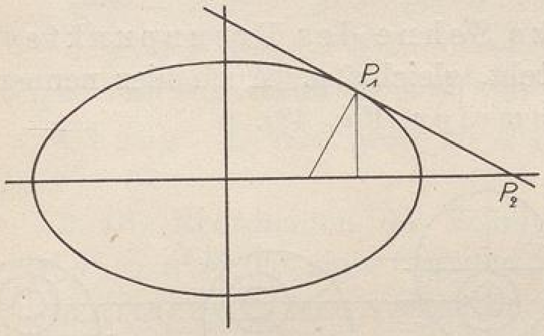

Fig. 50.

Man erhält dann als Gleichung der Tangente:

$$-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Diese Gleichung läßt sich wie beim Kreis vereinfachen:

$$y y_1 a^2 - y_1{}^2 a^2 = - x x_1 b^2 + x_1{}^2 b^2$$

$$y y_1 a^2 + x x_1 b^2 = x_1{}^2 b^2 + y_1{}^2 a^2$$

$$x x_1 b^2 + y y_1 a^2 = a^2 b^2$$

$$\boldsymbol{\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1} \quad . . . . . . (23)$$

B e m e r k u n g: Wie beim Kreis unterscheidet sich diese Gleichung der Tangente von der der Ellipse dadurch, daß aus x^2 und y^2 die Produkte $x x_1$ und $y y_1$ geworden sind.

A u f g a b e: 1. Man verfolge die Änderung des Differentialquotienten mit dem Verlauf der Kurve.

2. Man bringe die Gleichung (23) der Tangente auf die Normalform.