Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Berührungsgrößen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Normale.

Da die Steigung der Tangente $-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$ ist, so ist die der Normalen $+\frac{y_1 a^2}{x_1 b^2}$. Setzt man diese in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung gegeben ist und die durch den Berührungspunkt geht, so erhält man als Gleichung der Normalen:

$$\frac{y_1 a^2}{x_1 b^2} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Aufgabe: Diese Gleichung auf die Normalform zu bringen und n zu bestimmen.

Berührungsgrößen.

Wie bei der Parabel wird auch bei der Ellipse von den Berührungsgrößen mindestens eine analytisch berechnet. Wir wählen auch hier die Subtangente. Die Berechnung ist ähnlich der bei der Parabel.

Aus der Gleichung der Tangente berechnet man die Abszisse x_2 des Schnittpunktes P_2 der Tangente mit der X-Achse (Fig. 50). Alsdann ist die Subtangente die Differenz der Abszissen von P_2 und P_1. In der Gleichung der Tangente:

$x_2 x_1 b^2 + y_2 y_1 a^2 = a^2 b^2$ wird $y_2 = 0$ und daher:

$$x_2 = \frac{a^2 b^2}{x_1 b^2} = \frac{a^2}{x_1}$$

$$\text{Subtangente} = x_2 - x_1 = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

Ferner ergibt sich die Subnormale daraus, daß die Ordinate y_1 des Berührungspunktes P_1 die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und Subnormalen ist.

$$y_1^2 = \text{Subtangente} \times \text{Subnormale}$$

$$y_1^2 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1} \times \text{Subnormale}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1^2 x_1}{a^2 - x_1^2} = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x_1^2\right)\frac{x_1}{a^2 - x_1^2}$$

$$\text{Subnormale} = \frac{b^2 x_1}{a^2} = \frac{p}{a} x_1.$$

Die Längen von Tangente und Normale ergeben sich aus dem pythagoreischen Lehrsatz.

$$\text{Tangente} = \sqrt{\frac{(a^2 - x_1^2)^2}{x_1^2} + y_1^2}$$

$$\text{Normale} = \sqrt{\frac{b^4}{a^4} x_1^2 + y_1^2}$$

Bemerkung: Man prüfe, von welcher Dimension die Formeln sind.

Oben war die Entfernung des Punktes P_2 von dem Achsenschnittpunkt berechnet worden, nämlich $x_2 = \frac{a^2}{x_1}$. Dies Resultat ist von der kleinen Achse b unabhängig und nur von a und x_1 abhängig. Die Tangenten aller Ellipsen mit gleicher horizontaler Achse, deren Berührungspunkte senkrecht übereinander liegen, schneiden sich also in einem Punkte auf dieser Achse (Fig. 51).

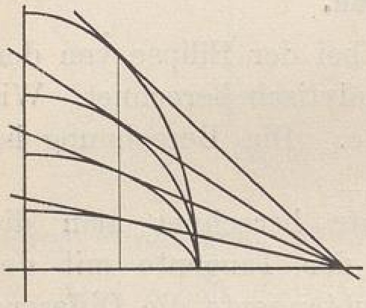

Fig. 51,

Übung: 1, Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 6$ und $b = 4$ cm.

2. Wie groß ist der Winkel dieser Tangente mit der X-Achse?

3. Für welchen Berührungspunkt der Ellipse geht die Tangente parallel zur X-Achse? Für welchen parallel zur Y-Achse?

4. Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf, die eine Steigung von 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0, 150^0 haben. Man bestimme die Koordinaten ihrer Berührungspunkte und die Größen ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 6$ und $b = 4$ cm.

5. An die Ellipse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$ in dem Berührungspunkte, dessen $y_1 = 3$ cm ist, eine Tangente zu legen. Normalform. Maßstäbliche Zeichnung in cm.

6. Man bestimme die Steigung der Ellipse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$ an den Punkten mit der Abszisse 0, 1, 2, 3, 4, 5 cm.

7. Wo hat die Ellipse die Steigung 1?

Die Scheitelgleichung der Ellipse.

Die Mittelpunktsgleichung war: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a^2\,b^2$

Verschiebt man die senkrechte Achse in den Scheitel links (Fig. 52), so bleibt für den Punkt P die Ordinate y unverändert; dagegen wird $x = \xi - a$. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet also:

$$\frac{(\xi - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\xi^2 - 2\,a\,\xi + a^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{2\,\xi}{a} - 1$$

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,\xi - \frac{b^2}{a^2}\,\xi^2 \quad . \; . \; . \quad (24)$$

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$ und für ξ das gebräuchlichere x, so erhält man:

$$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2$$

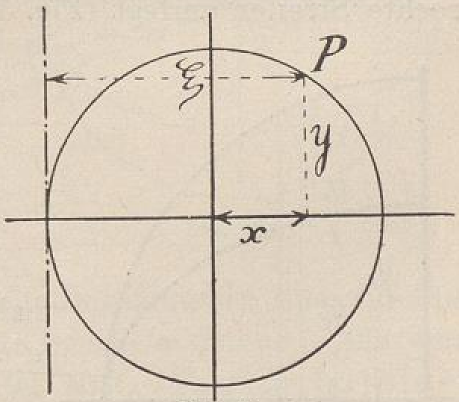

Fig. 52.

Bemerkung: Diese Formel unterscheidet sich durch das Glied mit x^2 von derjenigen der Parabel.

Aufgabe: 1. Man verschiebe die Y-Achse in den Brennpunkt und stelle die Gleichung auf.

2. Man verschiebe die X-Achse in den oberen Scheitel und stelle die Gleichung auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung $y^2 + 2\,x^2 - 40\,x = 0$. Man schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß sie der Erklärung genügt.