Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Übungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Die Längen von Tangente und Normale ergeben sich aus dem pythagoreischen Lehrsatz.

$$\text{Tangente} = \sqrt{\frac{(a^2 - x_1^2)^2}{x_1^2} + y_1^2}$$

$$\text{Normale} = \sqrt{\frac{b^4}{a^4} x_1^2 + y_1^2}$$

Bemerkung: Man prüfe, von welcher Dimension die Formeln sind.

Oben war die Entfernung des Punktes P_2 von dem Achsenschnittpunkt berechnet worden, nämlich $x_2 = \frac{a^2}{x_1}$. Dies Resultat ist von der kleinen Achse b unabhängig und nur von a und x_1 abhängig. Die Tangenten aller Ellipsen mit gleicher horizontaler Achse, deren Berührungspunkte senkrecht übereinander liegen, schneiden sich also in einem Punkte auf dieser Achse (Fig. 51).

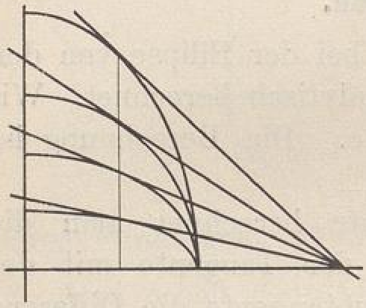

Fig. 51,

Übung: 1, Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 6$ und $b = 4$ cm.

2. Wie groß ist der Winkel dieser Tangente mit der X-Achse?

3. Für welchen Berührungspunkt der Ellipse geht die Tangente parallel zur X-Achse? Für welchen parallel zur Y-Achse?

4. Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf, die eine Steigung von 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0, 150^0 haben. Man bestimme die Koordinaten ihrer Berührungspunkte und die Größen ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 6$ und $b = 4$ cm.

5. An die Ellipse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$ in dem Berührungspunkte, dessen $y_1 = 3$ cm ist, eine Tangente zu legen. Normalform. Maßstäbliche Zeichnung in cm.

6. Man bestimme die Steigung der Ellipse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$ an den Punkten mit der Abszisse 0, 1, 2, 3, 4, 5 cm.

7. Wo hat die Ellipse die Steigung 1?

Die Scheitelgleichung der Ellipse.

Die Mittelpunktsgleichung war: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a^2 b^2$

Verschiebt man die senkrechte Achse in den Scheitel links (Fig. 52), so bleibt für den Punkt P die Ordinate y unverändert; dagegen wird $x = \xi - a$. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet also:

$$\frac{(\xi - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\xi^2 - 2\,a\,\xi + a^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{2\,\xi}{a} - 1$$

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,\xi - \frac{b^2}{a^2}\,\xi^2 \quad . \; . \; . \quad (24)$$

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$ und für ξ das gebräuchlichere x, so erhält man:

$$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2$$

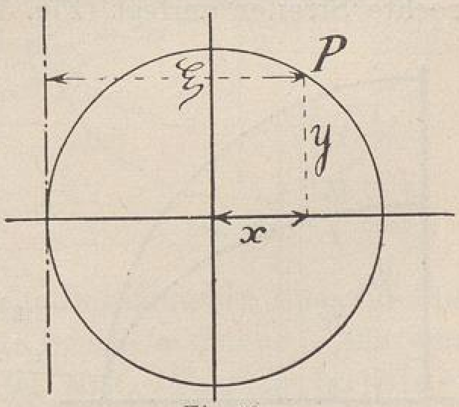

Fig. 52.

Bemerkung: Diese Formel unterscheidet sich durch das Glied mit x^2 von derjenigen der Parabel.

Aufgabe: 1. Man verschiebe die Y-Achse in den Brennpunkt und stelle die Gleichung auf.

2. Man verschiebe die X-Achse in den oberen Scheitel und stelle die Gleichung auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung $y^2 + 2\,x^2 - 40\,x = 0$. Man schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß sie der Erklärung genügt.