



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Scheitelgleichung der Ellipse

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78413)

6. Man bestimme die Steigung der Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ an den Punkten mit der Abszisse 0, 1, 2, 3, 4, 5 cm.
 7. Wo hat die Ellipse die Steigung 1?

Die Scheitelgleichung der Ellipse.

Die Mittelpunktsleichung war: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Verschiebt man die senkrechte Achse in den Scheitel links (Fig. 52), so bleibt für den Punkt P die Ordinate y unverändert; dagegen wird $x = \xi - a$. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet also:

$$\begin{aligned} \frac{(\xi - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{\xi^2 - 2a\xi + a^2}{a^2} \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{2\xi}{a} - 1 \\ y^2 &= 2 \frac{b^2}{a} \xi - \frac{b^2}{a^2} \xi^2 \quad \dots \quad (24) \end{aligned}$$

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$ und für ξ das gebräuchlichere x , so erhält man:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

Bemerkung: Diese Formel unterscheidet sich durch das Glied mit x^2 von derjenigen der Parabel.

Aufgabe: 1. Man verschiebe die Y -Achse in den Brennpunkt und stelle die Gleichung auf.

2. Man verschiebe die X -Achse in den oberen Scheitel und stelle die Gleichung auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung $y^2 + 2x^2 - 40x = 0$. Man schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß sie der Erklärung genügt.

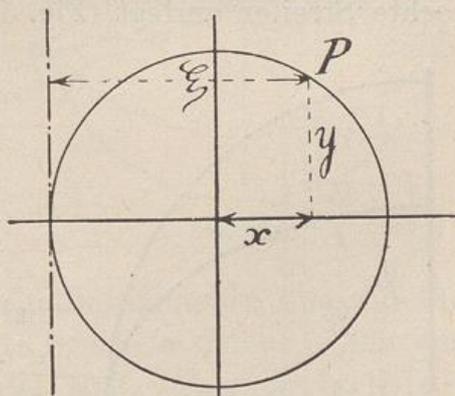


Fig. 52.

4. In welchem Punkte hat die Kurve $y^2 = 4x - 2x^2$ ihr Maximum?

Der Inhalt der Ellipse.

Wenn die Gleichung der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ ist, so ist die Ordinate der Ellipse:

$$y_e = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Schlägt man nun um den Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis mit der halben großen Achse, so ist die Ordinate des Kreises:

$$y_k = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Diese beiden Werte für die Ordinaten vergleichen wir miteinander und finden, daß y_e jedesmal $\frac{b}{a}$ mal so groß ist wie das betreffende y_k , d. h. dasjenige y_k , das zu demselben x gehört. Multipliziert man also die Ordinaten des Kreises mit $\frac{b}{a}$, so erhält man die Ellipse. —

Denkt man sich jetzt die Ellipse in unendlich schmale senkrechte Streifen zerlegt (Fig. 53), so ist der Inhalt eines jeden

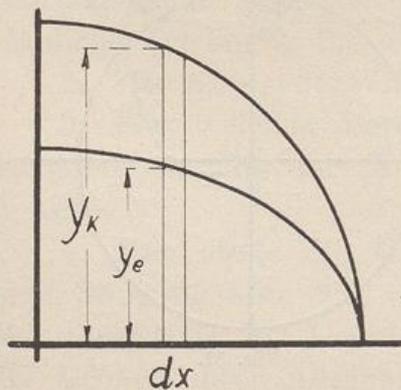


Fig. 53.

$$y_e \cdot dx = \frac{b}{a} y_k \cdot dx$$

Der ganze Inhalt der Ellipse:

$$\int \frac{b}{a} y_k \cdot dx = \frac{b}{a} \int y_k \cdot dx$$

Dies Integral ist aber der Inhalt des gezeichneten Kreises, also $a^2 \pi$.

Demnach ist der Inhalt der Ellipse:

$$\frac{b}{a} a^2 \pi = a b \pi \quad \dots \quad (25)$$

Besprechung: Die Formel ist von der zweiten Dimension. In ihr kann man a und b vertauschen, d. h. dreht