Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Übungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

6. Man bestimme die Steigung der Ellipse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$ an den Punkten mit der Abszisse 0, 1, 2, 3, 4, 5 cm.

7. Wo hat die Ellipse die Steigung 1?

Die Scheitelgleichung der Ellipse.

Die Mittelpunktsgleichung war: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a^2\,b^2$

Verschiebt man die senkrechte Achse in den Scheitel links (Fig. 52), so bleibt für den Punkt P die Ordinate y unverändert; dagegen wird $x = \xi - a$. Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet also:

$$\frac{(\xi - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\xi^2 - 2\,a\,\xi + a^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{2\,\xi}{a} - 1$$

$$\boldsymbol{y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,\xi - \frac{b^2}{a^2}\,\xi^2} \quad . \;.\; . \quad (24)$$

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$ und für ξ das gebräuchlichere x, so erhält man:

$$\boldsymbol{y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2}$$

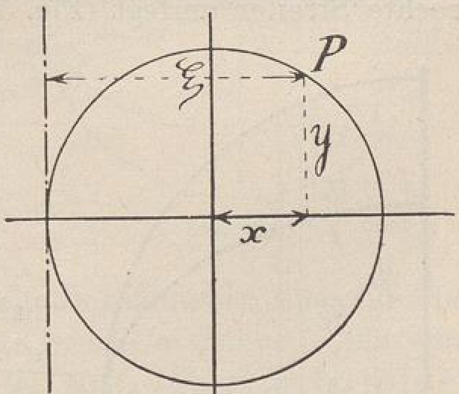

Fig. 52.

Bemerkung: Diese Formel unterscheidet sich durch das Glied mit x^2 von derjenigen der Parabel.

Aufgabe: 1. Man verschiebe die Y-Achse in den Brennpunkt und stelle die Gleichung auf.

2. Man verschiebe die X-Achse in den oberen Scheitel und stelle die Gleichung auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung $y^2 + 2\,x^2 - 40\,x = 0$. Man schließe auf die Art der Kurve und überzeuge sich durch Nachmessen, daß sie der Erklärung genügt.

4. In welchem Punkte hat die Kurve $y^2 = 4x - 2x^2$ ihr Maximum?

Der Inhalt der Ellipse.

Wenn die Gleichung der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ ist, so ist die Ordinate der Ellipse:

$$y_e = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Schlägt man nun um den Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis mit der halben großen Achse, so ist die Ordinate des Kreises:

$$y_k = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Diese beiden Werte für die Ordinaten vergleichen wir miteinander und finden, daß y_e jedesmal $\frac{b}{a}$ mal so groß ist wie das betreffende y_k, d. h. dasjenige y_k, das zu demselben x gehört. Multipliziert man also die Ordinaten des Kreises mit $\frac{b}{a}$, so erhält man die Ellipse. —

Denkt man sich jetzt die Ellipse in unendlich schmale senkrechte Streifen zerlegt (Fig. 53), so ist der Inhalt eines jeden

$$y_e \cdot dx = \frac{b}{a} y_k \cdot dx$$

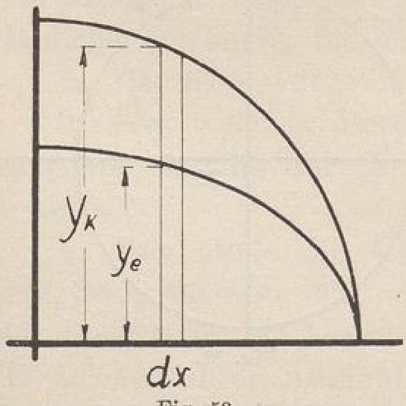

Fig. 53.

Der ganze Inhalt der Ellipse:

$$\int \frac{b}{a} y_k \cdot dx = \frac{b}{a} \int y_k \cdot dx$$

Dies Integral ist aber der Inhalt des gezeichneten Kreises, also $a^2 \pi$.

Demnach ist der Inhalt der Ellipse:

$$\boldsymbol{\frac{b}{a} a^2 \pi = a\, b\, \pi} \quad . \quad . \quad (25)$$

Besprechung: Die Formel ist von der zweiten Dimension. In ihr kann man a und b vertauschen, d. h. dreht