Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Der Inhalt der Ellipse

4. In welchem Punkte hat die Kurve $y^2 = 4x - 2x^2$ ihr Maximum?

Der Inhalt der Ellipse.

Wenn die Gleichung der Ellipse $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ ist, so ist die Ordinate der Ellipse:

$$y_e = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Schlägt man nun um den Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis mit der halben großen Achse, so ist die Ordinate des Kreises:

$$y_k = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Diese beiden Werte für die Ordinaten vergleichen wir miteinander und finden, daß y_e jedesmal $\frac{b}{a}$ mal so groß ist wie das betreffende y_k, d. h. dasjenige y_k, das zu demselben x gehört. Multipliziert man also die Ordinaten des Kreises mit $\frac{b}{a}$, so erhält man die Ellipse. —

Denkt man sich jetzt die Ellipse in unendlich schmale senkrechte Streifen zerlegt (Fig. 53), so ist der Inhalt eines jeden

$$y_e \cdot dx = \frac{b}{a} y_k \cdot dx$$

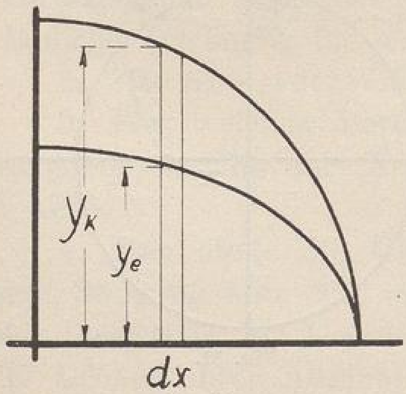

Fig. 53.

Der ganze Inhalt der Ellipse:

$$\int \frac{b}{a} y_k \cdot dx = \frac{b}{a}\int y_k \cdot dx$$

Dies Integral ist aber der Inhalt des gezeichneten Kreises, also $a^2 \pi$.

Demnach ist der Inhalt der Ellipse:

$$\boldsymbol{\frac{b}{a} a^2 \pi = a\, b\, \pi} \quad . \quad . \quad (25)$$

B e s p r e c h u n g: Die Formel ist von der zweiten Dimension. In ihr kann man a und b vertauschen, d. h. dreht man das Achsenkreuz um 90°, so erhält man dieselbe Formel. Wird $a = b$, so wird die Ellipse zum Kreis. Ein Vergleich mit dem umschließenden Rechteck ($4\,a\,b$) bestätigt, daß die Ellipse ($a\,b\,\pi$) kleiner ist als dies Rechteck.

Die Ellipse als Bild des Kreises.

Blickt man senkrecht auf die Fläche eines Kreises, so erscheint dieser als Kreis. Dreht man ihn jetzt um einen Durchmesser, so erscheint der senkrecht hierzu stehende Durchmesser verkürzt. Nehmen wir den Durchmesser, um den sich der Kreis dreht, als X-Achse, so sind alle y, also alle Ordinaten verkürzt.

Wenn der Durchmesser des Kreises $2\,a$ ist und der verkürzte $2\,b$ lang erscheint, so beträgt die Verkürzung auch für alle parallelen Strecken, also für alle Ordinaten $b : a$ (Fig. 54 a).

Betrachtet man zwei andere senkrecht zueinander stehende Durchmesser, z. B. AB und CD des Kreises, so werden die Ordinaten ihrer Endpunkte AF und CP im Verhältnis $b : a$ verkürzt, und man erhält die Durchmesser LM und NO der Ellipse. Man nennt sie konjugierte Durchmesser.

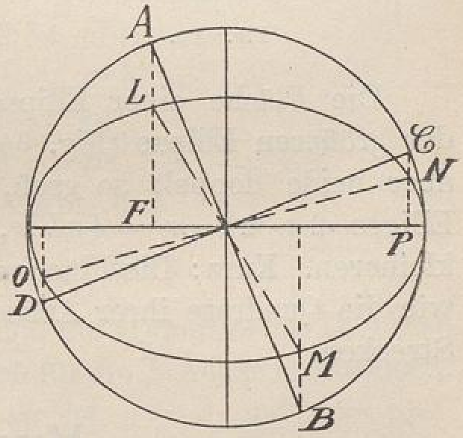

Fig. 54 a.

In einem Kreise halbiert ein Durchmesser alle auf ihm senkrecht stehenden Sehnen, d. h. solche Sehnen, die dem konjugierten Durchmesser parallel sind. Folglich halbiert auch in der Ellipse ein Durchmesser alle Sehnen, die dem konjugierten parallel sind; denn parallele Linien erscheinen in demselben Maße verkürzt.

Zwischen zwei konjugierten Durchmessern muß stets eine Achse liegen.