Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Hyperbel.

Ähnlichkeit der Ellipsen.

Alle Kreise sind einander ähnlich. Sieht man nun verschiedene Kreise unter demselben Winkel an, so werden bei ihnen entsprechende Strecken in demselben Maße verkürzt. Sie bleiben also proportional, und die entstandenen Ellipsen sind einander ähnlich. Ellipsen sind dann ähnlich, wenn bei ihnen das Verhältnis $b : a$ dasselbe ist.

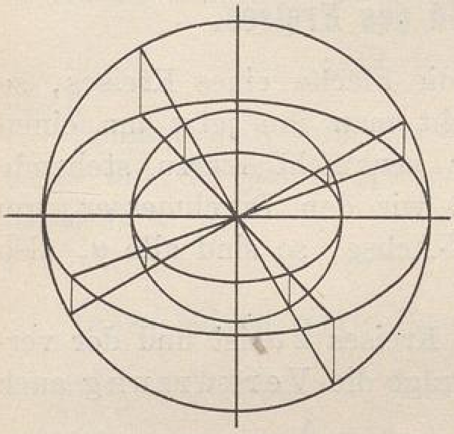

Fig. 54 b.

Ähnliche Ellipsen lassen sich konzentrisch aufeinander legen (Fig. 54 b), sodaß die Achsen und konjugierten Durchmesser sich decken. Sie gehen durch entsprechende Punkte beider Ellipsen. Der Mittelpunkt ist hier „Ähnlichkeitspunkt".

Die Fläche einer Ellipse ist $a\,b\,\pi$. Haben die Achsen der größeren Ellipse (Fig. 54) dasselbe Verhältnis $a : b$, sind aber beide doppelt so groß, so ist die Fläche der größeren Ellipse $2a \cdot 2b \cdot \pi = 4ab\pi$, also 4 mal so groß als die der kleineren. Kurz: Die Flächen ähnlicher Ellipsen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Achsen oder sonstiger entsprechender Strecken.

Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel.

Erklärung: Eine Hyperbel ist der geometrische Ort derjenigen Punkte (P), für welche die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten (F_1 und F_2) gleich bleibt. In Figur 55 ist $PF_1 - PF_2 =$ Konstante $= 2$ a. Die Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte, ihr Abstand vom Zentrum O heißt Exzentrizität (e). Die Verbindungslinien PF_1 und PF_2 eines beliebigen Punktes P der Hyperbel mit den Brennpunkten heißen Brennstrahlen, Brennlinien oder Fahrstrahlen (PF_1 und PF_2).

Wie bei der Ellipse, legt man die X-Achse durch die Brennpunkte und die Y-Achse als Mittelsenkrechte dazwischen. Die Entfernung der Brennpunkte $F_1 F_2$ sei auch hier gleich $2e$ und die Differenz der Brennstrahlen gleich $2a$. Dann ist:

$$\sqrt{y^2 + (x + e)^2} - \sqrt{y^2 + (x - e)^2} = 2a.$$

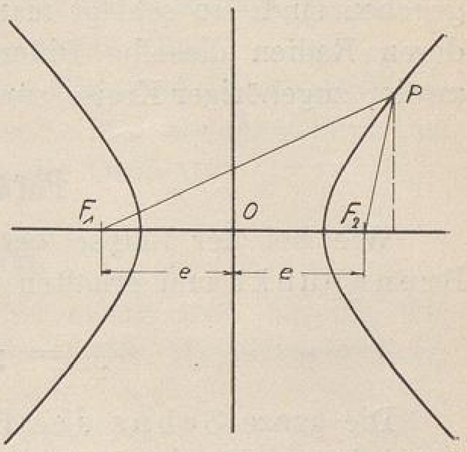

Fig. 55.

Durch zweimaliges Quadrieren schafft man die Wurzeln weg und erhält schließlich:

$$x^2 (e^2 - a^2) - a^2 (e^2 - a^2) = a^2 y^2.$$

Wir setzen $$e^2 - a^2 = b^2\ ^{1)}$$

$$x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Bemerkung: Die Formel ergibt, daß

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

ist; wie bei der Ellipse ist also auch die Hyperbel zur X-Achse symmetrisch, und dies läßt sich auch für die Y-Achse nachweisen.

Liegt P auf der X-Achse, so ist $y = o$ und $x = \pm a$, also $2a$ gleich der Achse und jede Achsenhälfte gleich a. Diese Achse heißt Hauptachse.

Für $x < a$ wird y imaginär; senkrecht über der Strecke $2a$ liegen also keine Punkte der Hyperbel. Die Länge der Nebenachse ist imaginär. Dagegen gibt es für alle Werte von y zwei Werte von x.

Die Fig. 55 zeigt, daß die Hauptachse immer kleiner sein muß als die Exzentrizität.

---

1) Die geometrische Bedeutung von b kann erst später erörtert werden (S. 64).

Konstruktion: Aus der Erklärung der Hyperbel ergibt sich auch ihre Konstruktion. Wenn die beiden Brennpunkte gegeben sind, so schlägt man um diese Brennpunkte Kreise, deren Radien dieselbe Differenz haben. Die Schnittpunkte zweier zugehöriger Kreise sind jedesmal Punkte der Hyperbel.

Parameter.

Wie bei der Ellipse berechnen wir die Ordinate im Brennpunkt und erhalten auch hier:

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Die ganze Sehne des Brennpunktes, die senkrecht zur Achse steht, ist $2\,p$, und wir nennen diese Strecke den Parameter (Fig. 56).

Die Scheitelgleichung der Hyperbel.

Ähnlich wie bei der Ellipse findet man (Fig. 56):

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

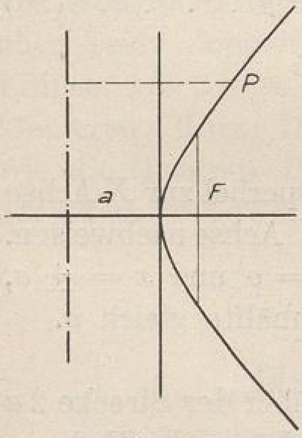

Fig. 56.

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$, so erhält man:

$$y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Übung: 1. Man berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $y = Mx + n$ mit der Hyperbel $x^2\,b^2 - y^2\,a^2 = a^2 \cdot b^2$.

2. Die Hyperbel $x^2\,b^2 - y^2\,a^2 = a^2\,b^2$ ist gegeben. Man verschiebe die Y-Achse in den Brennpunkt und stelle jetzt die Gleichung der Hyperbel auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung

$$9\,x^2 - 16\,y^2 - 144 = 0.$$

Man schließe auf die Art der Kurve, bestimme a, b und e, suche die Brennpunkte und prüfe dann durch Nachmessen ob sie der Erklärung genügt.

4. Man bestimme die Ordinate des Punktes obiger Hyperbel, dessen Abszisse gleich 5 Längeneinheiten ist.

5. Für welchen Punkt obiger Hyperbel ist die Ordinate doppelt so groß wie die Abszisse? Für welchen Punkt ist die Abszisse doppelt so groß wie die Ordinate?

Tangente.

Als Steigung der Hyperbel erhält man ähnlich wie bei der Ellipse durch Differenzieren der Hyperbelgleichung den Wert:
$$\frac{dy}{dx} = + \frac{x b^2}{y a^2}.$$

Die Gleichung der Tangente wird wie bei der Ellipse hieraus abgeleitet und heißt:
$$x x_1 a^2 - y y_1 b^2 = a^2 b^2$$
oder:
$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Auf entsprechende Weise gewinnt man auch die Gleichung der Normalen.

Aufgabe: Man vergleiche den Verlauf des Differentialquotienten mit dem Verlauf der Kurve.

Berührungsgrößen.

Auch diese erhält man ebenso wie bei der Ellipse. Man leitet zunächst analytisch die Größe der Subtangente ab und kann dann die anderen drei Größen entweder planimetrisch oder ebenfalls analytisch bestimmen

Übung: 1. Für welchen Berührungspunkt der Hyperbel geht die Tangente parallel zur X-Achse? Für welchen parallel zur Y-Achse?

2. An die Hyperbel $16 x^2 - 25 y^2 = 400$ soll in dem Berührungspunkte mit der Ordinate 3 cm eine Tangente gelegt werden. Normalform. Maßstäbliche Zeichnung.

3. Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 3$ und $b = 2$ cm.

4. Man bestimme die Steigung der Hyperbel

$$16\,x^2 - 25\,y^2 = 400$$

an den Punkten mit der Abszisse 6, 7, 8, 9 cm usw.

5. Wo hat diese Hyperbel die Steigung 1?

Asymptote.

Wir suchen den Schnittpunkt der Hyperbel mit einer Geraden, die durch den Achsenschnittpunkt geht. Für diese Gerade ist $n = 0$ (Fig. 57).

Gegeben ist die Hyperbel:

$$x^2\,b^2 - y^2\,a^2 = a^2\,b^2$$

und die Gerade:

$$y = M\,x$$

Für ihren Schnittpunkt $(x_1\,y_1)$ gilt also:

$$x_1{}^2\,b^2 - a^2\,M^2\,x_1{}^2 = a^2\,b^2$$

$$x_1{}^2\,(b^2 - a^2\,M^2) = a^2\,b^2$$

$$x_1{}^2 = \frac{a^2\,b^2}{b^2 - a^2\,M^2}$$

$$x_1 = \pm\,\frac{a\,b}{\sqrt{b^2 - a^2\,M^2}}.$$

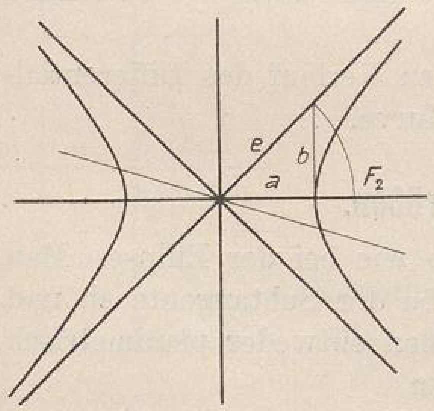

Fig. 57.

Hierbei können drei Fälle eintreten, je nachdem $a^2\,M^2$ größer, gleich oder kleiner als b^2 ist.

Ist $a^2\,M^2 < b^2$, so erhält man zwei reelle gleich große, aber entgegengesetzte x. (Die dünn gezeichnete Sekante in Fig. 57). Aus der Gleichung der Geraden $y = M\,x$ folgt dann, daß auch die y gleich groß und entgegengesetzt sind. Demnach wird die Gerade im Achsenschnittpunkt halbiert, sie heißt **Durchmesser**.

Ist $a^2 M^2 > b^2$, so wird x imaginär, d. h. die Gerade trifft die Hyperbel überhaupt nicht.

Ist aber $a^2 M^2 = b^2$, so wird $x_1 = \infty$. Alsdann heißt die Gerade Asymptote. Jetzt ist $M = \pm \frac{b}{a}$ die Steigung der beiden Asymptoten (Fig. 57) und b ist das auf der X-Achse im Scheitel der Hyperbel errichtete Lot gemessen bis zur Asymptote. Dann ist die Gleichung der Asymptoten

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Die Scheiteltangente berührt die Hyperbel im Scheitel, die Asymptoten treffen die Hyperbel im Unendlichen. Die Berührungspunkte der übrigen Tangenten liegen dazwischen. Alle Tangenten werden daher die Hauptachse zwischen dem Scheitel und dem Achsenmittelpunkt schneiden. Der Steigungswinkel einer Tangente liegt zwischen den Steigungswinkeln der beiden Asymptoten.

Aufgabe: Man stelle die Gleichung der Tangenten an eine Hyperbel mit $a = 2$ und $b = 3$ cm auf, die eine Steigung von 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0, 150^0 haben. Welche von diesen Tangenten sind möglich? Man bestimme die Berührungspunkte und die Größen ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung.

Die Näherung der Kurve an die Asymptote.

Für einen beliebigen Punkt (mit der Abszisse x_1) berechne man die Ordinate bis zur Asymptote (y_1) und bis zur Hyperbel (y_1'). Erstere ist

$$y_1 = \frac{b}{a} x_1$$

und letztere

$$y_1' = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a_1^2}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Größen ergibt sofort, daß ihr Unterschied desto kleiner sein wird, je kleiner a im Vergleich zu x ist, d. h. je größer x ist. Wird $x = \infty$, so verschwindet der Unterschied. Die Kurve nähert sich also der Asymptote beständig und erreicht sie im Unendlichen.

Ähnlichkeit bei Hyperbeln.

Wie die Ellipsen, so sind auch die Hyperbeln ähnlich, wenn bei ihnen das Verhältnis $a : b$ dasselbe ist, wenn sie also dieselben Asymptoten haben. Man zeichne mehrere Hyperbeln mit gemeinsamen Achsen und Asymptoten. Der Achsenschnittpunkt wird Ähnlichkeitspunkt.

Gleichseitige Hyperbel.

Wird in der Gleichung der Hyperbel $x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$ die Länge $a = b$, so erhält man

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

als Gleichung der gleichseitigen Hyperbel. Die Steigung der Asymptote ist $a : a = 1$; also steigt sie unter 45^0 und steht auf der anderen Asymptote senkrecht. Die Hyperbel in Fig. 57 ist als gleichseitige gezeichnet.

Aufgabe: 1. Wie groß ist e bei der gleichseitigen Hyperbel?

2. Wie groß ist bei ihr die Ordinate im Brennpunkt?

Die Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel.

Denkt man sich das Achsenkreuz um 45^0 nach rechts gedreht, so werden die Asymptoten zu Achsen und der Drehungswinkel ist -45^0 (Fig. 59).

Wenn x und y die alten und ξ und η die neuen Koordinaten sind, so ist nach Gleichung (12):

$$y = \eta \cos\alpha + \xi \sin\alpha$$
$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha$$

und bei einer Drehung um -45^0 nach Gleichung (13):

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}}.$$

Setzt man diese Koordinaten in die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ ein, so erhält man:

$$\frac{1}{2}(\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2) - \frac{1}{2}(\xi^2 - 2\,\xi\,\eta + \eta^2) = a^2$$

$$2\,\xi\,\eta = a^2$$

$$\xi\,\eta = \frac{a^2}{2}$$

$$\xi\,\eta \textbf{ oder } x\,y = \frac{a^2}{2} = \textbf{Konstante} = \mathbf{C} \quad .\ .(32$$

Für jeden Punkt der Hyperbel ist also das Rechteck aus Ordinate und Abszisse gleich groß (Fig. 59).

Aufgabe: Man bestimme die kürzeste Entfernung der gleichseitigen Hyperbel vom Achsenschnittpunkt.

Diese ist die frühere Halbachse a. Nach Gleichung (32) muß das in Fig. 59 gestrichelte Quadrat gleich $\frac{a^2}{2}$ = Konstante C sein. Also ist die Diagonale $a = \sqrt{2\,C}$ und die Seite des Quadrates gleich $\sqrt{C}$. Man bestimme diese Größen für die in Fig. 59 gezeichnete Hyperbel $v\,p = 8$.

Konstruktion.

Aus Gleichung (32) ergibt sich eine Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus den Asymptoten $O\,X$ und $O\,Y$ und einem Punkt P (Fig. 58).

Man zieht durch P die Geraden $P\,Q$ parallel zu $O\,Y$ und $P\,U$ parallel zu $O\,X$, verlängert $P\,U$ und trägt beliebige Teile auf der Verlängerung ab. Man verbindet diese Teilpunkte mit O und zieht durch die Schnittpunkte dieser Verbindungen mit $P\,Q$ Parallelen zur Achse $O\,X$. Durch die Teilpunkte zieht man dann Parallelen zur anderen Achse $O\,Y$. Die Schnitt-

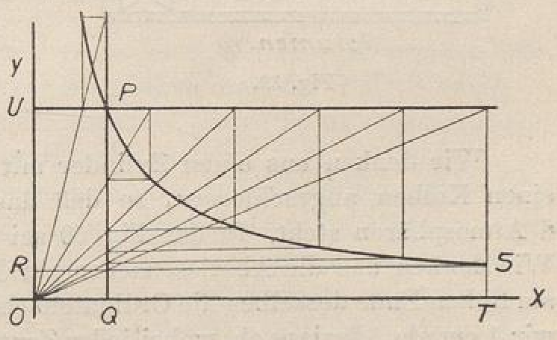

Fig. 58.

punkte der horizontalen mit den entsprechenden vertikalen Parallelen sind Punkte der Hyperbel.

Beweis: Nach einem Satz der Planimetrie sind die Rechtecke $UPQO$ und $ORST$ inhaltsgleich.

Aufgabe: 1. Man stelle die Gleichung der Tangente der gleichseitigen Hyperbel im alten Axenkreuz wie in dem der Asymptoten auf.

2. Man verschiebe das Achsenkreuz parallel, bis der Achsenschnittpunkt auf den Scheitelpunkt fällt und, bestimme die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel:

Anwendungen: 1. Darstellung des Mariotteschen Gesetzes. Hat man ein Volumen Gas in einem Zylinder unter einem bestimmten Druck, und preßt es dann bei gleichbleibender Temperatur mit dem doppelten Druck zusammen, so wird es auf die Hälfte des Raumes zusammengedrückt. Allgemein ausgedrückt kann man sagen, daß sich die Volumen umgekehrt wie die Drucke verhalten. Dies Mariotte- oder Boylesche Gesetz gilt für vollkommene Gase wie Luft, und zwar solange die Temperatur dieselbe bleibt.

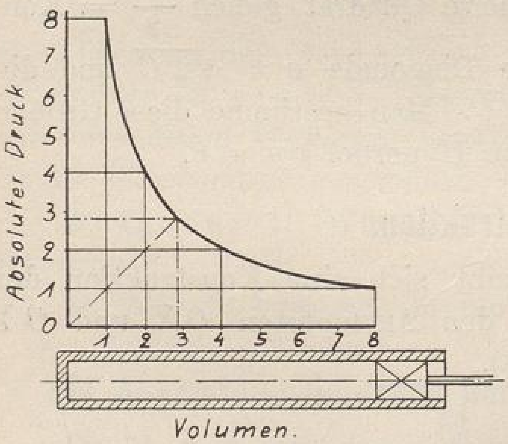

Fig. 59.

Ist nun v_0 das Anfangsvolumen und p_0 der anfängliche Druck, v_1 ein späteres Volumen und p_1 der dazugehörige Druck so verhält sich

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1}{p_0}.$$

Oder es ist

$$v_0 p_0 = v_1 p_1 = \text{Konstante}.$$

Wir denken uns einen Zylinder mit 1 cbm Gas gefüllt und durch einen Kolben abgeschlossen, so daß das Gas unter einem Druck von 8 Atmosphären steht. In der Fig. 59 sei unten der Zylinder angedeutet. Wir denken uns die Abszissenachse parallel zum Zylinder und errichten am linken Ende desselben die Ordinatenachse. Als Anfangszustand tragen wir 1 cm als Abszisse ab, wobei jeder Zentimeter 1 cbm vorstellt. Dann tragen wir 8 cm als Ordinate auf, was einem absoluten Druck von 8 Atmosphären entspricht.

Wir berechnen uns nun wie auf Seite 7 eine Tabelle, indem wir annehmen, das Gas von 1 cbm würde auf 8 cbm ausgedehnt, und indem wir nach der Formel $v \cdot p = v_1 p_1 = 8$ den zugehörigen Druck ausrechnen.

Man trage nun die verschiedenen Volumen ($v = 1, 2, 4, 8$) auf der horizontalen und die entsprechenden Drucke ($p = 8, 4, 2, 1$) senkrecht nach oben auf. Man legt durch die erhaltenen Punkte eine Kurve, die man Isotherme nennt, weil das genannte Gesetz nur bei gleichbleibender Temperatur gilt. Die Rechtecke aus den Koordinaten eines Punktes sind gleich groß, wie Fig. 59 zeigt. Also ist die Isotherme eine gleichseitige Hyperbel. Im vorliegenden Fall erhält man stets das Produkt 8.

2. Beispiel aus der Elektrotechnik: Die in einen Hauptschlußmotor (z. B. einer Straßenbahn oder eines Krans) eingeführte elektromotorische Kraft, also die Klemmenspannung E_k, wird um den Spannungsverlust in dem Motor vermindert. Dieser beträgt $J \cdot R$, d. h. Stromstärke mal inneren Widerstand des Motors. Der Rest $E = E_k - J \cdot R$ ist der elektromotorischen Gegenkraft des Motors gleich, hält ihr das Gleichgewicht und die ihr entsprechende Energie wird in die mechanische Arbeit des Motors umgesetzt.

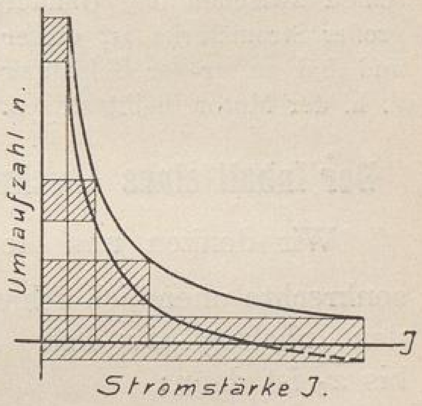

Fig. 60.

Diese Gegenkraft des Motors entsteht durch die Drehung, wobei der Motor als Dynamomaschine wirkt. Diese Gegenkraft ist demnach der Zahl der Umdrehungen (n) und der Kraftlinien (N) proportional. $E = C N n$, wenn C eine Konstante ist.

$$\text{Also ist } C N n = E_k - J \cdot R.$$

Hierin ist die eingeführte elektromotorische Kraft E_k konstant und $J \cdot R$ sehr klein.

a) Vernachlässigt man letzteres, so muß $N n$ eine Konstante sein.

Nun ist bei nicht zu starker Magnetisierung der Pole $N = C_1 \cdot J$, d. h. die Kraftlinienzahl ist der Stromstärke proportional. Also ist nicht nur $N n$, sondern auch $J \cdot n$ eine Konstante.

Trägt man nun J auf einer horizontalen Achse und die zugehörigen n vertikal darüber auf, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel, wie in voriger Figur (Fig. 59). Jedes J bildet mit seinem zugehörigen n ein Rechteck, und alle diese Rechtecke $J \cdot n$ sind gleich groß.

Bei kleiner Stromstärke, d. h. unbelastet, läuft der Motor sehr rasch; bei großer Stromstärke läuft er langsam.

b) Vernachlässigt man den kleinen Betrag von $J \cdot R$ aber nicht, so ist:

$$C N n = E_k - J \cdot R \text{ oder}$$
$$C_2 J n = E_k - J R.$$

Von jedem früheren Rechteck von konstanter Größe ist also ein kleiner Betrag $J \cdot R$ abzuziehen, der proportional der Stromstärke J ist. Gehen z. B. bei 10 Ampere von der eingeführten Spannung 5 Volt verloren, so ist der Verlust bei 2 Ampere nur 1 Volt.

Von jedem früheren Rechteck ist also ein kleines Rechteck $J \cdot R$ abzuziehen, welches eine ebenso große Grundlinie J wie die früheren Rechtecke $J \cdot n$ und eine konstante Höhe proportional R hat. Diese Rechtecke, die abgezogen werden müssen, sind in der Fig. 60 schraffiert.

Die rechten unteren Ecken dieser schmalen Rechtecke geben uns die wirklichen Tourenzahlen an. Sie liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, die um diesen Betrag, der proportional R ist, nach unten verschoben ist.

Beide Kurven nähern sich bei kleiner Stromstärke, d. h. der Unterschied zwischen den Umlaufszahlen ist verhältnismäßig gering. Bei großer Stromstärke ist dieser Unterschied verhältnismäßig viel größer und bei zu großer Belastung schneidet die neue Kurve die X-Achse, d. h. der Motor bleibt stehen.

Der Inhalt eines Abschnittes der gleichseitigen Hyperbel.

Wir denken uns die Fläche der Hyperbel $xy = \frac{a^2}{2}$ in senkrechte unendlich schmale Streifen zerlegt, von denen jeder den Inhalt $y \cdot dx$ hat. Die Fläche des Abschnittes von x_1 bis x_2 ist dann:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2}{2x} \cdot dx = \frac{a^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$F = \frac{a^2}{2} (\log_e x_2 - \log_e x_1) = \frac{a^2}{2} \log_e \frac{x_2}{x_1} \quad . \quad . \quad (33)$$

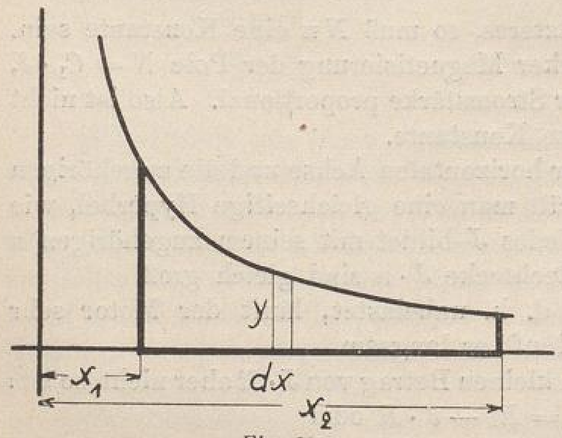

Fig. 61.

Anwendung: Bei der Isotherme dient diese Formel zur Berechnung der Arbeit, die das Gas bei seiner Ausdehnung vom Volumen x_1 auf das Volumen x_2 leistet. Auf der horizontalen Achse sind nämlich nicht nur die Kubikmeter, sondern zugleich auch die Wege des Kolbens aufgetragen, während vertikal darüber die Drucke angegeben sind (Fig. 59). Multipliziert man den kleinen Teil des Weges dx mit dem zugehörigen Druck y, so erhält man die auf dem Wege dx geleistete Arbeit.

Beim Integrieren erhält man dann die Arbeit, die auf dem ganzen Wege $x_1 x_2$ geleistet wird [1]).

Ähnlichkeit der gleichseitigen Hyperbeln.

Aus der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $xy = \frac{a^2}{2}$ geht hervor, daß die verschiedenen gleichseitigen Hyperbeln

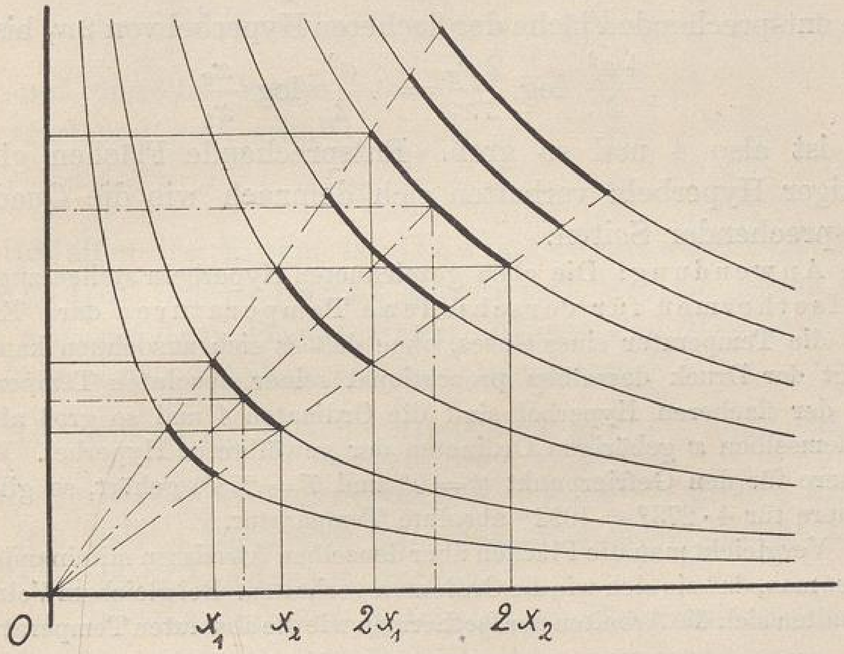

Fig. 62.

sich nur durch die Konstante $\frac{a^2}{2}$ unterscheiden. Sie sind also ähnlich. In Fig. 62 sind unter anderen auch die Hyperbeln $xy = \frac{a^2}{2}$ und $xy = \frac{(2\,a)^2}{2}$ gezeichnet. Bei der flacheren Hyperbel sind die Flächen der Rechtecke 4 mal so groß wie bei der gewölbteren. Einem doppelt so großen x entspricht ein doppelt

[1]) Die Ausführung eines Beispiels findet man: Elemente der Diff. u. Intg. in geom. Methode von Düsing. 2. Auflage, Seite 75.

so großes y; die flachere Kurve ist nur ein aufs Doppelte vergrößertes Stück der gewölbteren.

Die entsprechenden Stücke sind in der Figur hervorgehoben. Verbindet man entsprechende Punkte miteinander, so gehen die Verbindungslinien durch O. Dieser Achsenschnittpunkt ist der Ähnlichkeitspunkt.

Die Fläche der gewölbteren Kurve von x_1 bis x_2 ist

$$\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}.$$

Die entsprechende Fläche der flacheren Hyperbel von $2\,x_1$ bis $2\,x_2$ ist

$$\frac{4\,a^2}{2} \log \frac{2\,x_2}{2\,x_1} = 4\,\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}$$

sie ist also 4 mal so groß. Entsprechende Flächen gleichseitiger Hyperbeln verhalten sich demnach wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Anwendung: Die oben gezeichneten Hyperbeln stellen zugleich die Isothermen für verschiedene Temperaturen dar. Erhöht man die Temperatur eines Gases, ohne daß es sich ausdehnen kann, so steigt der Druck desselben proportional seiner absoluten Temperatur. Bei der flacheren Hyperbel sind die Ordinaten 4 mal so groß als die zu demselben x gehörigen Ordinaten der gewölbteren Hyperbel. Wenn letztere für den Gefrierpunkt ($t = 0^0$ und $T = 273^0$) gehört, so gilt die flachere für $4 \cdot 273^0 = 1092^0$ absolute Temperatur.

Vergleicht man die Flächen über denselben Abszissen miteinander, so findet man, daß sie sich wie die Ordinaten verhalten. Bei gleichem Volumen verhalten sich die Arbeiten der Isothermen wie die absoluten Temperaturen.

Verwandtschaft von Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Der Parameter.

Bei den betrachteten Kurven sind die im Brennpunkt errichteten Ordinaten y_1 bereits berechnet worden.

a) In die Gleichung der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ hatten wir die Abszisse des Brennpunktes $x_1 = \frac{p}{2}$ eingesetzt und erhielten:

$$y_1 = \pm\, p_p$$