Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Gleichung der Hyperbel

Ähnlichkeit der Ellipsen.

Alle Kreise sind einander ähnlich. Sieht man nun verschiedene Kreise unter demselben Winkel an, so werden bei ihnen entsprechende Strecken in demselben Maße verkürzt. Sie bleiben also proportional, und die entstandenen Ellipsen sind einander ähnlich. Ellipsen sind dann ähnlich, wenn bei ihnen das Verhältnis $b:a$ dasselbe ist.

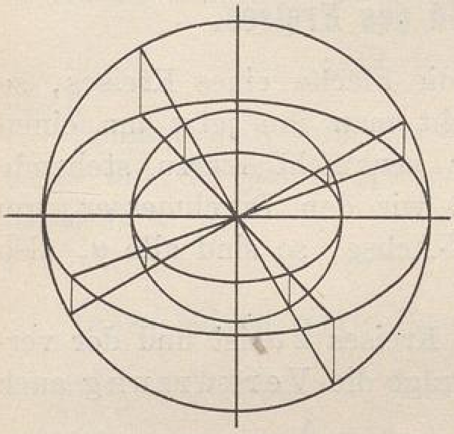

Fig. 54 b.

Ähnliche Ellipsen lassen sich konzentrisch aufeinander legen (Fig. 54 b), sodaß die Achsen und konjugierten Durchmesser sich decken. Sie gehen durch entsprechende Punkte beider Ellipsen. Der Mittelpunkt ist hier „Ähnlichkeitspunkt".

Die Fläche einer Ellipse ist $a\,b\,\pi$. Haben die Achsen der größeren Ellipse (Fig. 54) dasselbe Verhältnis $a:b$, sind aber beide doppelt so groß, so ist die Fläche der größeren Ellipse $2a \cdot 2b \cdot \pi = 4ab\pi$, also 4 mal so groß als die der kleineren. Kurz: Die Flächen ähnlicher Ellipsen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Achsen oder sonstiger entsprechender Strecken.

Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel.

Erklärung: Eine Hyperbel ist der geometrische Ort derjenigen Punkte (P), für welche die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten (F_1 und F_2) gleich bleibt. In Figur 55 ist $PF_1 - PF_2 =$ Konstante $= 2$ a. Die Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte, ihr Abstand vom Zentrum O heißt Exzentrizität (e). Die Verbindungslinien PF_1 und PF_2 eines beliebigen Punktes P der Hyperbel mit den Brennpunkten heißen Brennstrahlen, Brennlinien oder Fahrstrahlen (PF_1 und PF_2).

Wie bei der Ellipse, legt man die X-Achse durch die Brennpunkte und die Y-Achse als Mittelsenkrechte dazwischen. Die Entfernung der Brennpunkte $F_1 F_2$ sei auch hier gleich $2e$ und die Differenz der Brennstrahlen gleich $2a$. Dann ist:

$$\sqrt{y^2 + (x+e)^2} - \sqrt{y^2 + (x-e)^2} = 2a.$$

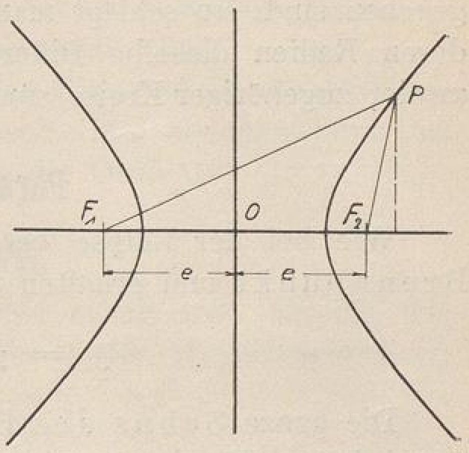

Fig. 55.

Durch zweimaliges Quadrieren schafft man die Wurzeln weg und erhält schließlich:

$$x^2 (e^2 - a^2) - a^2 (e^2 - a^2) = a^2 y^2.$$

Wir setzen $e^2 - a^2 = b^2$ [1])

$$x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Bemerkung: Die Formel ergibt, daß

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

ist; wie bei der Ellipse ist also auch die Hyperbel zur X-Achse symmetrisch, und dies läßt sich auch für die Y-Achse nachweisen.

Liegt P auf der X-Achse, so ist $y = o$ und $x = \pm a$, also $2a$ gleich der Achse und jede Achsenhälfte gleich a. Diese Achse heißt Hauptachse.

Für $x < a$ wird y imaginär; senkrecht über der Strecke $2a$ liegen also keine Punkte der Hyperbel. Die Länge der Nebenachse ist imaginär. Dagegen gibt es für alle Werte von y zwei Werte von x.

Die Fig. 55 zeigt, daß die Hauptachse immer kleiner sein muß als die Exzentrizität.

---

[1]) Die geometrische Bedeutung von b kann erst später erörtert werden (S. 64).

Konstruktion: Aus der Erklärung der Hyperbel ergibt sich auch ihre Konstruktion. Wenn die beiden Brennpunkte gegeben sind, so schlägt man um diese Brennpunkte Kreise, deren Radien dieselbe Differenz haben. Die Schnittpunkte zweier zugehöriger Kreise sind jedesmal Punkte der Hyperbel.

Parameter.

Wie bei der Ellipse berechnen wir die Ordinate im Brennpunkt und erhalten auch hier:

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Die ganze Sehne des Brennpunktes, die senkrecht zur Achse steht, ist $2\,p$, und wir nennen diese Strecke den Parameter (Fig. 56).

Die Scheitelgleichung der Hyperbel.

Ähnlich wie bei der Ellipse findet man (Fig. 56):

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

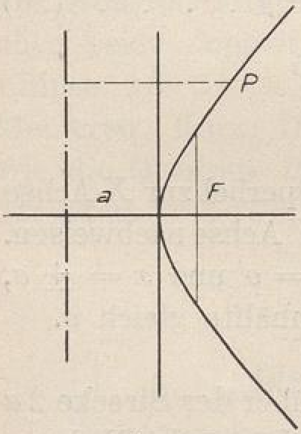

Fig. 56.

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$, so erhält man:

$$y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Übung: 1. Man berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $y = Mx + n$ mit der Hyperbel $x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 \cdot b^2$.

2. Die Hyperbel $x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$ ist gegeben. Man verschiebe die Y-Achse in den Brennpunkt und stelle jetzt die Gleichung der Hyperbel auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung

$$9\,x^2 - 16\,y^2 - 144 = 0.$$

Man schließe auf die Art der Kurve, bestimme a, b und e,