Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Scheitelgleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Konstruktion: Aus der Erklärung der Hyperbel ergibt sich auch ihre Konstruktion. Wenn die beiden Brennpunkte gegeben sind, so schlägt man um diese Brennpunkte Kreise, deren Radien dieselbe Differenz haben. Die Schnittpunkte zweier zugehöriger Kreise sind jedesmal Punkte der Hyperbel.

Parameter.

Wie bei der Ellipse berechnen wir die Ordinate im Brennpunkt und erhalten auch hier:

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = p \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Die ganze Sehne des Brennpunktes, die senkrecht zur Achse steht, ist $2\,p$, und wir nennen diese Strecke den Parameter (Fig. 56).

Die Scheitelgleichung der Hyperbel.

Ähnlich wie bei der Ellipse findet man (Fig. 56):

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

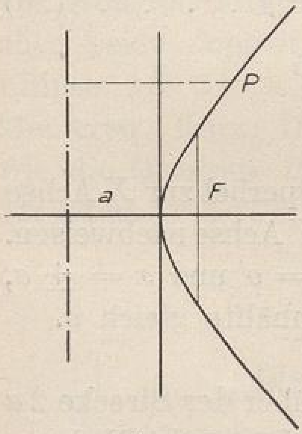

Fig. 56.

Setzt man auch hier $\frac{b^2}{a} = p$, so erhält man:

$$y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}x^2 \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Übung: 1. Man berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $y = Mx + n$ mit der Hyperbel $x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 \cdot b^2$.

2. Die Hyperbel $x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$ ist gegeben. Man verschiebe die Y-Achse in den Brennpunkt und stelle jetzt die Gleichung der Hyperbel auf.

3. Man zeichne die Kurve der Gleichung

$$9\,x^2 - 16\,y^2 - 144 = 0.$$

Man schließe auf die Art der Kurve, bestimme a, b und e, suche die Brennpunkte und prüfe dann durch Nachmessen ob sie der Erklärung genügt.

4. Man bestimme die Ordinate des Punktes obiger Hyperbel, dessen Abszisse gleich 5 Längeneinheiten ist.

5. Für welchen Punkt obiger Hyperbel ist die Ordinate doppelt so groß wie die Abszisse? Für welchen Punkt ist die Abszisse doppelt so groß wie die Ordinate?

Tangente.

Als Steigung der Hyperbel erhält man ähnlich wie bei der Ellipse durch Differenzieren der Hyperbelgleichung den Wert:
$$\frac{dy}{dx} = + \frac{x\,b^2}{y\,a^2}.$$

Die Gleichung der Tangente wird wie bei der Ellipse hieraus abgeleitet und heißt:
$$x x_1\, a^2 - y y_1\, b^2 = a^2\, b^2$$
oder:
$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Auf entsprechende Weise gewinnt man auch die Gleichung der Normalen.

Aufgabe: Man vergleiche den Verlauf des Differentialquotienten mit dem Verlauf der Kurve.

Berührungsgrößen.

Auch diese erhält man ebenso wie bei der Ellipse. Man leitet zunächst analytisch die Größe der Subtangente ab und kann dann die anderen drei Größen entweder planimetrisch oder ebenfalls analytisch bestimmen

Übung: 1. Für welchen Berührungspunkt der Hyperbel geht die Tangente parallel zur X-Achse? Für welchen parallel zur Y-Achse?

2. An die Hyperbel $16\,x^2 - 25\,y^2 = 400$ soll in dem Berührungspunkte mit der Ordinate 3 cm eine Tangente gelegt werden. Normalform. Maßstäbliche Zeichnung.