Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Berührungsgrößen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

suche die Brennpunkte und prüfe dann durch Nachmessen ob sie der Erklärung genügt.

4. Man bestimme die Ordinate des Punktes obiger Hyperbel, dessen Abszisse gleich 5 Längeneinheiten ist.

5. Für welchen Punkt obiger Hyperbel ist die Ordinate doppelt so groß wie die Abszisse? Für welchen Punkt ist die Abszisse doppelt so groß wie die Ordinate?

Tangente.

Als Steigung der Hyperbel erhält man ähnlich wie bei der Ellipse durch Differenzieren der Hyperbelgleichung den Wert:

$$\frac{dy}{dx} = + \frac{x b^2}{y a^2}.$$

Die Gleichung der Tangente wird wie bei der Ellipse hieraus abgeleitet und heißt:

$$x x_1 a^2 - y y_1 b^2 = a^2 b^2$$

oder:

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Auf entsprechende Weise gewinnt man auch die Gleichung der Normalen.

Aufgabe: Man vergleiche den Verlauf des Differentialquotienten mit dem Verlauf der Kurve.

Berührungsgrößen.

Auch diese erhält man ebenso wie bei der Ellipse. Man leitet zunächst analytisch die Größe der Subtangente ab und kann dann die anderen drei Größen entweder planimetrisch oder ebenfalls analytisch bestimmen

Übung: 1. Für welchen Berührungspunkt der Hyperbel geht die Tangente parallel zur X-Achse? Für welchen parallel zur Y-Achse?

2. An die Hyperbel $16 x^2 - 25 y^2 = 400$ soll in dem Berührungspunkte mit der Ordinate 3 cm eine Tangente gelegt werden. Normalform. Maßstäbliche Zeichnung.

3. Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 3$ und $b = 2$ cm.

4. Man bestimme die Steigung der Hyperbel

$$16\,x^2 - 25\,y^2 = 400$$

an den Punkten mit der Abszisse 6, 7, 8, 9 cm usw.

5. Wo hat diese Hyperbel die Steigung 1?

Asymptote.

Wir suchen den Schnittpunkt der Hyperbel mit einer Geraden, die durch den Achsenschnittpunkt geht. Für diese Gerade ist $n = 0$ (Fig. 57).

Gegeben ist die Hyperbel:

$$x^2\,b^2 - y^2\,a^2 = a^2\,b^2$$

und die Gerade:

$$y = M\,x$$

Für ihren Schnittpunkt $(x_1\,y_1)$ gilt also:

$$x_1{}^2\,b^2 - a^2\,M^2\,x_1{}^2 = a^2\,b^2$$

$$x_1{}^2\,(b^2 - a^2\,M^2) = a^2\,b^2$$

$$x_1{}^2 = \frac{a^2\,b^2}{b^2 - a^2\,M^2}$$

$$x_1 = \pm\,\frac{a\,b}{\sqrt{b^2 - a^2\,M^2}}.$$

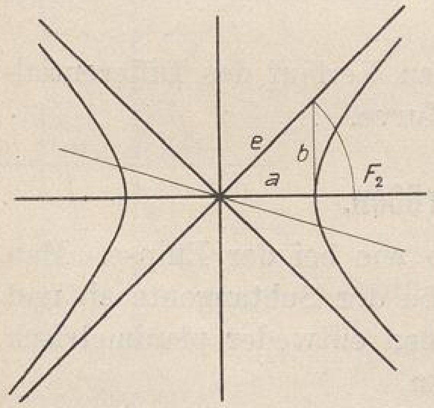

Fig. 57.

Hierbei können drei Fälle eintreten, je nachdem $a^2\,M^2$ größer, gleich oder kleiner als b^2 ist.

Ist $a^2\,M^2 < b^2$, so erhält man zwei reelle gleich große, aber entgegengesetzte x. (Die dünn gezeichnete Sekante in Fig. 57). Aus der Gleichung der Geraden $y = M\,x$ folgt dann, daß auch die y gleich groß und entgegengesetzt sind. Demnach wird die Gerade im Achsenschnittpunkt halbiert, sie heißt Durchmesser.