



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Asymptote

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78413)

3. Die Gleichung der Tangente aufzustellen, deren Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt. Maßstäbliche Zeichnung für $a = 3$ und $b = 2$ cm.

4. Man bestimme die Steigung der Hyperbel

$$16x^2 - 25y^2 = 400$$

an den Punkten mit der Abszisse 6, 7, 8, 9 cm usw.

5. Wo hat diese Hyperbel die Steigung 1?

Asymptote.

Wir suchen den Schnittpunkt der Hyperbel mit einer Geraden, die durch den Achsenschnittpunkt geht. Für diese Gerade ist $n = 0$ (Fig. 57).

Gegeben ist die Hyperbel:

$$x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$$

und die Gerade:

$$y = Mx$$

Für ihren Schnittpunkt (x_1, y_1) gilt also:

$$x_1^2 b^2 - a^2 M^2 x_1^2 = a^2 b^2$$

$$x_1^2 (b^2 - a^2 M^2) = a^2 b^2$$

$$x_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 M^2}$$

$$x_1 = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 M^2}}$$

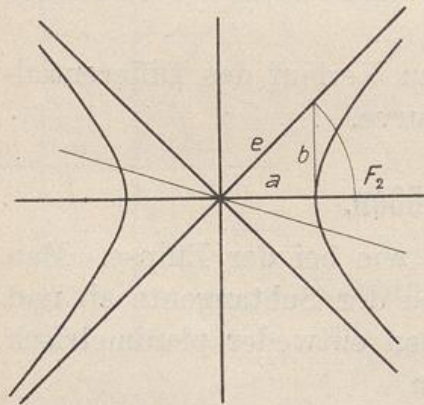


Fig. 57.

Hierbei können drei Fälle eintreten, je nachdem $a^2 M^2$ größer, gleich oder kleiner als b^2 ist.

Ist $a^2 M^2 < b^2$, so erhält man zwei reelle gleich große, aber entgegengesetzte x . (Die dünn gezeichnete Sekante in

Fig. 57). Aus der Gleichung der Geraden $y = Mx$ folgt dann, daß auch die y gleich groß und entgegengesetzt sind. Demnach wird die Gerade im Achsenschnittpunkt halbiert, sie heißt Durchmesser.

Ist $a^2 M^2 > b^2$, so wird x imaginär, d. h. die Gerade trifft die Hyperbel überhaupt nicht.

Ist aber $a^2 M^2 = b^2$, so wird $x_1 = \infty$. Alsdann heißt die Gerade Asymptote. Jetzt ist $M = \pm \frac{b}{a}$ die Steigung der beiden Asymptoten (Fig. 57) und b ist das auf der X-Achse im Scheitel der Hyperbel errichtete Lot gemessen bis zur Asymptote. Dann ist die Gleichung der Asymptoten

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Die Scheiteltangente berührt die Hyperbel im Scheitel, die Asymptoten treffen die Hyperbel im Unendlichen. Die Berührungspunkte der übrigen Tangenten liegen dazwischen. Alle Tangenten werden daher die Hauptachse zwischen dem Scheitel und dem Achsenmittelpunkt schneiden. Der Steigungswinkel einer Tangente liegt zwischen den Steigungswinkeln der beiden Asymptoten.

Aufgabe: Man stelle die Gleichung der Tangenten an eine Hyperbel mit $a = 2$ und $b = 3$ cm auf, die eine Steigung von 30° , 45° , 60° , 120° , 135° , 150° haben. Welche von diesen Tangenten sind möglich? Man bestimme die Berührungspunkte und die Größen ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung.

Die Näherung der Kurve an die Asymptote.

Für einen beliebigen Punkt (mit der Abszisse x_1) berechne man die Ordinate bis zur Asymptote (y_1) und bis zur Hyperbel (y_1'). Erstere ist

$$y_1 = \frac{b}{a} x_1$$

und letztere

$$y_1' = \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a_1^2}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Größen ergibt sofort, daß ihr Unterschied desto kleiner sein wird, je kleiner a im Vergleich