Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Näherung der Kurve an die Asymptote

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Ist $a^2 M^2 > b^2$, so wird x imaginär, d. h. die Gerade trifft die Hyperbel überhaupt nicht.

Ist aber $a^2 M^2 = b^2$, so wird $x_1 = \infty$. Alsdann heißt die Gerade Asymptote. Jetzt ist $M = \pm \frac{b}{a}$ die Steigung der beiden Asymptoten (Fig. 57) und b ist das auf der X-Achse im Scheitel der Hyperbel errichtete Lot gemessen bis zur Asymptote. Dann ist die Gleichung der Asymptoten

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Die Scheiteltangente berührt die Hyperbel im Scheitel, die Asymptoten treffen die Hyperbel im Unendlichen. Die Berührungspunkte der übrigen Tangenten liegen dazwischen. Alle Tangenten werden daher die Hauptachse zwischen dem Scheitel und dem Achsenmittelpunkt schneiden. Der Steigungswinkel einer Tangente liegt zwischen den Steigungswinkeln der beiden Asymptoten.

Aufgabe: Man stelle die Gleichung der Tangenten an eine Hyperbel mit $a = 2$ und $b = 3$ cm auf, die eine Steigung von 30^0, 45^0, 60^0, 120^0, 135^0, 150^0 haben. Welche von diesen Tangenten sind möglich? Man bestimme die Berührungspunkte und die Größen ihrer Abschnitte auf den Achsen. Maßstäbliche Zeichnung.

Die Näherung der Kurve an die Asymptote.

Für einen beliebigen Punkt (mit der Abszisse x_1) berechne man die Ordinate bis zur Asymptote (y_1) und bis zur Hyperbel (y_1'). Erstere ist

$$y_1 = \frac{b}{a} x_1$$

und letztere

$$y_1' = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a_1^2}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Größen ergibt sofort, daß ihr Unterschied desto kleiner sein wird, je kleiner a im Vergleich zu x ist, d. h. je größer x ist. Wird $x = \infty$, so verschwindet der Unterschied. Die Kurve nähert sich also der Asymptote beständig und erreicht sie im Unendlichen.

Ähnlichkeit bei Hyperbeln.

Wie die Ellipsen, so sind auch die Hyperbeln ähnlich, wenn bei ihnen das Verhältnis $a : b$ dasselbe ist, wenn sie also dieselben Asymptoten haben. Man zeichne mehrere Hyperbeln mit gemeinsamen Achsen und Asymptoten. Der Achsenschnittpunkt wird Ähnlichkeitspunkt.

Gleichseitige Hyperbel.

Wird in der Gleichung der Hyperbel $x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$ die Länge $a = b$, so erhält man

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

als Gleichung der gleichseitigen Hyperbel. Die Steigung der Asymptote ist $a : a = 1$; also steigt sie unter 45^0 und steht auf der anderen Asymptote senkrecht. Die Hyperbel in Fig. 57 ist als gleichseitige gezeichnet.

Aufgabe: 1. Wie groß ist e bei der gleichseitigen Hyperbel?

2. Wie groß ist bei ihr die Ordinate im Brennpunkt?

Die Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel.

Denkt man sich das Achsenkreuz um 45^0 nach rechts gedreht, so werden die Asymptoten zu Achsen und der Drehungswinkel ist -45^0 (Fig. 59).

Wenn x und y die alten und ξ und η die neuen Koordinaten sind, so ist nach Gleichung (12):

$$y = \eta \cos \alpha + \xi \sin \alpha$$
$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$$

und bei einer Drehung um -45^0 nach Gleichung (13):

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}}.$$