Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Ihre Asymptotengleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

zu x ist, d. h. je größer x ist. Wird $x = \infty$, so verschwindet der Unterschied. Die Kurve nähert sich also der Asymptote beständig und erreicht sie im Unendlichen.

Ähnlichkeit bei Hyperbeln.

Wie die Ellipsen, so sind auch die Hyperbeln ähnlich, wenn bei ihnen das Verhältnis $a : b$ dasselbe ist, wenn sie also dieselben Asymptoten haben. Man zeichne mehrere Hyperbeln mit gemeinsamen Achsen und Asymptoten. Der Achsenschnittpunkt wird Ähnlichkeitspunkt.

Gleichseitige Hyperbel.

Wird in der Gleichung der Hyperbel $x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$ die Länge $a = b$, so erhält man

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

als Gleichung der gleichseitigen Hyperbel. Die Steigung der Asymptote ist $a : a = 1$; also steigt sie unter 45^0 und steht auf der anderen Asymptote senkrecht. Die Hyperbel in Fig. 57 ist als gleichseitige gezeichnet.

Aufgabe: 1. Wie groß ist e bei der gleichseitigen Hyperbel?

2. Wie groß ist bei ihr die Ordinate im Brennpunkt?

Die Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel.

Denkt man sich das Achsenkreuz um 45^0 nach rechts gedreht, so werden die Asymptoten zu Achsen und der Drehungswinkel ist -45^0 (Fig. 59).

Wenn x und y die alten und ξ und η die neuen Koordinaten sind, so ist nach Gleichung (12):

$$y = \eta \cos\alpha + \xi \sin\alpha$$
$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha$$

und bei einer Drehung um -45^0 nach Gleichung (13):

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ und } x = \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\xi}{\sqrt{2}}.$$

Setzt man diese Koordinaten in die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ ein, so erhält man:

$$\frac{1}{2}(\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2) - \frac{1}{2}(\xi^2 - 2\,\xi\,\eta + \eta^2) = a^2$$

$$2\,\xi\,\eta = a^2$$

$$\xi\,\eta = \frac{a^2}{2}$$

$$\xi\,\eta \textbf{ oder } x\,y = \frac{a^2}{2} = \textbf{Konstante} = \textbf{C} \quad \ldots (32$$

Für jeden Punkt der Hyperbel ist also das Rechteck aus Ordinate und Abszisse gleich groß (Fig. 59).

Aufgabe: Man bestimme die kürzeste Entfernung der gleichseitigen Hyperbel vom Achsenschnittpunkt.

Diese ist die frühere Halbachse a. Nach Gleichung (32) muß das in Fig. 59 gestrichelte Quadrat gleich $\frac{a^2}{2}$ = Konstante C sein. Also ist die Diagonale $a = \sqrt{2\,C}$ und die Seite des Quadrates gleich $\sqrt{C}$. Man bestimme diese Größen für die in Fig. 59 gezeichnete Hyperbel $v\,p = 8$.

Konstruktion.

Aus Gleichung (32) ergibt sich eine Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus den Asymptoten $O\,X$ und $O\,Y$ und einem Punkt P (Fig. 58).

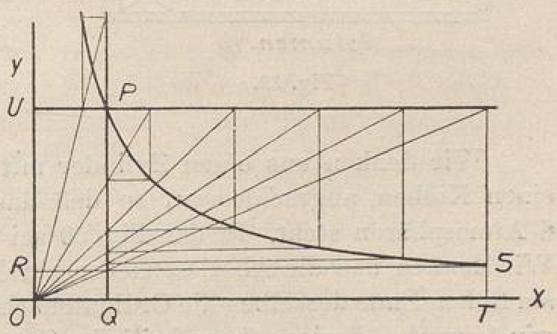

Fig. 58.

Man zieht durch P die Geraden $P\,Q$ parallel zu $O\,Y$ und $P\,U$ parallel zu $O\,X$, verlängert $P\,U$ und trägt beliebige Teile auf der Verlängerung ab. Man verbindet diese Teilpunkte mit O und zieht durch die Schnittpunkte dieser Verbindungen mit $P\,Q$ Parallelen zur Achse $O\,X$. Durch die Teilpunkte zieht man dann Parallelen zur anderen Achse $O\,Y$. Die Schnitt-