Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Ihre Konstruktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Setzt man diese Koordinaten in die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ ein, so erhält man:

$$\frac{1}{2}(\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2) - \frac{1}{2}(\xi^2 - 2\,\xi\,\eta + \eta^2) = a^2$$

$$2\,\xi\,\eta = a^2$$

$$\xi\,\eta = \frac{a^2}{2}$$

$$\xi\,\eta \textbf{ oder } x\,y = \frac{a^2}{2} = \textbf{Konstante} = \textbf{C} \quad .\;.\,(32$$

Für jeden Punkt der Hyperbel ist also das Rechteck aus Ordinate und Abszisse gleich groß (Fig. 59).

Aufgabe: Man bestimme die kürzeste Entfernung der gleichseitigen Hyperbel vom Achsenschnittpunkt.

Diese ist die frühere Halbachse a. Nach Gleichung (32) muß das in Fig. 59 gestrichelte Quadrat gleich $\frac{a^2}{2}$ = Konstante C sein. Also ist die Diagonale $a = \sqrt{2\,C}$ und die Seite des Quadrates gleich $\sqrt{C}$. Man bestimme diese Größen für die in Fig. 59 gezeichnete Hyperbel $v\,p = 8$.

Konstruktion.

Aus Gleichung (32) ergibt sich eine Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus den Asymptoten OX und OY und einem Punkt P (Fig. 58).

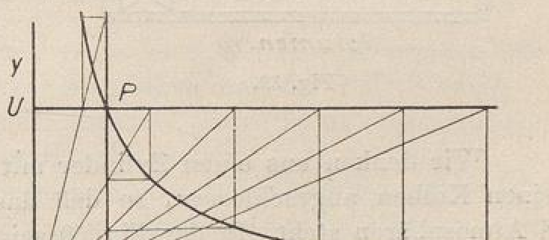

Fig. 58.

Man zieht durch P die Geraden PQ parallel zu OY und PU parallel zu OX, verlängert PU und trägt beliebige Teile auf der Verlängerung ab. Man verbindet diese Teilpunkte mit O und zieht durch die Schnittpunkte dieser Verbindungen mit PQ Parallelen zur Achse OX. Durch die Teilpunkte zieht man dann Parallelen zur anderen Achse OY. Die Schnittpunkte der horizontalen mit den entsprechenden vertikalen Parallelen sind Punkte der Hyperbel.

B e w e i s: Nach einem Satz der Planimetrie sind die Rechtecke $UPQO$ und $ORST$ inhaltsgleich.

A u f g a b e: 1. Man stelle die Gleichung der Tangente der gleichseitigen Hyperbel im alten Axenkreuz wie in dem der Asymptoten auf.

2. Man verschiebe das Achsenkreuz parallel, bis der Achsenschnittpunkt auf den Scheitelpunkt fällt und, bestimme die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel:

A n w e n d u n g e n: 1. D a r s t e l l u n g d e s M a r i o t t e s c h e n G e s e t z e s. Hat man ein Volumen Gas in einem Zylinder unter einem bestimmten Druck, und preßt es dann bei gleichbleibender Temperatur mit dem doppelten Druck zusammen, so wird es auf die Hälfte des Raumes zusammengedrückt. Allgemein ausgedrückt kann man sagen, d a ß s i c h d i e V o l u m e n u m g e k e h r t w i e d i e D r u c k e v e r h a l t e n. Dies Mariotte- oder Boylesche Gesetz gilt für vollkommene Gase wie Luft, und zwar solange die Temperatur dieselbe bleibt.

Ist nun v_0 das Anfangsvolumen und p_0 der anfängliche Druck, v_1 ein späteres Volumen und p_1 der dazugehörige Druck so verhält sich

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1}{p_0}.$$

Oder es ist

$$v_0 p_0 = v_1 p_1 = \text{Konstante}.$$

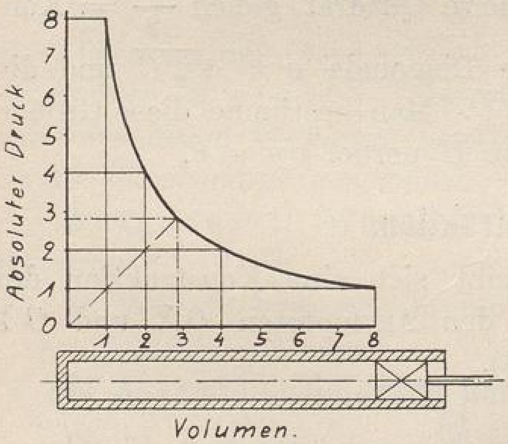

Fig. 59.

Wir denken uns einen Zylinder mit 1 cbm Gas gefüllt und durch einen Kolben abgeschlossen, so daß das Gas unter einem Druck von 8 Atmosphären steht. In der Fig. 59 sei unten der Zylinder angedeutet. Wir denken uns die Abszissenachse parallel zum Zylinder und errichten am linken Ende desselben die Ordinatenachse. Als Anfangszustand tragen wir 1 cm als Abszisse ab, wobei jeder Zentimeter 1 cbm vorstellt. Dann tragen wir 8 cm als Ordinate auf, was einem absoluten Druck von 8 Atmosphären entspricht.

Wir berechnen uns nun wie auf Seite 7 eine Tabelle, indem wir annehmen, das Gas von 1 cbm würde auf 8 cbm ausgedehnt, und indem wir nach der Formel $v \cdot p = v_1 p_1 = 8$ den zugehörigen Druck ausrechnen.

Man trage nun die verschiedenen Volumen ($v = 1, 2, 4, 8$) auf der horizontalen und die entsprechenden Drucke ($p = 8, 4, 2, 1$) senkrecht nach oben auf. Man legt durch die erhaltenen Punkte eine Kurve, die man Isotherme nennt, weil das genannte Gesetz nur bei gleichbleibender Temperatur gilt. Die Rechtecke aus den Koordinaten eines Punktes sind gleich groß, wie Fig. 59 zeigt. Also ist die Isotherme eine gleichseitige Hyperbel. Im vorliegenden Fall erhält man stets das Produkt 8.

2. Beispiel aus der Elektrotechnik: Die in einen Hauptschlußmotor (z. B. einer Straßenbahn oder eines Krans) eingeführte elektromotorische Kraft, also die Klemmenspannung E_k, wird um den Spannungsverlust in dem Motor vermindert. Dieser beträgt $J \cdot R$, d. h. Stromstärke mal inneren Widerstand des Motors. Der Rest $E = E_k - J \cdot R$ ist der elektromotorischen Gegenkraft des Motors gleich, hält ihr das Gleichgewicht und die ihr entsprechende Energie wird in die mechanische Arbeit des Motors umgesetzt.

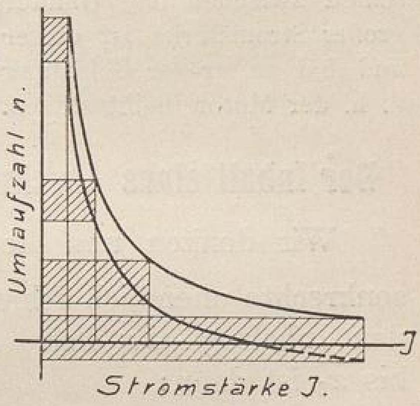

Fig. 60.

Diese Gegenkraft des Motors entsteht durch die Drehung, wobei der Motor als Dynamomaschine wirkt. Diese Gegenkraft ist demnach der Zahl der Umdrehungen (n) und der Kraftlinien (N) proportional. $E = C N n$, wenn C eine Konstante ist.

$$\text{Also ist } C N n = E_k - J \cdot R.$$

Hierin ist die eingeführte elektromotorische Kraft E_k konstant und $J \cdot R$ sehr klein.

a) Vernachlässigt man letzteres, so muß $N n$ eine Konstante sein.

Nun ist bei nicht zu starker Magnetisierung der Pole $N = C_1 \cdot J$, d. h. die Kraftlinienzahl ist der Stromstärke proportional. Also ist nicht nur $N n$, sondern auch $J \cdot n$ eine Konstante.

Trägt man nun J auf einer horizontalen Achse und die zugehörigen n vertikal darüber auf, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel, wie in voriger Figur (Fig. 59). Jedes J bildet mit seinem zugehörigen n ein Rechteck, und alle diese Rechtecke $J \cdot n$ sind gleich groß.

Bei kleiner Stromstärke, d. h. unbelastet, läuft der Motor sehr rasch; bei großer Stromstärke läuft er langsam.

b) Vernachlässigt man den kleinen Betrag von $J \cdot R$ aber nicht, so ist:

$$C N n = E_k - J \cdot R \text{ oder}$$
$$C_2 J n = E_k - J R.$$

Von jedem früheren Rechteck von konstanter Größe ist also ein kleiner Betrag $J \cdot R$ abzuziehen, der proportional der Stromstärke J ist.

Gehen z. B. bei 10 Ampere von der eingeführten Spannung 5 Volt verloren, so ist der Verlust bei 2 Ampere nur 1 Volt.

Von jedem früheren Rechteck ist also ein kleines Rechteck $J \cdot R$ abzuziehen, welches eine ebenso große Grundlinie J wie die früheren Rechtecke $J \cdot n$ und eine konstante Höhe proportional R hat. Diese Rechtecke, die abgezogen werden müssen, sind in der Fig. 60 schraffiert.

Die rechten unteren Ecken dieser schmalen Rechtecke geben uns die wirklichen Tourenzahlen an. Sie liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, die um diesen Betrag, der proportional R ist, nach unten verschoben ist.

Beide Kurven nähern sich bei kleiner Stromstärke, d. h. der Unterschied zwischen den Umlaufszahlen ist verhältnismäßig gering. Bei großer Stromstärke ist dieser Unterschied verhältnismäßig viel größer und bei zu großer Belastung schneidet die neue Kurve die X-Achse, d. h. der Motor bleibt stehen.

Der Inhalt eines Abschnittes der gleichseitigen Hyperbel.

Wir denken uns die Fläche der Hyperbel $x\,y = \frac{a^2}{2}$ in senkrechte unendlich schmale Streifen zerlegt, von denen jeder den Inhalt $y \cdot dx$ hat. Die Fläche des Abschnittes von x_1 bis x_2 ist dann:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2}{2\,x} \cdot dx = \frac{a^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$F = \frac{a^2}{2} (\log_e x_2 - \log_e x_1) = \frac{a^2}{2} \log_e \frac{x_2}{x_1} \quad . \quad . \quad (33)$$

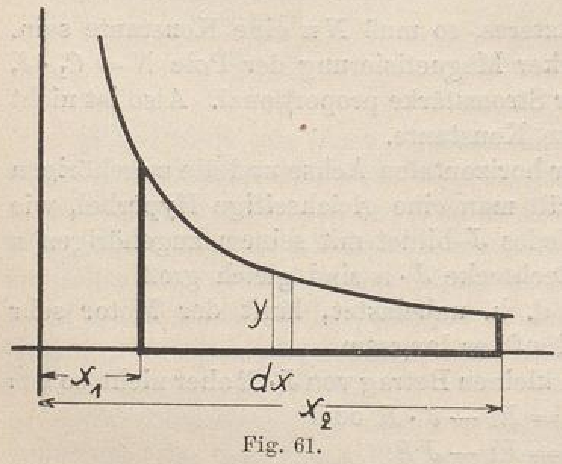

Fig. 61.

Anwendung: Bei der Isotherme dient diese Formel zur Berechnung der Arbeit, die das Gas bei seiner Ausdehnung vom Volumen x_1 auf das Volumen x_2 leistet. Auf der horizontalen Achse sind nämlich nicht nur die Kubikmeter, sondern zugleich auch die Wege des Kolbens aufgetragen, während vertikal darüber die Drucke angegeben sind (Fig. 59). Multipliziert