Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Ähnlichkeit dieser Hyperbeln

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

man den kleinen Teil des Weges dx mit dem zugehörigen Druck y, so erhält man die auf dem Wege dx geleistete Arbeit.

Beim Integrieren erhält man dann die Arbeit, die auf dem ganzen Wege $x_1 x_2$ geleistet wird [1]).

Ähnlichkeit der gleichseitigen Hyperbeln.

Aus der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $xy = \frac{a^2}{2}$ geht hervor, daß die verschiedenen gleichseitigen Hyperbeln

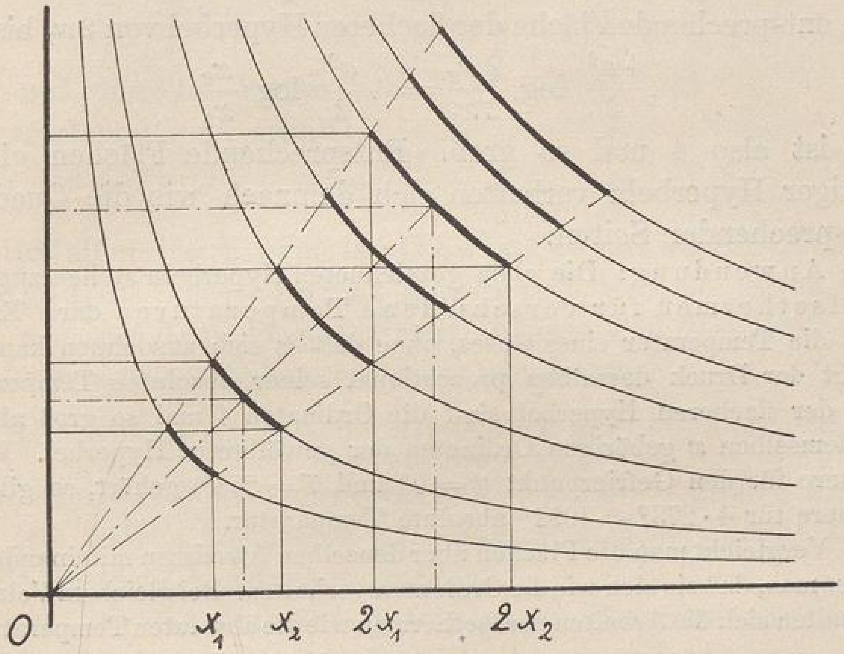

Fig. 62.

sich nur durch die Konstante $\frac{a^2}{2}$ unterscheiden. Sie sind also ähnlich. In Fig. 62 sind unter anderen auch die Hyperbeln $xy = \frac{a^2}{2}$ und $xy = \frac{(2\,a)^2}{2}$ gezeichnet. Bei der flacheren Hyperbel sind die Flächen der Rechtecke 4 mal so groß wie bei der gewölbteren. Einem doppelt so großen x entspricht ein doppelt

---

[1]) Die Ausführung eines Beispiels findet man: Elemente der Diff. u. Intg. in geom. Methode von Düsing. 2. Auflage, Seite 75.

so großes y; die flachere Kurve ist nur ein aufs Doppelte vergrößertes Stück der gewölbteren.

Die entsprechenden Stücke sind in der Figur hervorgehoben. Verbindet man entsprechende Punkte miteinander, so gehen die Verbindungslinien durch O. Dieser Achsenschnittpunkt ist der Ähnlichkeitspunkt.

Die Fläche der gewölbteren Kurve von x_1 bis x_2 ist

$$\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}.$$

Die entsprechende Fläche der flacheren Hyperbel von $2x_1$ bis $2x_2$ ist

$$\frac{4\,a^2}{2} \log \frac{2\,x_2}{2\,x_1} = 4\,\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}$$

sie ist also 4 mal so groß. Entsprechende Flächen gleichseitiger Hyperbeln verhalten sich demnach wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Anwendung: Die oben gezeichneten Hyperbeln stellen zugleich die Isothermen für verschiedene Temperaturen dar. Erhöht man die Temperatur eines Gases, ohne daß es sich ausdehnen kann, so steigt der Druck desselben proportional seiner absoluten Temperatur. Bei der flacheren Hyperbel sind die Ordinaten 4 mal so groß als die zu demselben x gehörigen Ordinaten der gewölbteren Hyperbel. Wenn letztere für den Gefrierpunkt ($t = 0^0$ und $T = 273^0$) gehört, so gilt die flachere für $4 \cdot 273^0 = 1092^0$ absolute Temperatur.

Vergleicht man die Flächen über denselben Abszissen miteinander, so findet man, daß sie sich wie die Ordinaten verhalten. Bei gleichem Volumen verhalten sich die Arbeiten der Isothermen wie die absoluten Temperaturen.

Verwandtschaft von Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Der Parameter.

Bei den betrachteten Kurven sind die im Brennpunkt errichteten Ordinaten y_1 bereits berechnet worden.

a) In die Gleichung der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ hatten wir die Abszisse des Brennpunktes $x_1 = \frac{p}{2}$ eingesetzt und erhielten:

$$y_1 = \pm\, p_p$$