Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Verwandtschaft zwischen Parabel, Ellipse und Hyperbel.

so großes y; die flachere Kurve ist nur ein aufs Doppelte vergrößertes Stück der gewölbteren.

Die entsprechenden Stücke sind in der Figur hervorgehoben. Verbindet man entsprechende Punkte miteinander, so gehen die Verbindungslinien durch O. Dieser Achsenschnittpunkt ist der Ähnlichkeitspunkt.

Die Fläche der gewölbteren Kurve von x_1 bis x_2 ist

$$\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}.$$

Die entsprechende Fläche der flacheren Hyperbel von $2x_1$ bis $2x_2$ ist

$$\frac{4a^2}{2} \log \frac{2x_2}{2x_1} = 4\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}$$

sie ist also 4 mal so groß. Entsprechende Flächen gleichseitiger Hyperbeln verhalten sich demnach wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Anwendung: Die oben gezeichneten Hyperbeln stellen zugleich die Isothermen für verschiedene Temperaturen dar. Erhöht man die Temperatur eines Gases, ohne daß es sich ausdehnen kann, so steigt der Druck desselben proportional seiner absoluten Temperatur. Bei der flacheren Hyperbel sind die Ordinaten 4 mal so groß als die zu demselben x gehörigen Ordinaten der gewölbteren Hyperbel. Wenn letztere für den Gefrierpunkt ($t = 0^0$ und $T = 273^0$) gehört, so gilt die flachere für $4 \cdot 273^0 = 1092^0$ absolute Temperatur.

Vergleicht man die Flächen über denselben Abszissen miteinander, so findet man, daß sie sich wie die Ordinaten verhalten. Bei gleichem Volumen verhalten sich die Arbeiten der Isothermen wie die absoluten Temperaturen.

Verwandtschaft von Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Der Parameter.

Bei den betrachteten Kurven sind die im Brennpunkt errichteten Ordinaten y_1 bereits berechnet worden.

a) In die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ hatten wir die Abszisse des Brennpunktes $x_1 = \frac{p}{2}$ eingesetzt und erhielten:

$$y_1 = \pm p_p$$

b) In die Gleichung der Ellipse $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ setzten wir die Abszisse des Brennpunktes

$$x_1 = e = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ein}$$

und erhielten: $$y_1 = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)}$$

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = \pm p_e$$

c) In die Gleichung der Hyperbel $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ wird auf dieselbe Weise $x_1 = e = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ eingesetzt und man erhält:

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = \pm p_h$$

Bei allen drei Kurven ist die senkrecht zur X-Achse durch den Brennpunkt gezogene Sehne gleich $2p$, d. h. gleich dem Parameter. Ellipse und Hyperbel von gleichem a und b haben gleichen Parameter.

Bemerkung: Aus der Gleichung $p = \frac{b^2}{a}$ folgt, daß b die mittlere Proportionale zwischen der halben großen Achse und dem halben Parameter ist. Aus zwei dieser Stücke kann das dritte stets konstruiert werden.

Beim Kreise und der gleichseitigen Hyperbel ist die im Brennpunkt errichtete Ordinate gleich $p = r$ bezw. $= a$.

Die Scheitelgleichungen.

Die Scheitelgleichungen der bisher betrachteten Kurven hatten wir bereits — Gleichung (24), (28), (29) — festgestellt. Schreiben wir sie statt mit ξ und η mit x und y, so erhalten wir folgende Gleichung:

Parabel: $y^2 = 2\,p\,x$

Ellipse: $y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2$

Hyperbel: $y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2$

Um diese Formeln besser vergleichen zu können, setzen wir wieder $\frac{b^2}{a} = p$ und erhalten:

$$\text{Parabel: } y^2 = 2\,p\,x$$

$$\text{Ellipse: } y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2$$

$$\text{Hyperbel: } y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}\,x^2$$

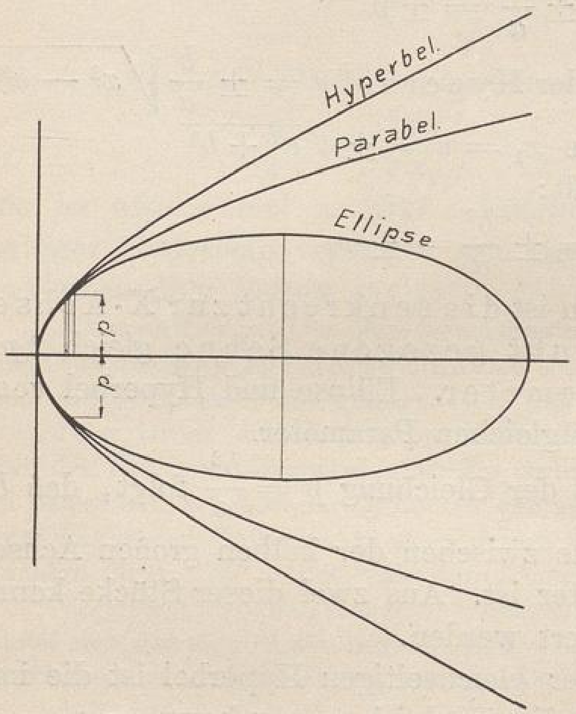

Fig. 63.

Bei der Ellipse wird also von dem Gliede $2\,p\,x$ ein zweites Glied $\frac{p}{a}\,x^2$ abgezogen, bei der Hyperbel aber ein gleich großes Glied hinzugezählt.

Bei den zwei Spezialfällen der gleichseitigen Kurven wird $a = b = p\ (= r)$, und wir erhalten folgende Scheitelgleichungen:

Kreis: $y^2 = 2\,p\,x - x^2$

Gleichseitige Hyperbel:

$$y^2 = 2\,p\,x + x^2$$

B e m e r k u n g: Setzen wir in der Scheitelgleichung der Ellipse $a = \infty$, so entsteht die Gleichung der Parabel. Die Parabel ist also gleichsam eine Ellipse mit unendlich großer Achse. —

Wenn in diesen Scheitelgleichungen die drei Kurven dieselben $p = \frac{b^2}{a}$ und a haben, so sind für eine bestimmte Abszisse x_1 die verschiedenen y_1 verschieden groß. Die Ordinate der Ellipse ist kleiner, die der Hyperbel größer als die der Parabel. In Fig. 63 sind diese drei Kurven gezeichnet, sie haben gleiches a, b und p.

Schnitte durch einen Kegel.

Unter einem „Kegel“ versteht man gewöhnlich einen geraden Kreiskegel, der dadurch entsteht, daß sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete dreht. Durch die Bewegung der Hypotenuse entsteht hierbei der Mantel des Kegels, und in jeder Lage bildet sie eine Seitenlinie desselben. War die Hypotenuse über die Spitze des Kegels hinaus verlängert, so entsteht bei der Drehung zugleich ein umgekehrter Kegel. Das Ganze nennt man dann einen Doppelkegel.

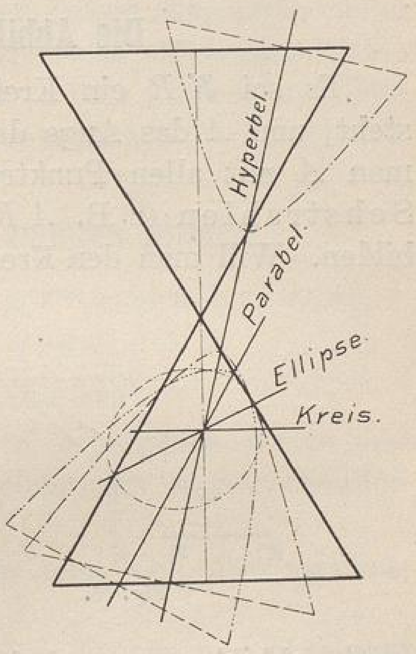

Fig. 64.

Die Grundfläche ist ein K r e i s und ebenso alle ihre parallelen Schnitte durch den Kegel, wie man sich am besten an einem Holzmodell klar macht.

Legen wir durch einen solchen kreisförmigen Schnitt zwei senkrecht zueinander stehende Durchmesser und drehen die Ebene des Kreises etwas um einen dieser Durchmesser, so ändert sich der andere Durchmesser; es entsteht dann eine neue Schnittfigur, eine E l l i p s e.

Dreht man die Schnittebene noch weiter, so wird der immer größer werdende Durchmesser in dem Moment unendlich, wo die Schnittebene einer Seitenlinie des Kegels parallel geht. Die Schnittfigur ist jetzt eine P a r a b e l.

Will man jetzt die Drehung noch weiter verfolgen, so muß man sich den Kegel zu einem Doppelkegel vervollständigen. Dreht man dann weiter, so entsteht auch oben eine Schnittfigur. Beide haben die gewölbten Seiten einander zugewandt, während die abgewandten Seiten offen sind; es sind die beiden Hälften einer H y p e r b e l.

In Fig. 64 sind diese drei Schnitte senkrecht zur Papierebene durch einen Doppelkegel geführt, erscheinen also als Gerade und sind dann in die Papierebene herumgeklappt, um sie zu zeigen.

Ein Schnitt durch einen Kegel liefert also einen Kreis, eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel. Diese Kurven heißen daher „Kegelschnitte“.

Die Abbildung des Kreises.

Es sei KR ein Kreis, der senkrecht zur Papierebene steht, und A das Auge des Beschauers (Fig. 65). Verbindet man A mit allen Punkten des Kreises, so erhält man die Sehstrahlen (z. B. AK und AR), die einen Kegelmantel bilden. Will man den Kreis auf einer Bildebene, z. B. auf

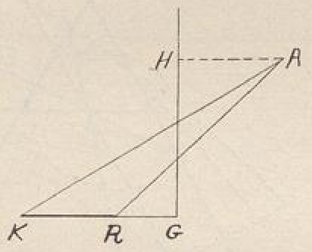

Fig. 65.

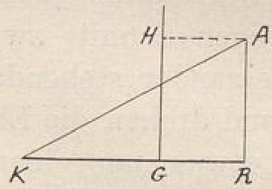

Fig. 66.

HG, abbilden, so erhält man als Bild den Schnitt dieser Bildebene mit dem Kegel.

Ist die Bildebene parallel zu KR, so erhält man als Bild einen Kreis. Dreht man die Bildebene um G rechts herum, so wird der Durchmesser KR verkürzt, man erhält eine Ellipse, deren kleinere Achse in der Papierebene liegt. Die Verkürzung ist am stärksten, wenn HG auf AK senkrecht steht. Dreht man weiter, so wird dieser in der Papierebene liegende Durchmesser wieder länger, bis man abermals einen Kreis erhält, wenn HG senkrecht zu KR steht. Dreht man noch weiter, so wird der in der Papierebene liegende Durchmesser weiter verlängert, und man erhält eine Ellipse, deren größere Achse in der Papierebene liegt.

Wenn die Bildebene HG lotrecht steht und der Kreis KR so groß ist, daß R senkrecht unter A liegt (Fig. 66), so fällt das Bild von R ins Unendliche, und man erhält als Bild auf der Bildebene HG eine Parabel.

Liegt der Kreis so, daß R noch weiter nach rechts fällt, so besteht das Bild aus zwei Ästen, und man erhält auf HG eine Hyperbel.

Befindet man sich z. B. in einem Zirkus oder unter einem Brückenbogen, so erscheinen die sichtbaren Stücke der Kreise als Bogen von Hyperbeln. Sie sind in dem Punkte, der dem Auge gegenüberliegt, am stärksten gekrümmt.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$x^2 + ax + by^2 + cy + dxy + e = 0$$

stellt stets einen Kegelschnitt dar.

Man gebe den Größen a, b, c, d, e beliebige Werte und zeichne die den entstandenen Gleichungen entsprechenden Kurven; es sind Kegelschnitte.

Auch auf folgende Weise kann man sich dies verdeutlichen:

Man verschiebe bei der Parabel, Ellipse und Hyperbel das Achsenkreuz parallel und leite die allgemeinen Gleichungen für diese Kegelschnitte ab.

Wenn h die horizontale und v die vertikale Verschiebung ist, so erhält man für den Kreis (Gleichung 10 und 10a):

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2vy + h^2 + v^2 - r^2 = 0$$

für die Parabel (Gleichung 20):

$$y^2 - 2px - 2vy + v^2 + 2ph = 0$$

Für die Ellipse bezw. Hyperbel erhält man in entsprechender Weise:

$$x^2b^2 \pm y^2a^2 - 2hb^2x \mp 2va^2y + h^2b^2 \pm v^2a^2 - a^2y^2 = 0.$$

Diese Gleichungen vergleiche man mit der bereits genannten allgemeinen Gleichung. Man bemerkt dabei folgendes:

Sind die Vorzahlen (Koeffizienten) von x^2 und y^2 gleich groß und von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so liegt die Gleichung eines Kreises vor.

Sind die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleich, aber von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so entspricht die Gleichung einer Ellipse.

Haben unter den eben genannten Umständen die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleiches Vorzeichen, so liegt die Gleichung einer Hyperbel vor. Sind diese Vorzahlen zwar entgegengesetzt, aber gleich, so stellt sie eine gleichseitige Hyperbel dar.

Fehlt ein Glied mit $x\,y$ und entweder x^2 oder y^2, so liegt die Gleichung einer Parabel vor.

Dreht man jetzt das Achsenkreuz dieser Kegelschnitte, so muß man Gleichung (12) in die Gleichungen derselben einsetzen und erhält dadurch das Glied mit $x\,y$ der allgemeinen Gleichung.

Wenn also in der gegebenen Gleichung das Glied mit $x\,y$ fehlt, so geht eine Achse des Kegelschnitts parallel zur X- oder Y-Achse; ist das Glied mit $x\,y$ vorhanden, so liegen die Achsen des Kegelschnitts geneigt zum Achsenkreuz.

Parabeln höherer Ordnung.

Der Verlauf der Parabeln höherer Ordnung.

Bei der gewöhnlichen Parabel verhalten sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten. Verhalten sich aber die Abszissen wie andere Potenzen der Ordinaten, so heißen die zugehörigen Kurven Parabeln höherer Ordnung. Die allgemeine Formel wäre $y^r = q\,x$.

Man zeichne die Kurven zu nebenstehenden Gleichungen. Man setze $q = 1$, gebe x verschiedene Werte und rechne die zugehörigen y aus. Die Abszissen werden dann wie früher auf der horizontalen Achse und die Ordinaten alsdann vertikal aufgetragen. Zusammengehörige Punkte bilden die betreffenden Parabeln.

$$y^1 = q \cdot x$$
$$y^{3/2} = q \cdot x$$
$$y^2 = q \cdot x$$
$$y^3 = q \cdot x$$
$$y^4 = q \cdot x$$
usw.