Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Der Parameter

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

so großes y; die flachere Kurve ist nur ein aufs Doppelte vergrößertes Stück der gewölbteren.

Die entsprechenden Stücke sind in der Figur hervorgehoben. Verbindet man entsprechende Punkte miteinander, so gehen die Verbindungslinien durch O. Dieser Achsenschnittpunkt ist der Ähnlichkeitspunkt.

Die Fläche der gewölbteren Kurve von x_1 bis x_2 ist

$$\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}.$$

Die entsprechende Fläche der flacheren Hyperbel von $2\,x_1$ bis $2\,x_2$ ist

$$\frac{4\,a^2}{2} \log \frac{2\,x_2}{2\,x_1} = 4\,\frac{a^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1}$$

sie ist also 4 mal so groß. Entsprechende Flächen gleichseitiger Hyperbeln verhalten sich demnach wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Anwendung: Die oben gezeichneten Hyperbeln stellen zugleich die Isothermen für verschiedene Temperaturen dar. Erhöht man die Temperatur eines Gases, ohne daß es sich ausdehnen kann, so steigt der Druck desselben proportional seiner absoluten Temperatur. Bei der flacheren Hyperbel sind die Ordinaten 4 mal so groß als die zu demselben x gehörigen Ordinaten der gewölbteren Hyperbel. Wenn letztere für den Gefrierpunkt ($t = 0^0$ und $T = 273^0$) gehört, so gilt die flachere für $4 \cdot 273^0 = 1092^0$ absolute Temperatur.

Vergleicht man die Flächen über denselben Abszissen miteinander, so findet man, daß sie sich wie die Ordinaten verhalten. Bei gleichem Volumen verhalten sich die Arbeiten der Isothermen wie die absoluten Temperaturen.

Verwandtschaft von Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Der Parameter.

Bei den betrachteten Kurven sind die im Brennpunkt errichteten Ordinaten y_1 bereits berechnet worden.

a) In die Gleichung der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ hatten wir die Abszisse des Brennpunktes $x_1 = \frac{p}{2}$ eingesetzt und erhielten:

$$y_1 = \pm\, p_p$$

b) In die Gleichung der **Ellipse** $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ setzten wir die Abszisse des Brennpunktes

$$x_1 = e = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ein}$$

und erhielten: $$y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)}$$

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = \pm p_e$$

c) In die Gleichung der **Hyperbel** $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ wird auf dieselbe Weise $x_1 = e = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ eingesetzt und man erhält:

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = \pm p_h$$

Bei allen drei Kurven ist **die senkrecht zur X-Achse durch den Brennpunkt gezogene Sehne** gleich $2p$, d. h. **gleich dem Parameter.** Ellipse und Hyperbel von gleichem a und b haben gleichen Parameter.

Bemerkung: Aus der Gleichung $p = \frac{b^2}{a}$ folgt, daß b die mittlere Proportionale zwischen der halben großen Achse und dem halben Parameter ist. Aus zwei dieser Stücke kann das dritte stets konstruiert werden.

Beim Kreise und der gleichseitigen Hyperbel ist die im Brennpunkt errichtete Ordinate gleich $p = r$ bezw. $= a$.

Die Scheitelgleichungen.

Die Scheitelgleichungen der bisher betrachteten Kurven hatten wir bereits — Gleichung (24), (28), (29) — festgestellt. Schreiben wir sie statt mit ξ und η mit x und y, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\text{Parabel: } y^2 = 2\,p\,x$$

$$\text{Ellipse: } y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

$$\text{Hyperbel: } y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2$$