Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Scheitelgleichung

b) In die Gleichung der **Ellipse** $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ setzten wir die Abszisse des Brennpunktes

$$x_1 = e = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ein}$$

und erhielten:
$$y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)}$$

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = \pm p_e$$

c) In die Gleichung der **Hyperbel** $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ wird auf dieselbe Weise $x_1 = e = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ eingesetzt und man erhält:

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{a} = \pm p_h$$

Bei allen drei Kurven ist **die senkrecht zur X-Achse durch den Brennpunkt gezogene Sehne** gleich $2p$, d. h. **gleich dem Parameter.** Ellipse und Hyperbel von gleichem a und b haben gleichen Parameter.

Bemerkung: Aus der Gleichung $p = \frac{b^2}{a}$ folgt, daß b die mittlere Proportionale zwischen der halben großen Achse und dem halben Parameter ist. Aus zwei dieser Stücke kann das dritte stets konstruiert werden.

Beim Kreise und der gleichseitigen Hyperbel ist die im Brennpunkt errichtete Ordinate gleich $p = r$ bezw. $= a$.

Die Scheitelgleichungen.

Die Scheitelgleichungen der bisher betrachteten Kurven hatten wir bereits — Gleichung (24), (28), (29) — festgestellt. Schreiben wir sie statt mit ξ und η mit x und y, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\text{Parabel: } y^2 = 2\,p\,x$$

$$\text{Ellipse: } y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

$$\text{Hyperbel: } y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

Um diese Formeln besser vergleichen zu können, setzen wir wieder $\frac{b^2}{a} = p$ und erhalten:

$$\text{Parabel: } y^2 = 2\,p\,x$$

$$\text{Ellipse: } y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2$$

$$\text{Hyperbel: } y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}\,x^2$$

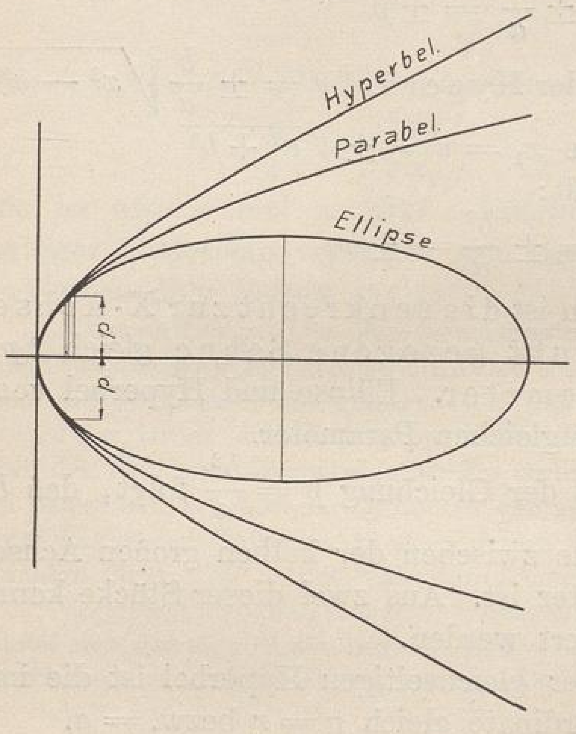

Fig. 63.

Bei der Ellipse wird also von dem Gliede $2\,p\,x$ ein zweites Glied $\frac{p}{a}\,x^2$ abgezogen, bei der Hyperbel aber ein gleich großes Glied hinzugezählt.

Bei den zwei Spezialfällen der gleichseitigen Kurven wird $a = b = p\ (= r)$, und wir erhalten folgende Scheitelgleichungen:

Kreis: $y^2 = 2\,p\,x - x^2$

Gleichseitige Hyperbel:

$$y^2 = 2\,p\,x + x^2$$

Bemerkung: Setzen wir in der Scheitelgleichung der Ellipse $a = \infty$, so entsteht die Gleichung der Parabel. Die Parabel ist also gleichsam eine Ellipse mit unendlich großer Achse. —

Wenn in diesen Scheitelgleichungen die drei Kurven dieselben $p = \frac{b^2}{a}$ und a haben, so sind für eine bestimmte Abszisse x_1 die verschiedenen y_1 verschieden groß. Die Ordinate der Ellipse ist kleiner, die der Hyperbel größer als die der Parabel. In Fig. 63 sind diese drei Kurven gezeichnet, sie haben gleiches a, b und p.