Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Wenn die Bildebene HG lotrecht steht und der Kreis KR so groß ist, daß R senkrecht unter A liegt (Fig. 66), so fällt das Bild von R ins Unendliche, und man erhält als Bild auf der Bildebene HG eine Parabel.

Liegt der Kreis so, daß R noch weiter nach rechts fällt, so besteht das Bild aus zwei Ästen, und man erhält auf HG eine Hyperbel.

Befindet man sich z. B. in einem Zirkus oder unter einem Brückenbogen, so erscheinen die sichtbaren Stücke der Kreise als Bogen von Hyperbeln. Sie sind in dem Punkte, der dem Auge gegenüberliegt, am stärksten gekrümmt.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$x^2 + ax + by^2 + cy + dxy + e = 0$$

stellt stets einen Kegelschnitt dar.

Man gebe den Größen a, b, c, d, e beliebige Werte und zeichne die den entstandenen Gleichungen entsprechenden Kurven; es sind Kegelschnitte.

Auch auf folgende Weise kann man sich dies verdeutlichen:

Man verschiebe bei der Parabel, Ellipse und Hyperbel das Achsenkreuz parallel und leite die allgemeinen Gleichungen für diese Kegelschnitte ab.

Wenn h die horizontale und v die vertikale Verschiebung ist, so erhält man für den Kreis (Gleichung 10 und 10a):

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2vy + h^2 + v^2 - r^2 = 0$$

für die Parabel (Gleichung 20):

$$y^2 - 2px - 2vy + v^2 + 2ph = 0$$

Für die Ellipse bezw. Hyperbel erhält man in entsprechender Weise:

$$x^2b^2 \pm y^2a^2 - 2hb^2x \mp 2va^2y + h^2b^2 \pm v^2a^2 - a^2y^2 = 0.$$

Diese Gleichungen vergleiche man mit der bereits genannten allgemeinen Gleichung. Man bemerkt dabei folgendes:

Sind die Vorzahlen (Koeffizienten) von x^2 und y^2 gleich groß und von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so liegt die Gleichung eines Kreises vor.

Sind die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleich, aber von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so entspricht die Gleichung einer Ellipse.

Haben unter den eben genannten Umständen die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleiches Vorzeichen, so liegt die Gleichung einer Hyperbel vor. Sind diese Vorzahlen zwar entgegengesetzt, aber gleich, so stellt sie eine gleichseitige Hyperbel dar.

Fehlt ein Glied mit $x\,y$ und entweder x^2 oder y^2, so liegt die Gleichung einer Parabel vor.

Dreht man jetzt das Achsenkreuz dieser Kegelschnitte, so muß man Gleichung (12) in die Gleichungen derselben einsetzen und erhält dadurch das Glied mit $x\,y$ der allgemeinen Gleichung.

Wenn also in der gegebenen Gleichung das Glied mit $x\,y$ fehlt, so geht eine Achse des Kegelschnitts parallel zur X- oder Y-Achse; ist das Glied mit $x\,y$ vorhanden, so liegen die Achsen des Kegelschnitts geneigt zum Achsenkreuz.

Parabeln höherer Ordnung.

Der Verlauf der Parabeln höherer Ordnung.

Bei der gewöhnlichen Parabel verhalten sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten. Verhalten sich aber die Abszissen wie andere Potenzen der Ordinaten, so heißen die zugehörigen Kurven Parabeln höherer Ordnung. Die allgemeine Formel wäre $y^r = q\,x$.

Man zeichne die Kurven zu nebenstehenden Gleichungen. Man setze $q = 1$, gebe x verschiedene Werte und rechne die zugehörigen y aus. Die Abszissen werden dann wie früher auf der horizontalen Achse und die Ordinaten alsdann vertikal aufgetragen. Zusammengehörige Punkte bilden die betreffenden Parabeln.

$$y^1 = q \cdot x$$
$$y^{3/2} = q \cdot x$$
$$y^2 = q \cdot x$$
$$y^3 = q \cdot x$$
$$y^4 = q \cdot x$$
usw.