UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Parabeln höherer Ordnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Visual Library

Sind die Vorzahlen (Koeffizienten) von x^2 und y^2 gleich groß und von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so liegt die Gleichung eines Kreises vor.

Sind die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleich, aber von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so entspricht die Gleichung einer Ellipse.

Haben unter den eben genannten Umständen die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleiches Vorzeichen, so liegt die Gleichung einer Hyperbel vor. Sind diese Vorzahlen zwar entgegengesetzt, aber gleich, so stellt sie eine gleichseitige Hyperbel dar.

Fehlt ein Glied mit $x\,y$ und entweder x^2 oder y^2, so liegt die Gleichung einer Parabel vor.

Dreht man jetzt das Achsenkreuz dieser Kegelschnitte, so muß man Gleichung (12) in die Gleichungen derselben einsetzen und erhält dadurch das Glied mit $x\,y$ der allgemeinen Gleichung.

Wenn also in der gegebenen Gleichung das Glied mit $x\,y$ fehlt, so geht eine Achse des Kegelschnitts parallel zur X- oder Y-Achse; ist das Glied mit $x\,y$ vorhanden, so liegen die Achsen des Kegelschnitts geneigt zum Achsenkreuz.

Parabeln höherer Ordnung.

Der Verlauf der Parabeln höherer Ordnung.

Bei der gewöhnlichen Parabel verhalten sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten. Verhalten sich aber die Abszissen wie andere Potenzen der Ordinaten, so heißen die zugehörigen Kurven Parabeln höherer Ordnung. Die allgemeine Formel wäre $y^r = q\,x$.

Man zeichne die Kurven zu nebenstehenden Gleichungen. Man setze $q = 1$, gebe x verschiedene Werte und rechne die zugehörigen y aus. Die Abszissen werden dann wie früher auf der horizontalen Achse und die Ordinaten alsdann vertikal aufgetragen. Zusammengehörige Punkte bilden die betreffenden Parabeln.

$$y^1 = q \cdot x$$
$$y^{3/2} = q \cdot x$$
$$y^2 = q \cdot x$$
$$y^3 = q \cdot x$$
$$y^4 = q \cdot x$$
usw.

Aus der Fig. 67 sieht man, daß die Parabeln gerader Ordnung symmetrisch zur X-Achse, und zwar auf der rechten Seite, liegen; zu jedem positiven x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte y, und für negative x werden die y imaginär. — Die Parabeln ungerader Ordnung aber, z. B. die kubische

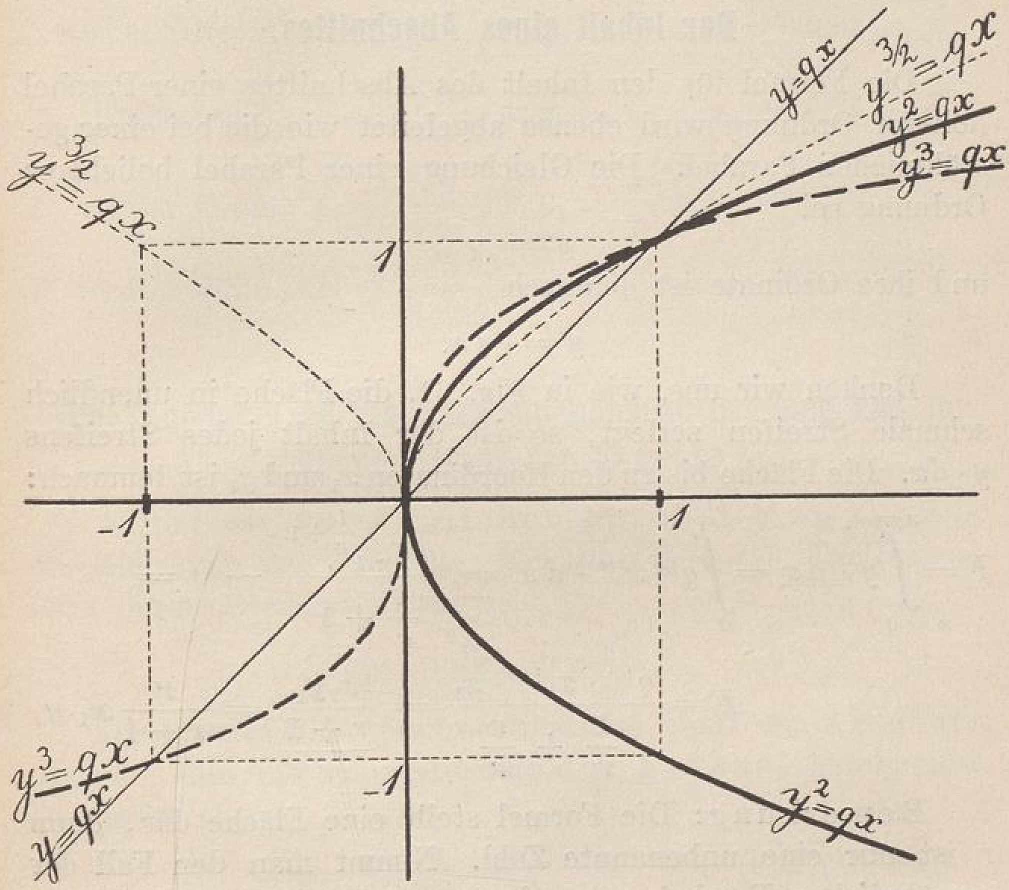

Fig. 67.

Parabel $y^3 = q\,x$, biegt auf die andere Seite der Y-Achse herüber, weil für negative x auch die y negativ werden und zu jedem x nur ein y gehört. — Die flachste der gezeichneten Parabeln ist die semikubische oder Neilsche Parabel $y^{\frac{3}{2}} = q \cdot x$. Sie liegt symmetrisch zur y-Achse.

Bei allen diesen Parabeln wächst mit jedem x auch y; sie bestehen also aus zwei Zügen, die sich ins Unendliche er-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

strecken. Sie treffen sich alle im Achsenschnittpunkt und im Schnittpunkt der Koordinaten $y = 1$ und $x = 1$, wenn $q = 1$ ist.

Je höher die Potenz von y ist, desto stärker ist die Krümmung der Parabel zwischen $x = 0$ und $x = 1$ bezw. $x = -1$ und desto flacher außerhalb dieser Punkte.

Der Inhalt eines Abschnittes.

Die Formel für den Inhalt des Abschnittes einer Parabel höherer Ordnung wird ebenso abgeleitet wie die bei einer gewöhnlichen Parabel. Die Gleichung einer Parabel beliebiger Ordnung sei

$$y^r = q\,x,$$

und ihre Ordinate ist demnach

$$y = \sqrt[r]{q\,x}.$$

Denken wir uns, wie in Fig. 61, die Fläche in unendlich schmale Streifen zerlegt, so ist der Inhalt jedes Streifens $y \cdot dx$. Die Fläche bis zu den Koordinaten x_1 und y_1 ist demnach:

$$F = \int_{x=0}^{x=x_1} y \cdot d\,x = \int_0^{x_1} q^{1/r} x^{1/r} \cdot d\,x = \frac{q^{1/r}\, x_1^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1} - 0 =$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{q^{1/r} \cdot x_1^{1/r} \cdot x_1}{\frac{1}{r} + \frac{r}{r}} = \frac{x_1 y_1}{\frac{r+1}{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r+1}}\,\boldsymbol{x_1\,y_1}$$

B e m e r k u n g: Die Formel stellt eine Fläche dar, denn r ist nur eine unbenannte Zahl. Nimmt man den Fall der gewöhnlichen Parabel, setzt also $r = 2$, so ist

$$F = \frac{2}{3}\,x_1\,y_1$$

Je höher die Potenz ist, desto mehr nähert sich der Inhalt des Abschnittes dem des umschließenden Rechtecks. In Fig. 67 sieht man dies sehr gut in dem Quadrat aus den Koordinaten 1 und 1. Man erhält der Reihe nach bei den in Fig. 67 gezeichneten Kurven für den Inhalt F folgende Werte:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\text{Gerade: } F = \frac{1}{1+1}\, x_1 y_1 = \frac{1}{2}\, x_1 y_1 = 0{,}50\; x_1 y_1$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Semikubische}\\ \text{Parabel}\end{array}\right\}: F = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1}\, x_1 y_1 = \frac{3}{5}\, x_1 y_1 = 0{,}60\; x_1 y_1$$

$$\text{Gewöhnliche P.: } F = \frac{2}{2+1}\, x_1 y_1 = \frac{2}{3}\, x_1 y_1 = 0{,}67\; x_1 y_1$$

$$\text{Kubische P.: } F = \frac{3}{3+1}\, x_1 y_1 = \frac{3}{4}\, x_1 y_1 = 0{,}75\; x_1 y_1$$

$$\text{P. vierter Ordn.: } F = \frac{4}{4+1}\, x_1 y_1 = \frac{4}{5}\, x_1 y_1 = 0{,}80\; x_1 y_1$$

$$\text{P. fünfter Ordn.: } F = \frac{5}{5+1}\, x_1 y_1 = \frac{5}{6}\, x_1 y_1 = 0{,}83\; x_1 y_1$$

Die Tangenten an die Parabeln höherer Ordnung und ihr Abschnitt auf der Y-Achse.

1. Bei der gewöhnlichen Parabel $y^2 = 2\,px$ ist die Gleichung der Tangente: $y y_1 = p\,(x + x_1)$. Die Normalform dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{p}{y_1} x + p\,\frac{x_1}{y_1}$$

Das zweite Glied der rechten Seite stellt den Abschnitt (n) dar, den die Tangente auf der Y-Achse abschneidet. Dieser ist also:

$$n = p\,\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1^{\,2}}{2\,y_1} = \frac{1}{2}\, y_1$$

Der Abschnitt auf der Y-Achse ist demnach halb so groß wie die Ordinate y_1 des Berührungspunktes.

2. Bei der kubischen Parabel $y^3 = q\,x$ erhalten wir durch Differenzieren $\frac{dy}{dx}\, 3\, y^2 = q$

Der Differentialquotient ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{3\,y^2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wie früher bei der Ableitung der Gleichung einer Tangente, setzen wir auch hier den Differentialquotient $\frac{p}{3\, y_1^2}$ als Steigung am Berührungspunkt in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung bekannt ist und die durch einen gegebenen Punkt, hier den Berührungspunkt, geht. Man erhält:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{q}{3\, y_1^2}$$

$$3\, y\, y_1^2 - 3\, y_1^3 = q\, x - q\, x_1$$

$$3\, y\, y_1^2 = q\, x + 2\, q\, x_1$$

$$y\, y_1^2 = q\, (\tfrac{1}{3}\, x + \tfrac{2}{3}\, x_1)$$

Dies ist die Gleichung der Tangente; wir bringen sie auf die Normalform: $y = \frac{q\, x}{3\, y_1^2} + \frac{2\, q\, x_1}{3\, y_1^2}$

Folglich ist $n = \frac{2\, q\, x_1}{3\, y_1^2} = \frac{2\, y_1^3}{3\, y_1^2} = \frac{2}{3}\, y_1$

Hier ist also der Abschnitt auf der Y-Achse gleich $\frac{2}{3}$ der Ordinate y_1 des Berührungspunktes. In der Gleichung aller Tangenten steht y immer in der ersten Potenz.

3. Bei einer Parabel beliebiger Ordnung $y^r = q\, x$ leitet man die Steigung wie oben ab und erhält als Differentialquotienten: $\frac{d\, y}{d\, x} = \frac{q}{r\, y_1^{r-1}}$

Die Gleichung der Tangente ist also: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{q}{r\, y_1^{r-1}}$

oder wie oben umgeformt $y\, y_1^{r-1} = q\left(\frac{1}{r}\, x + \frac{r-1}{r}\, x_1\right)$

Ihr Abschnitt auf der Y-Achse ist demnach:

$$n = \frac{r-1}{r}\, \frac{q\, x_1}{y^{r-1}} = \frac{r-1}{r}\, y_1$$

Zusammenstellung: Man erhält der Reihe nach für die zum Teil in Fig. 67 gezeichneten Kurven folgende Abschnitte auf der Y-Achse:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\text{Gerade Linie: } n = \frac{1-1}{1}\,y_1 = \qquad = 0$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Semikubische}\\ \text{Parabel}\end{array}\right\}: n = \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}}\,y_1 = \frac{1}{3}\,y_1 = 0{,}33\;y_1$$

$$\text{Gewöhnliche P.: } n = \frac{2-1}{2}\,y_1 = \frac{1}{2}\,y_1 = 0{,}5\;y_1$$

$$\text{Kubische P.: } n = \frac{3-1}{3}\,y_1 = \frac{2}{3}\,y_1 = 0{,}67\;y_1$$

$$\text{P. vierter Ordnung: } n = \frac{4-1}{4}\,y_1 = \frac{3}{4}\,y_1 = 0{,}75\;y_1$$

$$\text{P. fünfter Ordnung: } n = \frac{5-1}{5}\,y_1 = \frac{4}{5}\,y_1 = 0{,}80\;y_1$$

Konstruktion der kubischen und semikubischen Parabel.

1. Die Konstruktion der kubischen Parabel (Fig. 68) ähnelt derjenigen der gemeinen Parabel. Gegeben sei der Scheitel O, die Achse OX und ein beliebiger Punkt P der kubischen Parabel. Man ziehe PB parallel OX und OB senkrecht zu OX und teile die Strecken PB und OB in dieselbe Anzahl gleicher Teile (in der Zeichnung fünf Teile). Die Teilungspunkte sind a, b, c, d und 1, 2, 3, 4 genannt. Man schlägt über BP als Durchmesser den Halbkreis,

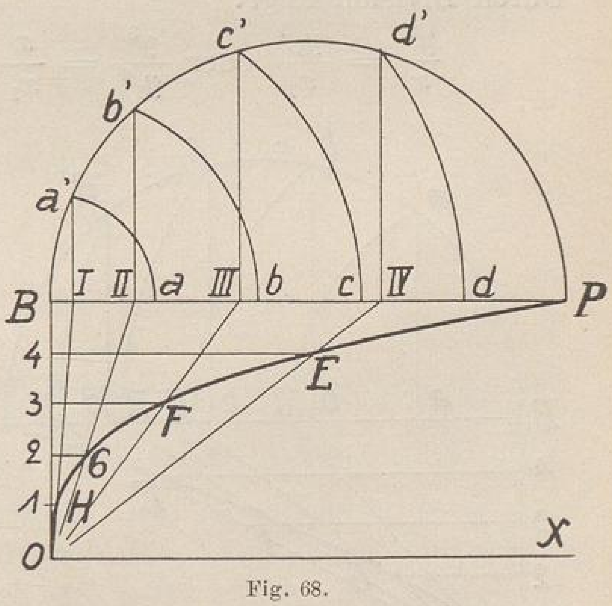

Fig. 68.

und um B als Mittelpunkt die Kreisbogen $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$. Dann fällt man die Lote $a'\,I$, $b'\,II$, $c'\,III$, $d'\,IV$ und verbindet

6*

die Fußpunkte I, II, III, IV mit O durch Strahlen. Zum Schluß zieht man durch 1, 2, 3, 4 Parallelen zu OX und erhält als Schnitte mit den Strahlen die Parabelpunkte $H\,G\,F\,E$.

B e w e i s: Es ist $\overline{F3} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,III}$

und $$\overline{BP}\cdot\overline{B\,III} = (\overline{Bc'})^2 = (\overline{Bc})^2 = \left(\frac{3}{5}\,\overline{BP}\right)^2$$

also $$\overline{B\,III} = \left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\overline{BP}$$

Oben eingesetzt gibt: $\overline{F3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\overline{BP}$

Außerdem ist aber $\overline{O3} = \frac{3}{5}\cdot\overline{OB}$

Die beiden letzten Gleichungen kann man auch schreiben:

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot x_1$$

$$y = \frac{3}{5}\cdot y_1 \text{ oder } y^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot {y_1}^3$$

Durch Division folgt:

$$\frac{y^3}{x} = \frac{{y_1}^3}{x_1} \text{ oder } \frac{y^3}{{y_1}^3} = \frac{x}{x_1} \text{ oder } y^3 = \frac{{y_1}^3}{x_1}\cdot x$$

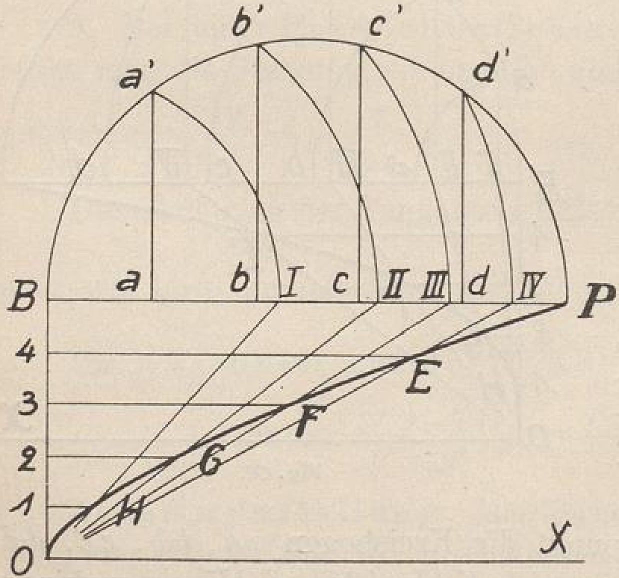

Fig. 69.

Dieses ist aber die Gleichung der kubischen Parabel, welche durch den Punkt P mit den Koordinaten x_1 und y_1 geht.

2. Die s e m i k u b i s c h e P a r a b e l (Fig. 69) wird wie folgt konstruiert. Gegeben sind wie oben OX und P. Man teilt auch hier die Strecke BP durch die Punkte a, b, c, d und die

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Strecke OB durch die Punkte 1, 2, 3, 4 in dieselbe Anzahl gleicher (in der Zeichnung fünf) Teile. Dann errichtet man die Lote $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$, schlägt um B die Kreisbogen $a'\,I$, $b'\,II$, $c'\,III$, $d'\,IV$, und zieht die Strahlen $O\,I$, $O\,II$, $O\,III$ und $O\,IV$. Die entsprechenden Schnittpunkte E, F, G und H dieser Strahlen mit den Parallelen durch 1, 2, 3 und 4 sind dann Punkte der semikubischen Parabel.

Beweis: Es ist $\overline{F\,3} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,III} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,c'}$

und $$(\overline{B\,c'})^2 = \overline{B\,c} \cdot \overline{B\,P} = \left(\frac{3}{5}\,\overline{B\,P}\right) \cdot \overline{BP}$$

also $$\overline{B\,c'} = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \overline{B\,P}$$

Oben eingesetzt gibt:

$$\overline{F\,3} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \overline{B\,P} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \overline{B\,P}$$

Außerdem ist noch $$\overline{O\,3} = \frac{3}{5} \cdot \overline{O\,B}$$

Die beiden letzten Gleichungen kann man auch schreiben:

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot x_1$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot y_1 \quad \text{oder} \quad y^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot y_1^{\frac{3}{2}}$$

Durch Division folgt:

$$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{x_1} \quad \text{oder} \quad y^{\frac{3}{2}} = \frac{y_1^{\frac{3}{2}}}{x_1} \cdot x$$

Dieses ist aber die Gleichung der semikubischen Parabel, welche durch den Punkt P mit den Koordinaten x_1 und y_1 geht.

Übung: Man zeichne die kubische und die semikubische Parabel durch den Punkt $x_1 = 8$; $y_1 = 6$ cm. Stelle ihre Gleichungen auf und berechne den Inhalt eines Abschnittes; man zeichne ihn, schätze und planimetriere ihn. Man stelle die Gleichung für die Tangente am Berührungspunkte $(x_1\,y_1)$ auf und berechne den Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse. Man zeichne ihn und messe ihn nach.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anwendungen: Die Form der verschiedenen Parabeln spielt eine nicht unbedeutende Rolle bei den Trägern gleicher Festigkeit, d. h. solchen auf Biegung beanspruchten Balken, Wellen oder Achsen, bei denen die Biegungsspannung über die ganze Länge des Trägers dieselbe sein soll. Die wichtigsten Arten der Träger gleicher Festigkeit sollen im Folgenden behandelt werden.

a) Balken von rechteckigem Querschnitt mit gleichbleibender Breite b und Einzellast P (Fig. 70). Für den Querschnitt im Abstand x vom rechten Auflager gilt nach den bekannten Bezeichnungen der Festigkeitslehre:

$$M_b = W \cdot k_b$$

oder

$$B \cdot x = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot x = \frac{b \cdot y^2}{6} \cdot k_b$$

In anderer Anordnung lautet die Gleichung:

$$y^2 = P \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b} \cdot x$$

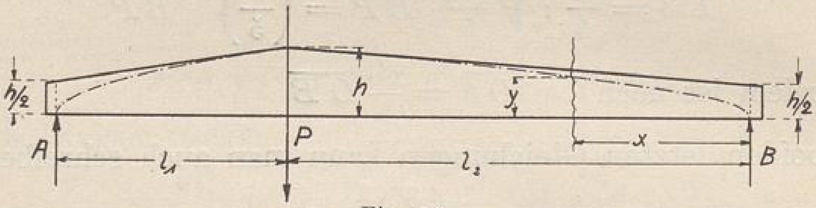

Fig. 70.

Für die linke Seite des Trägers würde sich ergeben:

$$y^2 = P \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b} \cdot x$$

Beide Gleichungen stellen gemeine Parabeln dar, wie sie in Fig. 70 gestrichelt eingezeichnet sind. An Hobelmaschinen- und Brückenträgern findet man vielfach die parabolische Form. Aus praktischen Gründen nimmt man häufig statt der Parabel die Tangente an sie im höchsten Punkt. Nach Seite 40 und 81 weiß man dann, daß die Balkenhöhe am Auflager $\frac{1}{2} h$ sein muß.

Die Höhe h des Balkens im Angriffspunkt der Last P findet man, indem man für x in eine der vorher gefundenen Gleichungen l_1 bzw. l_2 einsetzt.

Dann wird $\quad y_{max}^2 = h^2 = P \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b}$

b) Achse von kreisförmigem Querschnitt und Einzellast (Fig. 71).

Hier ist für den Querschnitt mit dem Abstand x vom Auflager:

$$B \cdot x = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot x = \frac{(2\,y)^3}{10} \cdot k_b = \frac{8}{10} y^3 \cdot k_b \; \left(\text{weil } \frac{\pi}{32} = \sim \frac{1}{10}\right)$$

Also ist: $$y^3 = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b} \cdot x$$

Für die linke Seite des Trägers würde sein:

$$y^3 = P \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b} \cdot x$$

Beide Gleichungen stellen kubische Parabeln dar, wie sie in die Fig. 71 eingestrichelt sind. In der Praxis ersetzt man die Parabel durch die

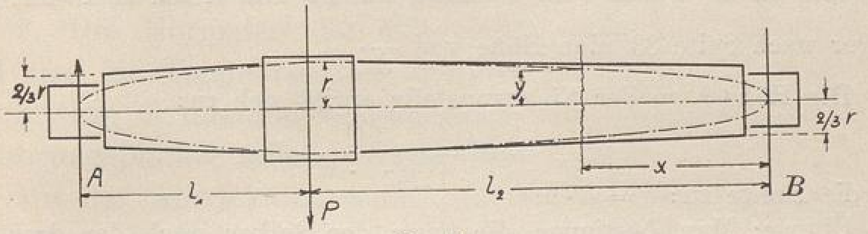

Fig. 71.

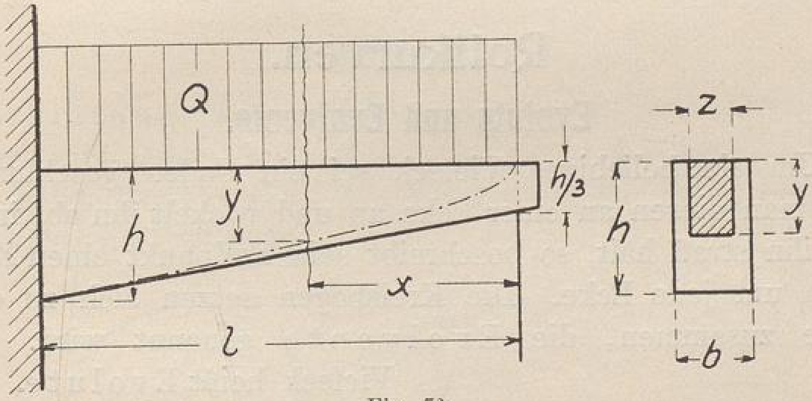

Fig. 72.

Tangente im höchsten Punkt. In den Auflagern hat diese nach Seite 82 den Abstand $\frac{2}{3}\, r$ von der Mitte.

Der Halbmesser r am Angriffspunkt der Last P ergibt sich wie oben zu: $$y_{max}{}^3 = r^3 = P \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b}$$

c) Freiträger mit gleichförmig verteilter Last und sich verjüngendem rechteckigen Querschnitt vom Seitenverhältnis $\frac{z}{y} = \alpha$ (Fig. 72).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Für den gezeichneten Querschnitt ist:

$$M_b = Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{z \cdot y^2}{6} \cdot k_b$$

Da nun aber $z = y \cdot \alpha$ ist, so folgt weiter:

$$Q \cdot \frac{x^2}{2\,l} \cdot \; = \frac{\alpha\, y^3}{6} \cdot k_b$$

oder

$$y^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot x^2$$

Dieses ist die Gleichung einer semikubischen Parabel.

Die angenäherte Form des Freiträgers ergibt sich durch die Tangente an die Parabel im höchsten Punkt. Am freien Ende hat der Träger nach Seite 83 eine Höhe von $\frac{h}{3}$.

Die Höhe h an der Einspannstelle ergibt sich zu:

$$y_{max}{}^3 = h^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot l^2$$

und die Breite zu: $b = \alpha \cdot h$.

Übung: Man bestimme die Form der Balken nach den drei besprochenen Formen für $P = Q = 1000$ kg, $l = 60$ cm und $k_b = 250$ kg/qcm.

Rollkurven.

Evolute und Evolvente.

Um ein beliebiges Vieleck sei ein Faden geschlungen. Faßt man diesen an einer Ecke an und wickelt ihn ab, indem man ihn straff hält, so beschreibt sein Endpunkt einen Kreisbogen um jede Ecke. Die Kreisbogen setzen sich zu einer Kurve zusammen, die Evolvente genannt wird. Das Vieleck heißt Evolute. Die Radien der Kreisbogen heißen Krümmungsradien, sie sind zugleich die Normalen der Evolvente.

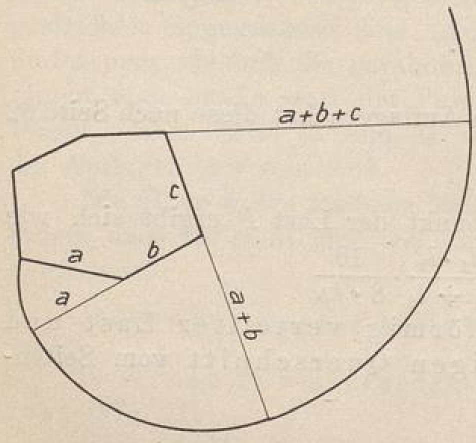

Fig. 73.

Aus der Fig. 73 gehen sofort folgende Sätze hervor:

1. Der Krümmungsradius der Evolvente ist gleich dem abgewickelten Stück der Evolute (z. B. gleich $a + b + c$).