Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Der Verlauf dieser Parabeln

Sind die Vorzahlen (Koeffizienten) von x^2 und y^2 gleich groß und von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so liegt die Gleichung eines Kreises vor.

Sind die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleich, aber von gleichem Vorzeichen, und fehlt ein Glied mit $x\,y$, so entspricht die Gleichung einer Ellipse.

Haben unter den eben genannten Umständen die Vorzahlen von x^2 und y^2 ungleiches Vorzeichen, so liegt die Gleichung einer Hyperbel vor. Sind diese Vorzahlen zwar entgegengesetzt, aber gleich, so stellt sie eine gleichseitige Hyperbel dar.

Fehlt ein Glied mit $x\,y$ und entweder x^2 oder y^2, so liegt die Gleichung einer Parabel vor.

Dreht man jetzt das Achsenkreuz dieser Kegelschnitte, so muß man Gleichung (12) in die Gleichungen derselben einsetzen und erhält dadurch das Glied mit $x\,y$ der allgemeinen Gleichung.

Wenn also in der gegebenen Gleichung das Glied mit $x\,y$ fehlt, so geht eine Achse des Kegelschnitts parallel zur X- oder Y-Achse; ist das Glied mit $x\,y$ vorhanden, so liegen die Achsen des Kegelschnitts geneigt zum Achsenkreuz.

Parabeln höherer Ordnung.

Der Verlauf der Parabeln höherer Ordnung.

Bei der gewöhnlichen Parabel verhalten sich die Abszissen wie die Quadrate der Ordinaten. Verhalten sich aber die Abszissen wie andere Potenzen der Ordinaten, so heißen die zugehörigen Kurven Parabeln höherer Ordnung. Die allgemeine Formel wäre $y^r = q\,x$.

Man zeichne die Kurven zu nebenstehenden Gleichungen. Man setze $q = 1$, gebe x verschiedene Werte und rechne die zugehörigen y aus. Die Abszissen werden dann wie früher auf der horizontalen Achse und die Ordinaten alsdann vertikal aufgetragen. Zusammengehörige Punkte bilden die betreffenden Parabeln.

$$y^1 = q \cdot x$$
$$y^{3/2} = q \cdot x$$
$$y^2 = q \cdot x$$
$$y^3 = q \cdot x$$
$$y^4 = q \cdot x$$
usw.

Aus der Fig. 67 sieht man, daß die Parabeln gerader Ordnung symmetrisch zur X-Achse, und zwar auf der rechten Seite, liegen; zu jedem positiven x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte y, und für negative x werden die y imaginär. — Die Parabeln ungerader Ordnung aber, z. B. die kubische

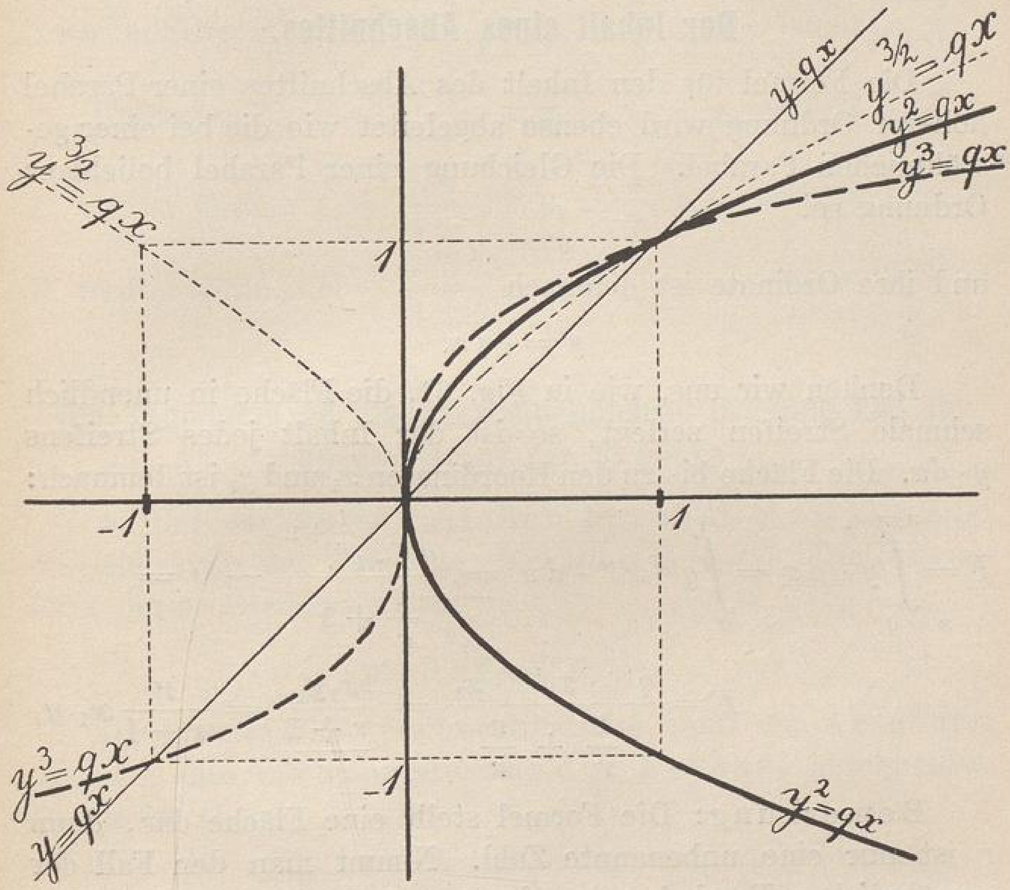

Fig. 67.

Parabel $y^3 = q\,x$, biegt auf die andere Seite der Y-Achse herüber, weil für negative x auch die y negativ werden und zu jedem x nur ein y gehört. — Die flachste der gezeichneten Parabeln ist die semikubische oder Neilsche Parabel $y^{\frac{3}{2}} = q \cdot x$. Sie liegt symmetrisch zur y-Achse.

Bei allen diesen Parabeln wächst mit jedem x auch y; sie bestehen also aus zwei Zügen, die sich ins Unendliche erstrecken. Sie treffen sich alle im Achsenschnittpunkt und im Schnittpunkt der Koordinaten $y = 1$ und $x = 1$, wenn $q = 1$ ist.

Je höher die Potenz von y ist, desto stärker ist die Krümmung der Parabel zwischen $x = 0$ und $x = 1$ bezw. $x = -1$ und desto flacher außerhalb dieser Punkte.

Der Inhalt eines Abschnittes.

Die Formel für den Inhalt des Abschnittes einer Parabel höherer Ordnung wird ebenso abgeleitet wie die bei einer gewöhnlichen Parabel. Die Gleichung einer Parabel beliebiger Ordnung sei

$$y^r = q\,x,$$

und ihre Ordinate ist demnach

$$y = \sqrt[r]{q\,x}.$$

Denken wir uns, wie in Fig. 61, die Fläche in unendlich schmale Streifen zerlegt, so ist der Inhalt jedes Streifens $y \cdot dx$. Die Fläche bis zu den Koordinaten x_1 und y_1 ist demnach:

$$F = \int\limits_{x=0}^{x=x_1} y \cdot d\,x = \int\limits_0^{x_1} q^{1/r} x^{1/r} \cdot d\,x = \frac{q^{1/r}\,x_1^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1} - 0 =$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{q^{1/r} \cdot x_1^{\ 1/r} \cdot x_1}{\frac{1}{r} + \frac{r}{r}} = \frac{x_1 y_1}{\frac{r+1}{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r+1}}\,\boldsymbol{x_1\,y_1}$$

B e m e r k u n g: Die Formel stellt eine Fläche dar, denn r ist nur eine unbenannte Zahl. Nimmt man den Fall der gewöhnlichen Parabel, setzt also $r = 2$, so ist

$$F = \frac{2}{3}\,x_1\,y_1$$

Je höher die Potenz ist, desto mehr nähert sich der Inhalt des Abschnittes dem des umschließenden Rechtecks. In Fig. 67 sieht man dies sehr gut in dem Quadrat aus den Koordinaten 1 und 1. Man erhält der Reihe nach bei den in Fig. 67 gezeichneten Kurven für den Inhalt F folgende Werte: