Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Der Inhalt eines Abschnittes

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

strecken. Sie treffen sich alle im Achsenschnittpunkt und im Schnittpunkt der Koordinaten $y = 1$ und $x = 1$, wenn $q = 1$ ist.

Je höher die Potenz von y ist, desto stärker ist die Krümmung der Parabel zwischen $x = 0$ und $x = 1$ bezw. $x = -1$ und desto flacher außerhalb dieser Punkte.

Der Inhalt eines Abschnittes.

Die Formel für den Inhalt des Abschnittes einer Parabel höherer Ordnung wird ebenso abgeleitet wie die bei einer gewöhnlichen Parabel. Die Gleichung einer Parabel beliebiger Ordnung sei

$$y^r = q\,x,$$

und ihre Ordinate ist demnach

$$y = \sqrt[r]{q\,x}.$$

Denken wir uns, wie in Fig. 61, die Fläche in unendlich schmale Streifen zerlegt, so ist der Inhalt jedes Streifens $y \cdot dx$. Die Fläche bis zu den Koordinaten x_1 und y_1 ist demnach:

$$F = \int_{x=0}^{x=x_1} y \cdot d\,x = \int_0^{x_1} q^{1/r} x^{1/r} \cdot d\,x = \frac{q^{1/r}\, x_1^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1} - 0 =$$

$$F = \frac{q^{1/r} \cdot x_1^{1/r} \cdot x_1}{\frac{1}{r} + \frac{r}{r}} = \frac{x_1 y_1}{\frac{r+1}{r}} = \frac{r}{r+1}\, x_1\, y_1$$

Bemerkung: Die Formel stellt eine Fläche dar, denn r ist nur eine unbenannte Zahl. Nimmt man den Fall der gewöhnlichen Parabel, setzt also $r = 2$, so ist

$$F = \frac{2}{3}\, x_1\, y_1$$

Je höher die Potenz ist, desto mehr nähert sich der Inhalt des Abschnittes dem des umschließenden Rechtecks. In Fig. 67 sieht man dies sehr gut in dem Quadrat aus den Koordinaten 1 und 1. Man erhält der Reihe nach bei den in Fig. 67 gezeichneten Kurven für den Inhalt F folgende Werte:

$$\text{Gerade: } F = \frac{1}{1+1} x_1 y_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1 = 0{,}50\, x_1 y_1$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Semikubische}\\ \text{Parabel}\end{array}\right\}: F = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1} x_1 y_1 = \frac{3}{5} x_1 y_1 = 0{,}60\, x_1 y_1$$

$$\text{Gewöhnliche P.: } F = \frac{2}{2+1} x_1 y_1 = \frac{2}{3} x_1 y_1 = 0{,}67\, x_1 y_1$$

$$\text{Kubische P.: } F = \frac{3}{3+1} x_1 y_1 = \frac{3}{4} x_1 y_1 = 0{,}75\, x_1 y_1$$

$$\text{P. vierter Ordn.: } F = \frac{4}{4+1} x_1 y_1 = \frac{4}{5} x_1 y_1 = 0{,}80\, x_1 y_1$$

$$\text{P. fünfter Ordn.: } F = \frac{5}{5+1} x_1 y_1 = \frac{5}{6} x_1 y_1 = 0{,}83\, x_1 y_1$$

Die Tangenten an die Parabeln höherer Ordnung und ihr Abschnitt auf der Y-Achse.

1. Bei der gewöhnlichen Parabel $y^2 = 2\,px$ ist die Gleichung der Tangente: $y y_1 = p\,(x + x_1)$. Die Normalform dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{p}{y_1} x + p\,\frac{x_1}{y_1}$$

Das zweite Glied der rechten Seite stellt den Abschnitt (n) dar, den die Tangente auf der Y-Achse abschneidet. Dieser ist also:

$$n = p\,\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1^{\,2}}{2\,y_1} = \frac{1}{2}\,y_1$$

Der Abschnitt auf der Y-Achse ist demnach halb so groß wie die Ordinate y_1 des Berührungspunktes.

2. Bei der kubischen Parabel $y^3 = q\,x$ erhalten wir durch Differenzieren $\frac{dy}{dx}\, 3\,y^2 = q$

Der Differentialquotient ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{3\,y^2}$$