Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Tangenten

$$\text{Gerade: } F = \frac{1}{1+1} x_1 y_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1 = 0{,}50\ x_1 y_1$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Semikubische}\\ \text{Parabel}\end{array}\right\}: F = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1} x_1 y_1 = \frac{3}{5} x_1 y_1 = 0{,}60\ x_1 y_1$$

$$\text{Gewöhnliche P.: } F = \frac{2}{2+1} x_1 y_1 = \frac{2}{3} x_1 y_1 = 0{,}67\ x_1 y_1$$

$$\text{Kubische P.: } F = \frac{3}{3+1} x_1 y_1 = \frac{3}{4} x_1 y_1 = 0{,}75\ x_1 y_1$$

$$\text{P. vierter Ordn.: } F = \frac{4}{4+1} x_1 y_1 = \frac{4}{5} x_1 y_1 = 0{,}80\ x_1 y_1$$

$$\text{P. fünfter Ordn.: } F = \frac{5}{5+1} x_1 y_1 = \frac{5}{6} x_1 y_1 = 0{,}83\ x_1 y_1$$

Die Tangenten an die Parabeln höherer Ordnung und ihr Abschnitt auf der Y-Achse.

1. Bei der gewöhnlichen Parabel $y^2 = 2\,px$ ist die Gleichung der Tangente: $y y_1 = p\,(x + x_1)$. Die Normalform dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{p}{y_1} x + p \frac{x_1}{y_1}$$

Das zweite Glied der rechten Seite stellt den Abschnitt (n) dar, den die Tangente auf der Y-Achse abschneidet. Dieser ist also:

$$n = p \frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1^{\,2}}{2\,y_1} = \frac{1}{2} y_1$$

Der Abschnitt auf der Y-Achse ist demnach halb so groß wie die Ordinate y_1 des Berührungspunktes.

2. Bei der kubischen Parabel $y^3 = q\,x$ erhalten wir durch Differenzieren $\frac{dy}{dx}\, 3\,y^2 = q$

Der Differentialquotient ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{3\,y^2}$$

Wie früher bei der Ableitung der Gleichung einer Tangente, setzen wir auch hier den Differentialquotient $\frac{p}{3\,y_1^2}$ als Steigung am Berührungspunkt in die Gleichung (4) einer Geraden ein, deren Steigung bekannt ist und die durch einen gegebenen Punkt, hier den Berührungspunkt, geht. Man erhält:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{q}{3\,y_1^2}$$

$$3\,y\,y_1^2 - 3\,y_1^3 = q\,x - q\,x_1$$

$$3\,y\,y_1^2 = q\,x + 2\,q\,x_1$$

$$y\,y_1^2 = q\left(\tfrac{1}{3}\,x + \tfrac{2}{3}\,x_1\right)$$

Dies ist die Gleichung der Tangente; wir bringen sie auf die Normalform: $y = \frac{q\,x}{3\,y_1^2} + \frac{2\,q\,x_1}{3\,y_1^2}$

Folglich ist $n = \frac{2\,q\,x_1}{3\,y_1^2} = \frac{2\,y_1^3}{3\,y_1^2} = \frac{2}{3}\,y_1$

Hier ist also der Abschnitt auf der Y-Achse gleich $\frac{2}{3}$ der Ordinate y_1 des Berührungspunktes. In der Gleichung aller Tangenten steht y immer in der ersten Potenz.

3. Bei einer Parabel beliebiger Ordnung $y^r = q\,x$ leitet man die Steigung wie oben ab und erhält als Differentialquotienten: $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{q}{r\,y_1^{r-1}}$

Die Gleichung der Tangente ist also: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{q}{r\,y_1^{r-1}}$

oder wie oben umgeformt $y\,y_1^{r-1} = q\left(\frac{1}{r}\,x + \frac{r-1}{r}\,x_1\right)$

Ihr Abschnitt auf der Y-Achse ist demnach:

$$n = \frac{r-1}{r}\,\frac{q\,x_1}{y^{r-1}} = \frac{r-1}{r}\,y_1$$

Zusammenstellung: Man erhält der Reihe nach für die zum Teil in Fig. 67 gezeichneten Kurven folgende Abschnitte auf der Y-Achse:

$$\text{Gerade Linie: } n = \frac{1-1}{1}\, y_1 = \quad = 0$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Semikubische}\\ \text{Parabel}\end{array}\right\}: n = \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}}\, y_1 = \frac{1}{3}\, y_1 = 0{,}33\, y_1$$

$$\text{Gewöhnliche P.: } n = \frac{2-1}{2}\, y_1 = \frac{1}{2}\, y_1 = 0{,}5\, y_1$$

$$\text{Kubische P.: } n = \frac{3-1}{3}\, y_1 = \frac{2}{3}\, y_1 = 0{,}67\, y_1$$

$$\text{P. vierter Ordnung: } n = \frac{4-1}{4}\, y_1 = \frac{3}{4}\, y_1 = 0{,}75\, y_1$$

$$\text{P. fünfter Ordnung: } n = \frac{5-1}{5}\, y_1 = \frac{4}{5}\, y_1 = 0{,}80\, y_1$$

Konstruktion der kubischen und semikubischen Parabel.

1. Die Konstruktion der kubischen Parabel (Fig. 68) ähnelt derjenigen der gemeinen Parabel. Gegeben sei der Scheitel O, die Achse OX und ein beliebiger Punkt P der kubischen Parabel. Man ziehe PB parallel OX und OB senkrecht zu OX und teile die Strecken PB und OB in dieselbe Anzahl gleicher Teile (in der Zeichnung fünf Teile). Die Teilungspunkte sind a, b, c, d und 1, 2, 3, 4 genannt. Man schlägt über BP als Durchmesser den Halbkreis, und um B als Mittelpunkt die Kreisbogen $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$. Dann fällt man die Lote $a'\,I$, $b'\,II$, $c'\,III$, $d'\,IV$ und verbindet

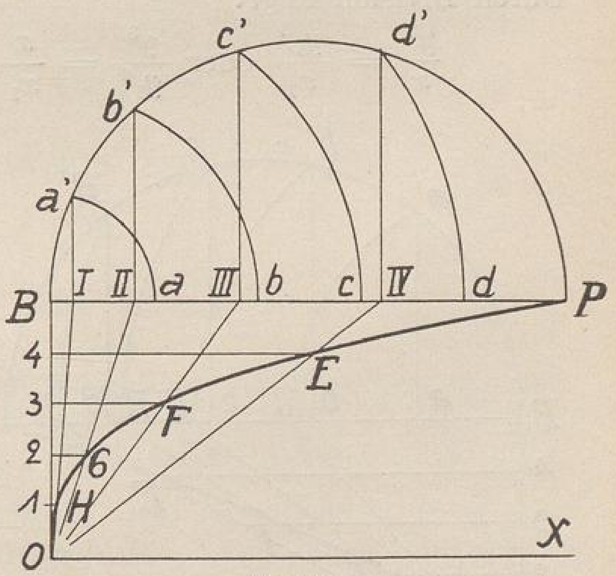

Fig. 68.