Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Konstruktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

$$\text{Gerade Linie: } n = \frac{1-1}{1}\, y_1 = \qquad = 0$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Semikubische}\\ \text{Parabel}\end{array}\right\}\text{: } n = \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}}\, y_1 = \frac{1}{3}\, y_1 = 0{,}33\; y_1$$

$$\text{Gewöhnliche P.: } n = \frac{2-1}{2}\, y_1 = \frac{1}{2}\, y_1 = 0{,}5\; y_1$$

$$\text{Kubische P.: } n = \frac{3-1}{3}\, y_1 = \frac{2}{3}\, y_1 = 0{,}67\; y_1$$

$$\text{P. vierter Ordnung: } n = \frac{4-1}{4}\, y_1 = \frac{3}{4}\, y_1 = 0{,}75\; y_1$$

$$\text{P. fünfter Ordnung: } n = \frac{5-1}{5}\, y_1 = \frac{4}{5}\, y_1 = 0{,}80\; y_1$$

Konstruktion der kubischen und semikubischen Parabel.

1. Die Konstruktion der kubischen Parabel (Fig. 68) ähnelt derjenigen der gemeinen Parabel. Gegeben sei der Scheitel O, die Achse OX und ein beliebiger Punkt P der kubischen Parabel. Man ziehe PB parallel OX und OB senkrecht zu OX und teile die Strecken PB und OB in dieselbe Anzahl gleicher Teile (in der Zeichnung fünf Teile). Die Teilungspunkte sind a, b, c, d und 1, 2, 3, 4 genannt. Man schlägt über BP als Durchmesser den Halbkreis,

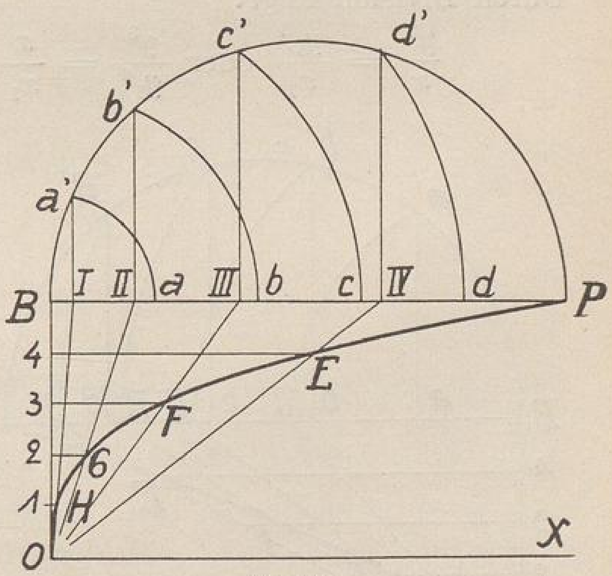

Fig. 68.

und um B als Mittelpunkt die Kreisbogen $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$. Dann fällt man die Lote $a'\,I$, $b'\,II$, $c'\,III$, $d'\,IV$ und verbindet die Fußpunkte I, II, III, IV mit O durch Strahlen. Zum Schluß zieht man durch 1, 2, 3, 4 Parallelen zu OX und erhält als Schnitte mit den Strahlen die Parabelpunkte $H\,G\,F\,E$.

Beweis: Es ist $\overline{F3} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,III}$

und $\overline{BP} \cdot \overline{B\,III} = (\overline{Bc'})^2 = (\overline{Bc})^2 = \left(\frac{3}{5}\,\overline{BP}\right)^2$

also $\overline{B\,III} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \overline{BP}$

Oben eingesetzt gibt: $\overline{F3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \overline{BP}$

Außerdem ist aber $\overline{O3} = \frac{3}{5} \cdot \overline{OB}$

Die beiden letzten Gleichungen kann man auch schreiben:

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot x_1$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot y_1 \text{ oder } y^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot y_1{}^3$$

Durch Division folgt:

$$\frac{y^3}{x} = \frac{y_1{}^3}{x_1} \text{ oder } \frac{y^3}{y_1{}^3} = \frac{x}{x_1} \text{ oder } y^3 = \frac{y_1{}^3}{x_1} \cdot x$$

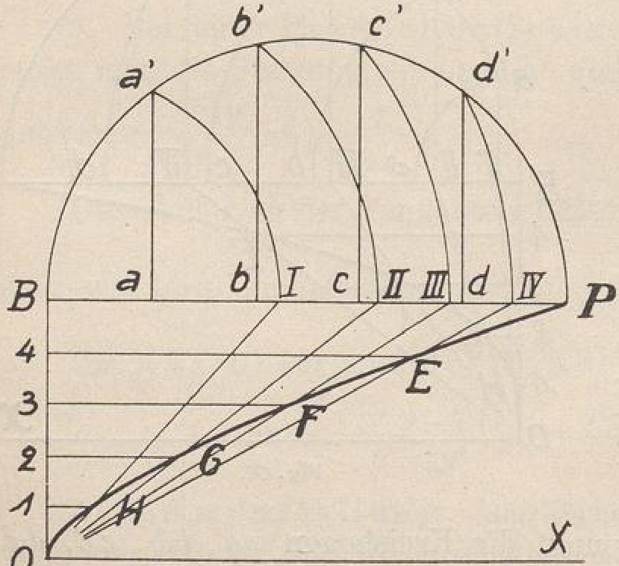

Fig. 69.

Dieses ist aber die Gleichung der kubischen Parabel, welche durch den Punkt P mit den Koordinaten x_1 und y_1 geht.

2. Die semikubische Parabel (Fig. 69) wird wie folgt konstruiert. Gegeben sind wie oben OX und P. Man teilt auch hier die Strecke BP durch die Punkte a, b, c, d und die

Strecke OB durch die Punkte 1, 2, 3, 4 in dieselbe Anzahl gleicher (in der Zeichnung fünf) Teile. Dann errichtet man die Lote $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$, schlägt um B die Kreisbogen $a'I$, $b'II$, $c'III$, $d'IV$, und zieht die Strahlen $O\,I$, $O\,II$, $O\,III$ und $O\,IV$. Die entsprechenden Schnittpunkte E, F, G und H dieser Strahlen mit den Parallelen durch 1, 2, 3 und 4 sind dann Punkte der semikubischen Parabel.

Beweis: Es ist $\overline{F\,3} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,III} = \frac{3}{5}\,\overline{B\,c'}$

und $$(\overline{B\,c'})^2 = \overline{B\,c} \cdot \overline{B\,P} = \left(\frac{3}{5}\,\overline{B\,P}\right) \cdot \overline{BP}$$

also $$\overline{B\,c'} = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \overline{B\,P}$$

Oben eingesetzt gibt:

$$\overline{F\,3} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \overline{B\,P} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \overline{B\,P}$$

Außerdem ist noch $\overline{O\,3} = \frac{3}{5} \cdot \overline{O\,B}$

Die beiden letzten Gleichungen kann man auch schreiben:

$$x = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot x_1$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot y_1 \text{ oder } y^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot y_1^{\frac{3}{2}}$$

Durch Division folgt:

$$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{x_1} \text{ oder } y^{\frac{3}{2}} = \frac{y_1^{\frac{3}{2}}}{x_1} \cdot x$$

Dieses ist aber die Gleichung der semikubischen Parabel, welche durch den Punkt P mit den Koordinaten x_1 und y_1 geht.

Übung: Man zeichne die kubische und die semikubische Parabel durch den Punkt $x_1 = 8$; $y_1 = 6$ cm. Stelle ihre Gleichungen auf und berechne den Inhalt eines Abschnittes; man zeichne ihn, schätze und planimetriere ihn. Man stelle die Gleichung für die Tangente am Berührungspunkte $(x_1\,y_1)$ auf und berechne den Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse. Man zeichne ihn und messe ihn nach.

Anwendungen: Die Form der verschiedenen Parabeln spielt eine nicht unbedeutende Rolle bei den Trägern gleicher Festigkeit, d. h. solchen auf Biegung beanspruchten Balken, Wellen oder Achsen, bei denen die Biegungsspannung über die ganze Länge des Trägers dieselbe sein soll. Die wichtigsten Arten der Träger gleicher Festigkeit sollen im Folgenden behandelt werden.

a) Balken von rechteckigem Querschnitt mit gleichbleibender Breite b und Einzellast P (Fig. 70). Für den Querschnitt im Abstand x vom rechten Auflager gilt nach den bekannten Bezeichnungen der Festigkeitslehre:

$$M_b = W \cdot k_b$$

oder
$$B \cdot x = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot x = \frac{b \cdot y^2}{6} \cdot k_b$$

In anderer Anordnung lautet die Gleichung:

$$y^2 = P \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b} \cdot x$$

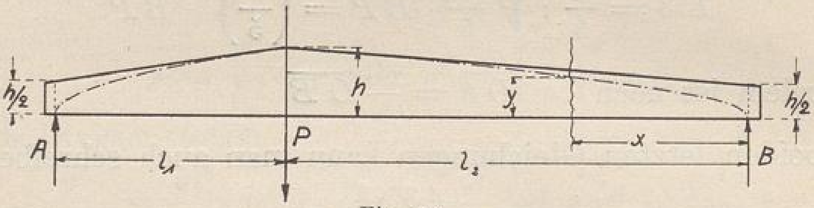

Fig. 70.

Für die linke Seite des Trägers würde sich ergeben:

$$y^2 = P \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b} \cdot x$$

Beide Gleichungen stellen gemeine Parabeln dar, wie sie in Fig. 70 gestrichelt eingezeichnet sind. An Hobelmaschinen- und Brückenträgern findet man vielfach die parabolische Form. Aus praktischen Gründen nimmt man häufig statt der Parabel die Tangente an sie im höchsten Punkt. Nach Seite 40 und 81 weiß man dann, daß die Balkenhöhe am Auflager $\frac{1}{2} h$ sein muß.

Die Höhe h des Balkens im Angriffspunkt der Last P findet man, indem man für x in eine der vorher gefundenen Gleichungen l_1 bzw. l_2 einsetzt.

Dann wird $$y_{max}^2 = h^2 = P \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{6}{b \cdot k_b}$$

b) Achse von kreisförmigem Querschnitt und Einzellast (Fig. 71).

Hier ist für den Querschnitt mit dem Abstand x vom Auflager:

$$B \cdot x = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot x = \frac{(2\,y)^3}{10} \cdot k_b = \frac{8}{10}\, y^3 \cdot k_b \;\left(\text{weil } \frac{\pi}{32} = \sim \frac{1}{10}\right)$$

Also ist: $$y^3 = P \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b} \cdot x$$

Für die linke Seite des Trägers würde sein:

$$y^3 = P \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b} \cdot x$$

Beide Gleichungen stellen kubische Parabeln dar, wie sie in die Fig. 71 eingestrichelt sind. In der Praxis ersetzt man die Parabel durch die

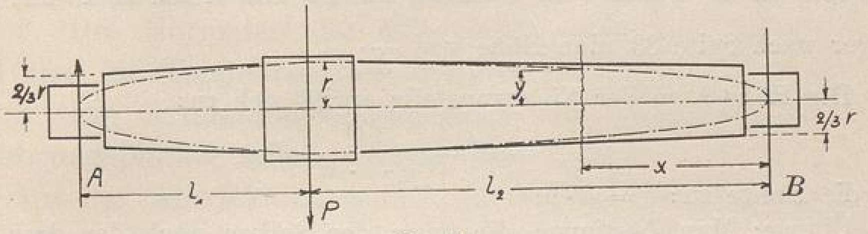

Fig. 71.

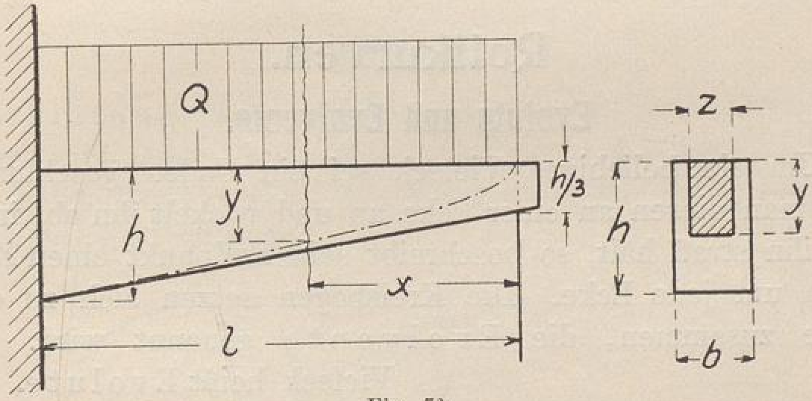

Fig. 72.

Tangente im höchsten Punkt. In den Auflagern hat diese nach Seite 82 den Abstand $\frac{2}{3}\,r$ von der Mitte.

Der Halbmesser r am Angriffspunkt der Last P ergibt sich wie oben zu: $$y_{max}{}^3 = r^3 = P \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{10}{8 \cdot k_b}$$

c) Freiträger mit gleichförmig verteilter Last und sich verjüngendem rechteckigen Querschnitt vom Seitenverhältnis $\frac{z}{y} = \alpha$ (Fig. 72).

Für den gezeichneten Querschnitt ist:

$$M_b = Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{z \cdot y^2}{6} \cdot k_b$$

Da nun aber $z = y \cdot \alpha$ ist, so folgt weiter:

$$Q \cdot \frac{x^2}{2\,l} \cdot \;= \frac{\alpha\, y^3}{6} \cdot k_b$$

oder

$$y^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot x^2$$

Dieses ist die Gleichung einer semikubischen Parabel.

Die angenäherte Form des Freiträgers ergibt sich durch die Tangente an die Parabel im höchsten Punkt. Am freien Ende hat der Träger nach Seite 83 eine Höhe von $\frac{h}{3}$.

Die Höhe h an der Einspannstelle ergibt sich zu:

$$y_{max}{}^3 = h^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot l^2$$

und die Breite zu: $b = \alpha \cdot h$.

Übung: Man bestimme die Form der Balken nach den drei besprochenen Formen für $P = Q = 1000$ kg, $l = 60$ cm und $k_b = 250$ kg/qcm.

Rollkurven.

Evolute und Evolvente.

Um ein beliebiges Vieleck sei ein Faden geschlungen. Faßt man diesen an einer Ecke an und wickelt ihn ab, indem man ihn straff hält, so beschreibt sein Endpunkt einen Kreisbogen um jede Ecke. Die Kreisbogen setzen sich zu einer Kurve zusammen, die Evolvente genannt wird. Das Vieleck heißt Evolute. Die Radien der Kreisbogen heißen Krümmungsradien, sie sind zugleich die Normalen der Evolvente.

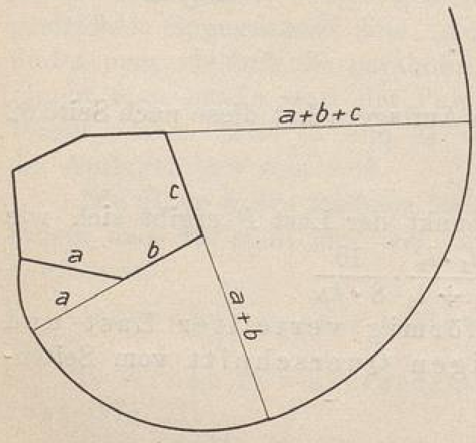

Fig. 73.

Aus der Fig. 73 gehen sofort folgende Sätze hervor:

1. Der Krümmungsradius der Evolvente ist gleich dem abgewickelten Stück der Evolute (z. B. gleich $a + b + c$).