Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Rollkurven.

Für den gezeichneten Querschnitt ist:

$$M_b = Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{z \cdot y^2}{6} \cdot k_b$$

Da nun aber $z = y \cdot \alpha$ ist, so folgt weiter:

$$Q \cdot \frac{x^2}{2\,l} \cdot \; = \frac{\alpha\, y^3}{6} \cdot k_b$$

oder

$$y^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot x^2$$

Dieses ist die Gleichung einer semikubischen Parabel.

Die angenäherte Form des Freiträgers ergibt sich durch die Tangente an die Parabel im höchsten Punkt. Am freien Ende hat der Träger nach Seite 83 eine Höhe von $\frac{h}{3}$.

Die Höhe h an der Einspannstelle ergibt sich zu:

$$y_{max}{}^3 = h^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot l^2$$

und die Breite zu: $b = \alpha \cdot h$.

Übung: Man bestimme die Form der Balken nach den drei besprochenen Formen für $P = Q = 1000$ kg, $l = 60$ cm und $k_b = 250$ kg/qcm.

Rollkurven.

Evolute und Evolvente.

Um ein beliebiges Vieleck sei ein Faden geschlungen. Faßt man diesen an einer Ecke an und wickelt ihn ab, indem man ihn straff hält, so beschreibt sein Endpunkt einen Kreisbogen um jede Ecke. Die Kreisbogen setzen sich zu einer Kurve zusammen, die Evolvente genannt wird. Das Vieleck heißt Evolute. Die Radien der Kreisbogen heißen Krümmungsradien, sie sind zugleich die Normalen der Evolvente.

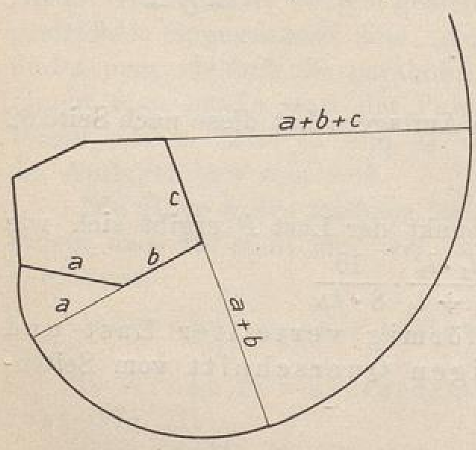

Fig. 73.

Aus der Fig. 73 gehen sofort folgende Sätze hervor:

1. Der Krümmungsradius der Evolvente ist gleich dem abgewickelten Stück der Evolute (z. B. gleich $a + b + c$).

2. Die Normalen der Evolvente umhüllen die Evolute.

3. Die Krümmungsmittelpunkte der Evolvente liegen auf den Ecken der Evolute.

Läßt man die Seiten des Vielecks unendlich klein und ihre Anzahl unendlich groß werden, so wird das Vieleck zu einer Kurve und die obigen drei Sätze lassen sich fast unverändert auf die Kurve übertragen:

1. Der Krümmungsradius der Evolvente ist gleich dem abgewickelten Stück der Evolute.

2. Die Normalen der Evolvente umhüllen die Evolute, sind also die Tangenten der letzteren.

3. Die Krümmungsmittelpunkte der Evolvente sind die Berührungspunkte dieser Tangenten.

Mit der Abwicklung kann man an einer beliebigen Stelle beginnen. Eine Evolute hat demnach unendlich viele Evolventen, die einander parallel sind; es sind also „Parallelkurven".

Zykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis auf einer seiner Tangenten so beschreibt jeder Punkt dieses Kreises eine Zykloide. Der Kreis heißt Rollkreis, die Tangente heißt Bahn und F der Fußpunkt (Fig. 74).

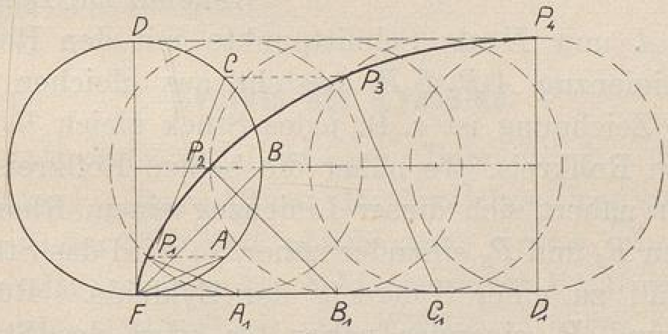

Fig. 74.

Konstruktion: Sie ergibt sich aus der Erklärung. Man teilt den Umfang des Rollkreises in beliebig viele Teile, z. B. in 8 gleiche Teile durch die Punkte A, B, C usw. und trägt die erhaltenen Bogen auf der Bahn vom Fußpunkt aus bis zu den Punkten A_1, B_1, C_1 usw. ab. Dann zieht man durch A, B, C usw. Parallelen zur Bahn und schlägt um jeden Teilpunkt der Bahn A_1, B_1, C_1 usw. mit der entsprechenden Sehne des Rollkreises einen Kreis, z. B. mit AF um A_1. Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 usw. der Kreise mit den zugehörigen Parallelen sind die Punkte der Zykloide. Bei der Lage des Rollkreises über A_1 kommt die Sehne FA in die Lage $A_1 P_1$. Bei der Lage über B_1 kommt die Sehne FB nach $P_2 B_1$.

Tangente der Zykloide.

Lehrsatz: Die Tangente der Zykloide halbiert den Winkel zwischen der zugehörigen Tangente des Rollkreises und der Parallelen zur Bahn (Fig. 75).

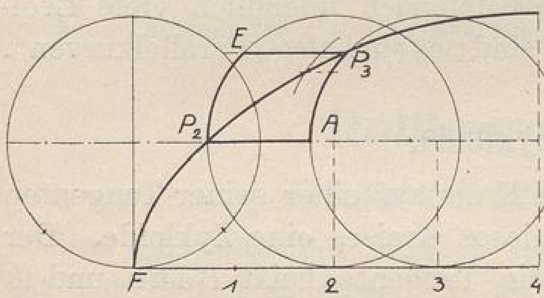

Fig. 75.

Beweis: Wir zeichnen zwei auf einander folgende Lagen des Rollkreises, z. B. über den Fußpunkten 2 und 3. Dann sind P_2 und P_3 Punkte der Zykloide; zieht man hierdurch Parallelen zur Bahn, so erhält man A und E als Schnittpunkte mit den Rollkreisen.

Der Linienzug $A P_2 E P_3$ besteht aus gleichen Stücken, in unserer Zeichnung ist z. B. jedes Stück gleich $^1/_8$ des Umfanges vom Rollkreis. Je näher die beiden Rollkreise liegen, desto mehr nähert sich dieser Linienzug einem Rhombus.

Rücken P_2 und P_3 einander näher, so wird das Stück $P_2 P_3$ im Grenzfall zu einer Tangente der Zykloide. Rücken zugleich A und P_3 einander näher, so wird das Stück $A P_3$ im Grenzfall zu einer Tangente des Rollkreises.

Da nun die Diagonale im Rhombus die Winkel desselben halbiert, so halbiert die Tangente der Zykloide den Winkel zwischen der zugehörigen Tangente des Rollkreises und der Parallelen zur Bahn.

Tangente und Normale.

Lehrsatz: Die Tangente der Zykloide geht durch den höchsten, die Normale durch den tiefsten Punkt des Rollkreises.

Beweis: Man zieht an den Rollkreis eine beliebige Tangente, verbindet seinen tiefsten Punkt F (Fig. 76) und seinen höchsten Punkt H mit dem Berührungspunkt B und mit einander und fällt von B die Senkrechte auf den Durchmesser FH. Dann ist:

$\alpha = \alpha'$ als Sehnen- und Tangentenwinkel,

$\alpha = \alpha''$ als Komplemente desselben Winkels.

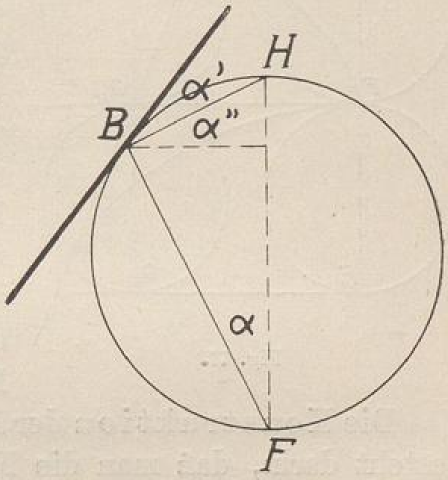

Fig. 76.

Folglich ist $\alpha' = \alpha''$, d. h. BH halbiert den Winkel zwischen der Tangente des Rollkreises und der Horizontalen, ist also eine Tangente der Zykloide und BF die zugehörige Normale. Demnach geht die Tangente der Zykloide durch den höchsten und die Normale durch den tiefsten Punkt des zugehörigen Rollkreises.

Evolute der Zykloide.

Man läßt einen Kreis auf seiner Bahn abrollen, bis z. B. $^3/_8$ seines Umfanges abgerollt ist. Dann zeichnet man symmetrisch unter der Bahn FQ zwei gleich große Kreise (Fig. 77).

Verbindet man nun den Zykloidenpunkt B mit dem tiefsten Punkt Q des Rollkreises und verlängert diese Gerade bis zum Schnitt C mit dem untern Kreis, so sind die abgeschnittenen Bogen $\widehat{BQ}$ und $\widehat{CQ}$ gleich und zwar hier gleich $^3/_8$ des Umfanges vom Rollkreis.

Denkt man sich jetzt den unteren Kreis nach links auf der unteren Bahn $Q_1 F_1$ abrollen, so beschreibt jeder Punkt des

Kreises, z. B. C, eine Zykloide. Sind $^3/_8$ des Umfanges abgerollt, also der Kreis bei F_1 angekommen, so muß C seinen höchsten Stand erreicht haben, also bei F angekommen sein. C und F sind also Punkte einer unteren Zykloide.

Da $B\,C$ durch Q also den tiefsten Punkt des oberen und den höchsten Punkt des unteren Rollkreises geht, so ist $B\,C$ die Tangente an die untere und zugleich Normale an die obere Zykloide (nach dem vorhergehenden Lehrsatz); dies läßt sich auch für die übrigen Stellungen des Rollkreises beweisen. Die untere Zykloide ist also die Evolute und die obere die zugehörige Evolvente. $B\,C$ ist demnach der Krümmungsradius der oberen Zykloide und C der Krümmungsmittelpunkt.

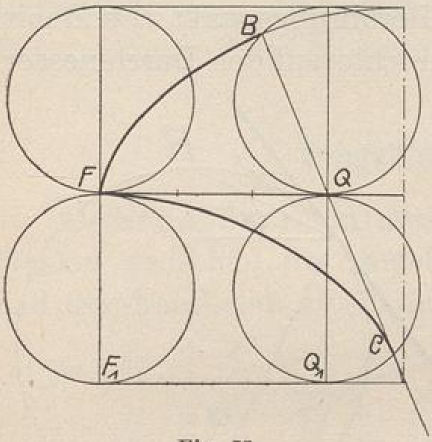

Fig. 77.

Die Konstruktion der Evolute einer gegebenen Zykloide besteht darin, daß man die Normalen der Zykloide über den Fußpunkt Q um sich selbst verlängert. Umgekehrt kann man auch die Tangenten über den höchsten Punkt des Rollkreises hinaus um sich selbst verlängern und erhält dann die zugehörige Evolvente der gegebenen Zykloide.

Auch die Länge der Zykloide ist jetzt leicht ableitbar. Da die Tangente gleich dem abgewickelten Stück z. B. $\overline{B\,C} = \widehat{F\,C}$ ist, so ist die ganze Länge der Zykloide gleich dem vierfachen Durchmesser des Rollkreises $L = 8\,r$.

Die Fläche der Zykloide.

Man zeichne eine Zykloide und die zugehörige Evolute (Fig. 78), ziehe dann einen beliebigen Krümmungsradius, z. B. $P_1\,C_1$ dicht daneben einen benachbarten $P_2\,C_2$ und durch P_2 eine Parallele $P_2\,E$ zur Bahn $A\,B$. Die beiden Krümmungsradien werden in G und H durch die Bahn halbiert. Liegen

P_1 und P_2, also auch C_1 und C_2 unendlich nahe aneinander, so wird $E P_2 C_2 C_1$ zum $\triangle E P_2 C_2$. Also ist das untere Dreieck $H G C_2 = \frac{1}{4}$ des ganzen $E P_2 C_2$.

Denken wir uns nun die ganze Fläche $AJBD = F_1 + F_2$ in unendlich viele schmale Dreiecke zerlegt, so ist die Summe der unteren Dreiecke also

$$F_2 = \frac{1}{4}(F_1 + F_2).$$

Also ist

$$F_1 = \frac{3}{4}(F_1 + F_2).$$

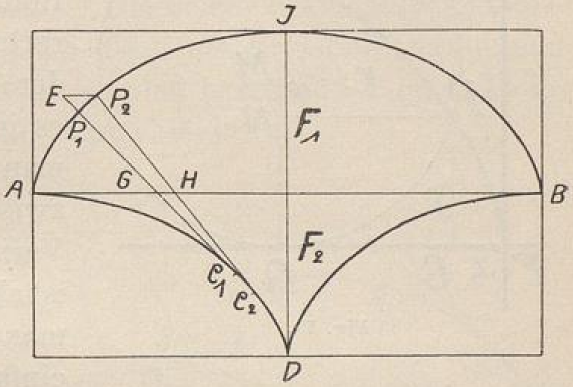

Fig. 78.

Die beiden Hälften von F_2 sind kongruent den Zwickeln rechts und links über der Zykloide $A J B$, ergänzen also die Fläche F_1 der oberen Zykloide zu einem Rechteck vom Inhalt:

$$F_1 + F_2 = 2r \cdot 2r\pi = 4r^2\pi \text{ oder } d \cdot d\pi = \pi d^2.$$

Demnach ist die Fläche der Zykloide

$$\boldsymbol{F_1 = 3r^2\pi = \frac{3}{4}\pi d^2}.$$

Die Gleichung der Zykloide.

Wir nehmen die Bahn des Rollkreises zur X-Achse und den Anfangspunkt F der Zykloide zum Schnittpunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes (Fig. 79).

Hat sich nun der Rollkreis von F nach Q gewälzt und sich dabei um den Winkel φ gedreht, so ist

$$\overline{FQ} = \widehat{PQ} = r \cdot \varphi$$

worin φ der „Rollwinkel“ ist. Wenn man nun beachtet, daß

$$PN = r \cdot \sin\varphi$$

und

$$MN = r \cdot \cos\varphi$$

ist, so ergibt sich:

$$x = FQ - PN = r\varphi - r\sin\varphi = \boldsymbol{r}(\varphi - \sin\varphi) \quad . \quad \mathrm{I}$$

$$y = MQ - MN = r \quad - r\cos\varphi = \boldsymbol{r}(1 - \cos\varphi) \quad . \quad \mathrm{II}$$

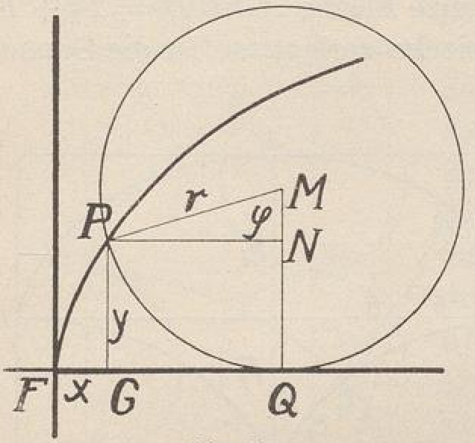

Fig. 79.

In diesen beiden Gleichungen sind x und y von einer dritten Variablen, nämlich dem Rollwinkel φ abhängig. Berechnet man $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ aus der einen Gleichung und setzt es in die andere ein, so erhält man eine einzige Gleichung zwischen x und y ohne die dritte Variable φ. Diese Gleichung ist aber wenig übersichtlich und man behält daher besser obige einfachere Gleichungen bei.

Die Steigung der Zykloide.

Aus Gleichung I folgt durch Differenzieren nach x:

$$1 = r\frac{d\varphi}{dx} - r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dx}$$

also

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r - r\cos\varphi} = \frac{1}{r(1-\cos\varphi)}$$

Aus Gleichung II folgt ebenso und durch Einsetzen von $\frac{d\varphi}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = r\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r\sin\varphi\frac{1}{r(1-\cos\varphi)} =$$

$$\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$$

Bemerkung: Diese Formel zeigt, daß die Steigung einer Zykloide nur vom Rollwinkel φ und nicht vom Radius des Rollkreises abhängig ist. Wenn $\varphi = 90^0$, so ist die Steigung $= 1$, also der Winkel der Tangente $= 45^0$. Wenn $\varphi = 0$

oder 360°, so ist die Steigung $= \infty$ und der Steigungswinkel $= 90^\circ$. Ist $\varphi = 180^\circ$, so ist die Steigung $= 0^\circ$. Im allgemeinen nimmt die Steigung mit dem Cosinus des Rollwinkels zu und ab.

Epizykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis auf einem anderen als Bahn, den er von außen berührt, so beschreibt jeder Punkt des Rollkreises eine Epizykloide. — Die bisher betrachtete Zykloide rollte auf einer Geraden. Da diese als Kreislinie mit unendlich großem Radius aufgefaßt werden kann, so ist die Zykloide nur ein besonderer Fall der Epizykloide.

Konstruktion: Aus der Erklärung ergibt sich, daß die Konstruktion der Epizykloide derjenigen der Zykloide entspricht. Der Unterschied besteht nur darin, daß die Parallelen zur Bahn hier konzentrische Kreise um den Mittelpunkt des festen sind. Das übrige Verfahren ist dasselbe wie bei der Zykloide (Fig. 80).

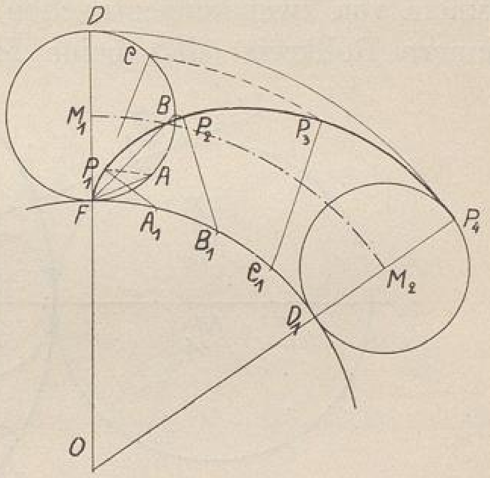

Fig. 80.

Lehrsatz: 1. Die Tangente der Epizykloide geht durch den höchsten, d. h. hier den äußersten, die Normale durch den tiefsten, d. h. hier den innersten Punkt des Rollkreises.

Beweis: Läßt man den Kreis um ein unendlich kleines Stückchen rollen, so unterscheidet sich der entstandene Bogen der Epizykloide nicht von dem der Zykloide, weil dies Stückcken der Bahn als unendlich kurze Gerade aufgefaßt werden kann. Durch den entstandenen Bogen der Epizykloide ist die Richtung der Tangente und die der Normalen gegeben, folglich haben diese dieselbe Richtung wie bei der Zykloide, jene Sätze der Zykloide gelten also auch für die Epizykloide.

Lehrsatz: 2. Ist der Radius des festen Kreises $n = \frac{R}{r}$ mal so groß wie der des Rollkreises, so ist nach einer vollen Abwicklung des rollenden Kreises die abgelaufene Bahn $\frac{1}{n} = \frac{r}{R}$ des Umfanges des festen Kreises.

Beweis: Die Umfänge verhalten sich wie die Radien.

Die Evolute der Epizykloide.

Hilfssatz: Rollen zwei Rollkreise (M_1 und M_2) auf je einem von zwei konzentrischen festen Kreisen (C), sodaß der innere Rollkreis (M_2) beide festen Kreise berührt und die

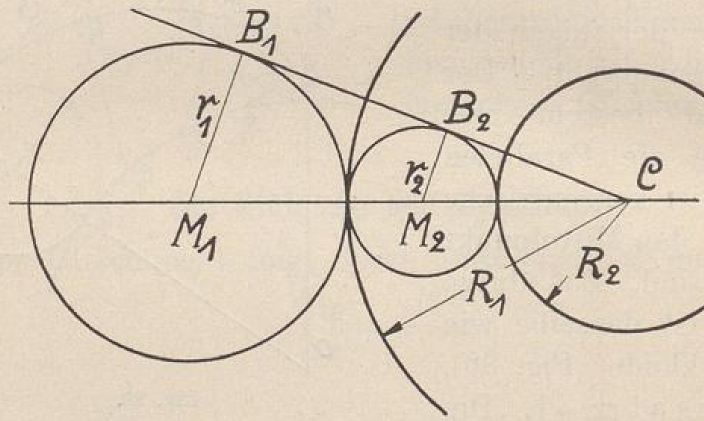

Fig. 81.

gemeinsame Tangente ($B_1 B_2$) der Rollkreise durch den Mittelpunkt C der festen Kreise geht, so verhalten sich die Radien der Rollkreise wie die der festen (Fig. 81).

Beweis: Man zieht die Radien r_1 und r_2 zu den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangente. Dann ist:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_1\,C}{M_2\,C} = \frac{r_1 + R_1}{r_2 + R_2}$$

$$r_1 r_2 + r_1 R_2 = r_1 r_2 + r_2 R_1$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Die Konstruktion dieser Kreise ergibt sich aus der Proportion $r_1 : R_1 = r_2 : R_2$ und $R_1 = 2\, r_2 + R_2$. Wäre z. B. $r_1 : R_1 = 2 : 3$ gegeben, so teilt man

$$R_1 \text{ in } 2 \cdot 2 + 3 = 7 \text{ Teile}$$

und der zweite Teilpunkt ist der Mittelpunkt des inneren Kreises. Das Verhältnis der Kreise ist dann

$$R_1 : R_2 = 7 : 3 = r_1 : r_2$$

Die Evolute. Ähnlich wie bei der Zykloide zeichnen wir den Stand des Rollkreises, wenn z. B. $\frac{3}{8}$ seines Umfanges abgerollt ist (Fig. 82); alsdann zeichnen wir auch die inneren Rollkreise nach der vorigen Konstruktion hinzu. Dann ist:

$$\widehat{BQ} = \widehat{FQ}$$

nach Konstruktion. Wir ziehen jetzt die Sehne BQ und verlängern sie bis zum Schnitt C mit dem innern Kreise. Da sich die Radien der Rollkreise wie die der festen verhalten, so verhalten sich auch ebenso entsprechende Bogen. $\widehat{BQ} : \widehat{CQ} = \widehat{FQ} : \widehat{F_1 Q_1}$. Da nun $\widehat{BQ} = \widehat{FQ}$ nach Konstruktion ist, so ist auch $\widehat{CQ} = \widehat{F_1 Q_1}$.

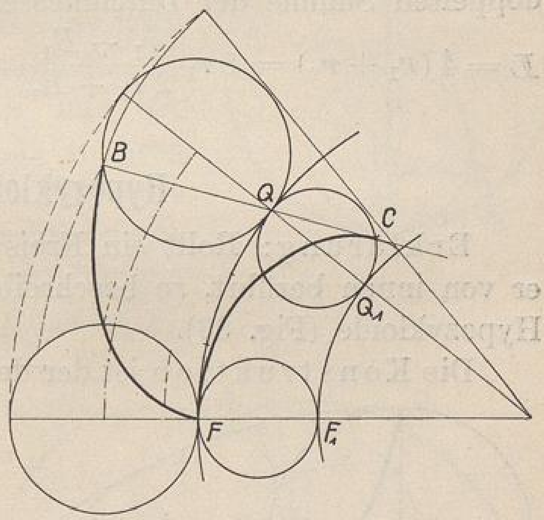

Fig. 82.

Wenn also der kleine Rollkreis auf dem inneren festen Kreis von Q_1 bis F_1 rollt, so hat sich der Punkt C um $\widehat{QC}$ gedreht, ist also an die höchste Stelle, also nach F gerückt. C und F sind also Punkte einer zweiten Epizykloide.

Wie bei der Zykloide, so ist auch hier BC sowohl Tangente der inneren, als auch Normale und Krümmungsradius der äußeren Epizykloide. Die innere ist also Evolute der äußeren, die äußere ist Evolvente der innern und C der Krümmungspunkt für B.

Konstruktion der Evolute: Man erhält die Evolute der Epizykloide, indem man die Normale, z. B. BQ der Epizykloide über den Fußpunkt Q hinaus im Verhältnis der Radien der Rollkreise verlängert. — Dies Verhältnis war bei der Zykloide 1 : 1. — Durch entsprechende Verlängerung der Tangente nach außen erhält man die Evolvente aus der Evolute.

Die Länge der Epizykloide FC ist ähnlich wie bei der Zykloide gleich dem Krümmungsradius BC ihrer Evolvente; also ist die ganze Länge einer Epizykloide gleich der doppelten Summe der Durchmesser der Rollkreise.

$$\boldsymbol{L} = 4\,(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = 8\,r_1\,\frac{r_1 + R_1}{2\,r_1 + R_1}$$

Hypozykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis in einem anderen ab, den er von innen berührt, so beschreibt jeder seiner Punkte eine Hypozykloide (Fig. 83).

Die Konstruktion ist der der Epizykloide entsprechend.

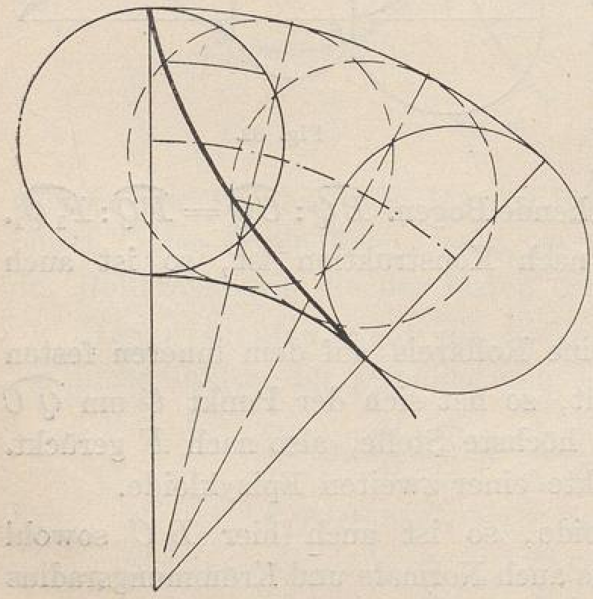

Fig. 83.

Die konzentrischen Kreise liegen hier nnerhalb.

Die Tangente geht durch den höchsten, d. h. hier den i nnersten, die Normale durch den tiefsten, d. h. hier den äußersten Punkt des Rollkreises. Beweis wie oben.

Auch hier ist die nach einer vollen Abwicklung abgelaufene Bahn

$\frac{1}{n} = \frac{r}{R}$ des festen Umfanges, wenn der Halbmesser des festen Kreises $n = \frac{R}{r}$ mal so groß ist, wie der des Rollkreises.

Hypozykloide Gradführung.

Lehrsatz: Ist der Halbmesser KG des Rollkreises halb so groß wie der des festen $F_1 G$, so ist die Hypozykloide eine Gerade und zwar der Durchmesser (Fig. 84).

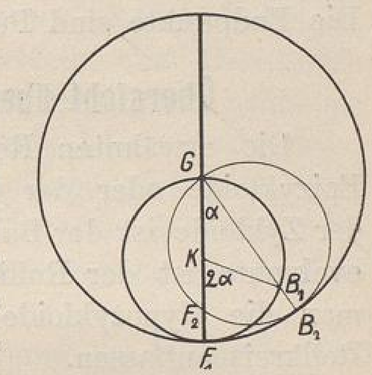

Fig. 84.

Beweis: Wir wollen den Weg eines beliebigen Punktes B_1 des Rollkreises feststellen. Wir verbinden B_1 mit den Mittelpunkten K und G. Dann ist $F_1\ K\ B_1$ doppelt so groß wie $F_1\ G\ B_1$. Da sich also die Zentriwinkel umgekehrt verhalten wie die Radien, so sind die zugehörigen Bogen gleich, d. h. $\widehat{B_1 F_1} = \widehat{B_2 F_1}$. Der Kreis ist also vom Fußpunkt F_1 bis B_2 gerollt und B_1 bewegt sich hierbei auf dem Durchmesser von B_1 nach B_2; ebenso bewegt sich gleichzeitig F_1 nach F_2. Die Punkte des Rollkreises bewegen sich also auf geraden Linien und zwar auf Durchmessern.

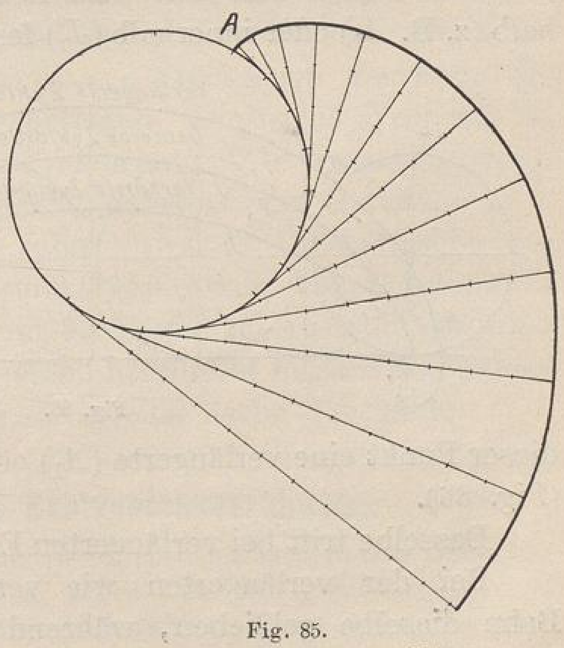

Fig. 85.

Kreisevolvente.

Erklärung: Denkt man sich um einen Kreis einen Faden gelegt und wickelt man diesen von einem Punkte, z. B. A aus ab, so beschreibt dieser Punkt A eine Kreisevolvente (Fig. 85). Stellt man sich statt dessen vor, daß eine Tangente auf einem Kreisumfang rollt, so beschreibt jeder Punkt der Tangente ebenfalls eine Kreisevolvente.

Die Konstruktion ergibt sich aus dieser Erklärung. Man trägt von A aus gleiche Teile auf dem Kreise ab. Durch jeden Teilpunkt des Bogens zieht man eine Tangente und macht die erste gleich 1, die zweite gleich 2 dieser Teile usw. Die Endpunkte sind Punkte der Kreisevolvente.

Übersicht über die bisherigen Rollkurven.

Die erwähnten Rollkurven können als Spezialfälle der Epizykloide oder der Hypozykloide aufgefaßt werden. Bei der Zykloide ist der Bahnkreis unendlich groß. Bei der Kreisevolvente ist der Rollkreis unendlich groß. Außerdem kann man die Hypozykloide als eine Epizykloide mit negativem Rollkreis auffassen.

Verlängerte Zykloiden.

Denkt man sich mit dem Rollkreis einen Punkt außerhalb (z. B. A_1) oder innerhalb (J_1) fest verbunden, so beschreibt

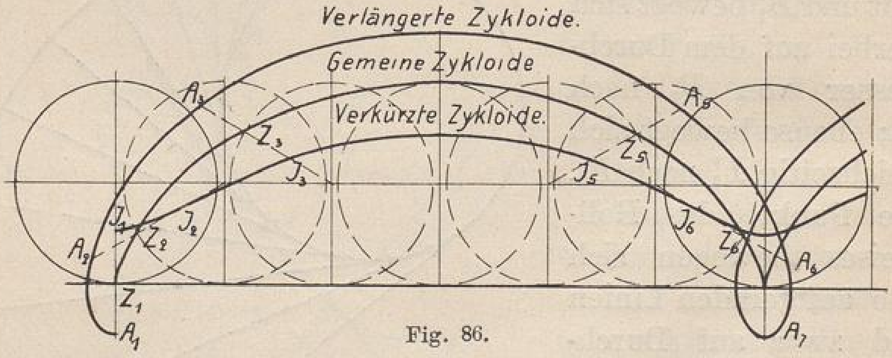

Fig. 86.

dieser Punkt eine verlängerte (A_1) oder verkürzte Zykloide (J_1) (Fig. 86).

Dasselbe tritt bei verlängerten Epi- und Hypozykloiden ein.

Bei der verlängerten wie verkürzten Zykloide ist die Bahn dieselbe geblieben, während bei der verlängerten der

Punkt A_1 einem größeren, bei der verkürzten Zykloide der Punkt J_1 einem kleineren Kreis als der Rollkreis entspricht.

Trochoiden entstehen ähnlich wie die Zykloiden. Der Kreis rollt aber nicht bloß, sondern eilt gleichzeitig durch Vorwärtsgleiten vor oder bleibt durch Rückwärtsgleiten zurück. Man trägt statt der Teile der Peripherie beliebige, aber gleiche Stücke auf der Bahn ab; diese Wegestücke können länger oder kürzer sein als die Teile der Peripherie.

Die stärker gekrümmte Trochoide entsteht, wenn der Rollkreis trotz seiner Drehung auf einer glatten Bahn im Vergleich zum reinen Abrollen zurückbleibt (bei den Lokomotivrädern während des Anfahrens und beim Slip der Schaufelräder). Bei ihrer Konstruktion trägt man kleinere Stücke auf der Bahn ab, als die Teile des Umfanges betragen. Die gekrümmtere Trochoide ist mit der verlängerten Zykloide identisch. Als Grenzfall, wo die Vorwärtsbewegung gleich Null ist, entsteht ein Kreis.

Die flache Trochoide entsteht, wenn der Rollkreis sich rascher fortbewegt, als seiner Abwicklung entspricht (bei der Kurbel eines Fahrrades). Ebenso entsteht sie, wenn ein Rad n seiner Umdrehung so gebremst wird, daß es zum Teil auf der Bahn gleitet (beim Einfahren in die Station). Bei ihrer Konstruktion trägt man größere Stücke auf der Bahn ab, als die Teile des Umfanges betragen. Die flache Trochoide ist mit der verkürzten Zykloide identisch. Als Grenzfall, wenn das Rad sich nicht mehr dreht, entsteht eine Gerade.

Der Mond macht im Jahre etwa 12 Umdrehungen um die Erde im Abstand von rund 384 000 km, während die Erde gleichzeitig einen Umlauf um die Sonne im Abstand von rund 150 000 000 km macht. Der Mond beschreibt folglich angenähert eine verkürzte Epizykloide, d. h. eine flache Trochoide.

Zykloiden- und Evolventenverzahnung.

Das Übersetzungsverhältnis zweier zusammenarbeitender Zahnräder soll konstant bleiben, die Räder sollen sich also gleichförmig, d. h. mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehen. Diese Bedingung wird nach dem Verzahnungsgesetz erfüllt, wenn die Normale im jeweiligen Berührungspunkt (Eingriffpunkt) der Zahnprofile stets durch denselben Punkt O der Verbindungslinie $M_1 M_2$ der Wellenmitten geht (Fig. 87). Dieser Punkt O teilt dann die Gerade $M_1 M_2$ im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder. Die durch O gehenden Kreise sind die Teilkreise, ihre Punkte haben dieselbe Um-

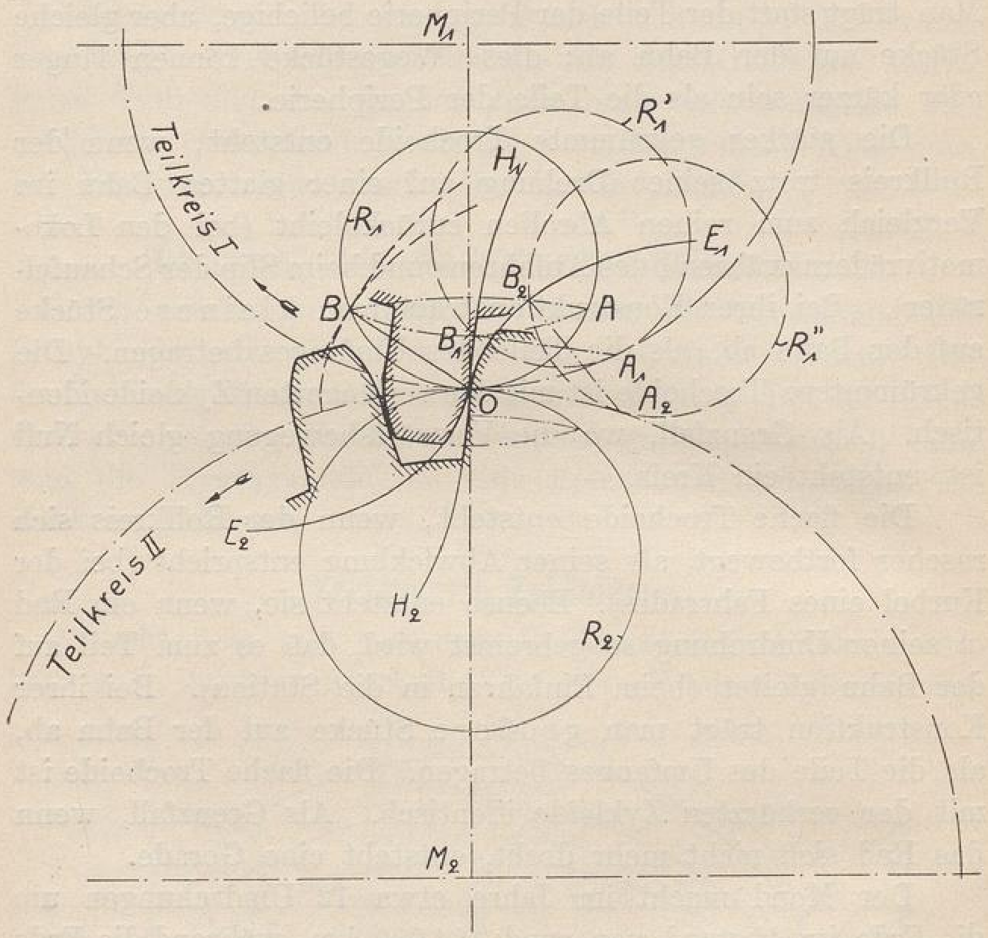

Fig. 87.

fangsgeschwindigkeit. Die Eingriffpunkte können auf einer ganz beliebig gestalteten Kurve (der Eingrifflinie) liegen. Die Beurteilung der Verzahnung gestaltet sich indessen leichter, wenn man als Eingrifflinie einen Kreis oder eine gerade Linie wählt. Man erhält dann als Zahnflanken zyklische Kurven und hat dadurch den weiteren Vorteil der einfachen Konstruktion der Zahnprofile und der genauen Formgebung bei der Bearbeitung der Zähne.

Daß die zyklischen Kurven das oben genannte Verzahnungsgesetz erfüllen, zeigen folgende Betrachtungen:

1. Zykloidenverzahnung (Fig. 87): Läßt man auf jedem der beiden Teilkreise I und II die Rollkreise R_1 und R_2 sich abwälzen, so erhält man die Epizykloiden $O\,E_1$ und $O\,E_2$ sowie die Hypozykloiden $O\,H_1$ und $O\,H_2$. Einem beliebigen Bogen des Rollkreises R_1, z. B. $\widehat{O\,A}$, entsprechen die Wälzungsbögen $\widehat{O\,A_1}$ und $\widehat{O\,A_2}$, und diesen die Kurvenpunkte B_1 bezüglich B_2, die man in der früher (Seite 95) angegebenen Weise erhält. Der Rollkreis R_1 hat dann die Lagen R_1' bzw. R_1''. Denkt man sich nun diese Kreise R_1' und R_1'' sowie die Kurven $O\,E_1$ und $O\,H_1$ mit den Teilkreisen I und II starr verbunden, und dreht die Teilkreise im Sinne der Pfeile so, daß sie aufeinanderrollen, ohne zu gleiten, so werden, weil $\widehat{O\,A_1} = \widehat{O\,A_2}$ ist, die Punkte A_1 und A_2 zugleich nach O kommen; die Kreise R_1' und R_1'' decken sich dann mit R_1, und weil $A_1\,B_1 = A_2\,B_2 = O\,A = O\,B$ ist, fallen die Punkte B_1 und B_2 mit B zusammen, d. h. die Eingriffpunkte liegen auf dem Kreise R_1. Da weiter $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$ die Normalen der Kurven sind, weil sie durch den tiefsten Punkt des Rollkreises gehen, so muß auch $O\,B$ die gemeinsame Normale im Berührungspunkt B sein; diese geht demnach durch Punkt O, erfüllt also das Verzahnungsgesetz. Ähnliche Verhältnisse liegen beim Eingriff der Kurven $O\,E_2$ und $O\,H_2$ vor, welche vom Rollkreis R_2 erzeugt werden.

Wird der Radius des Teilkreises II unendlich groß, so geht dieser Kreis in eine Gerade über, man erhält eine Zahnstange; die Epizykloide $O\,E_1$ und die Hypozykloide $O\,H_2$ werden dann Zykloiden.

2. Evolventenverzahnung (Fig. 88). Die Gerade $A_1\,O\,A_2$ ist die gemeinsame Tangente der beiden Grundkreise I und II. Die Punkte A_1 und A_2 sind ihre Berührungspunkte. Durch Wälzen der Geraden $O\,A_1$ auf Grundkreis I entsteht die Evolvente $O\,E_1$, durch Wälzen der Geraden $O\,A_2$ auf dem Grundkreis II entsteht die Evolvente $O\,E_2$. Die Wälzungsbögen $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$ seien gleich. Dem Punkte B_1 entspricht der Kurvenpunkt P_1, dem Punkte B_2 der Kurvenpunkt P_2. Denkt man sich die so entstandenen Kurven und die Geraden $B_1\,P_1$ und $B_2\,P_2$ mit den Grundkreisen starr verbunden, und diese so in Richtung der Pfeile gedreht, daß ihre Punkte dieselbe Umfangsgeschwindigkeit haben, so werden zugleich Punkt B_1 nach A_1 und B_2 nach A_2 fallen. Die Kurvenpunkte P_1 und P_2 kommen dann auf die Tangente $A_1\,A_2$ zu liegen, da ja auch $B_1\,P_1$ bzw. $B_2\,P_2$ Tangenten der Grundkreise sind. Punkt P_1 und P_2 müssen auf $A_1\,A_2$ zusammenfallen, da:

$$\overline{B_1\,P_1} = \overline{A_1\,O} + \widehat{A_1\,B_1}$$
$$\overline{B_2\,P_2} = \overline{A_2\,O} - \widehat{A_2\,B_2}$$

$$\overline{B_1\,P_1} + \overline{B_2\,P_2} = \overline{A_1\,O} + \overline{A_2\,O} = \overline{A_1\,A_2} = \text{Konstante.}$$

Die Evolventen berühren sich also stets auf $A_1 A_2$, d. h. die Eingrifflinie ist eine Gerade. Da ferner $B_1 P_1$ und $B_2 P_2$ Normalen der Evolventen sind und bei der Drehung auf $A_1 A_2$ fallen, so geht die gemeinsam Normale im Berührungspunkt stets durch Punkt O.

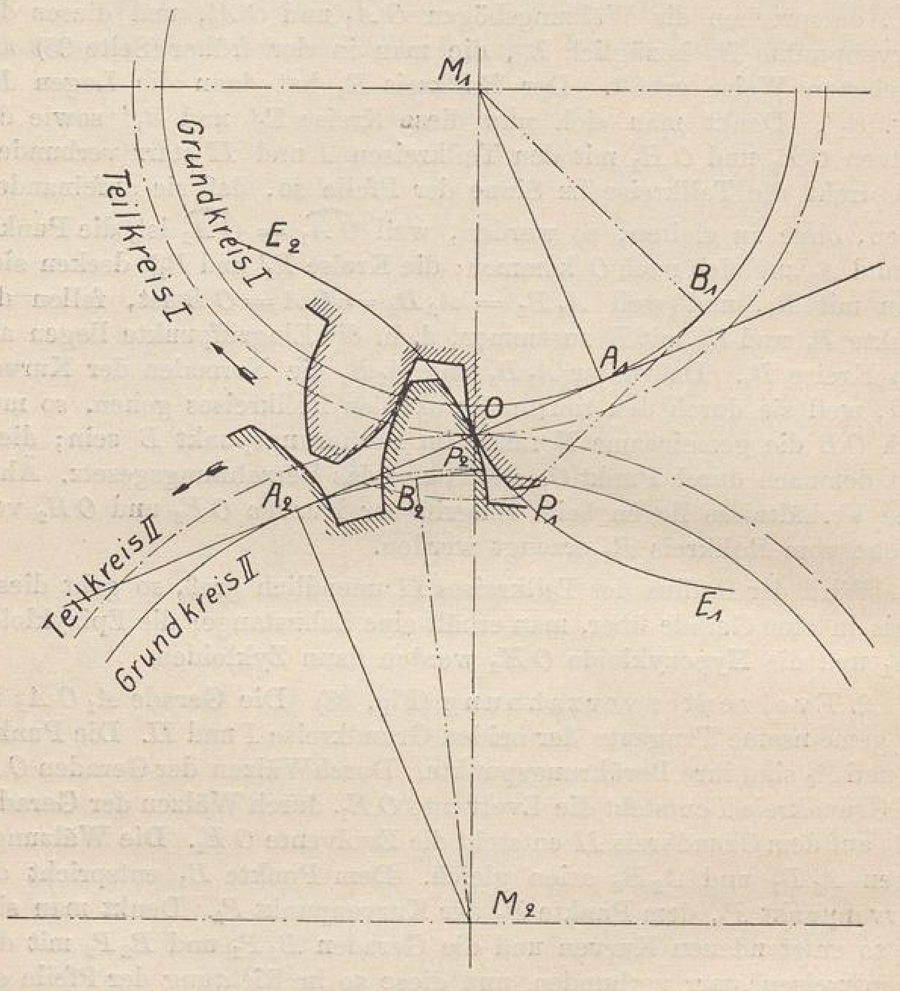

Fig. 88.

Da ferner $\qquad \triangle\, M_1 O A_1 \sim M_2 O A_2,$

so ist
$$\frac{M_1 A_1}{M_2 A_2} = \frac{M_1 O}{M_2 O}$$

Bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit in den Grundkreisen sind also auch die Umfangsgeschwindigkeiten in den Teilkreisen gleich, und O teilt die Gerade $M_1 M_2$ im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Räder. Das Verzahnungsgesetz ist also erfüllt.