Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Evolute und Evolvente

Für den gezeichneten Querschnitt ist:

$$M_b = Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{z \cdot y^2}{6} \cdot k_b$$

Da nun aber $z = y \cdot \alpha$ ist, so folgt weiter:

$$Q \cdot \frac{x^2}{2\,l} \cdot \;= \frac{\alpha\, y^3}{6} \cdot k_b$$

oder

$$y^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot x^2$$

Dieses ist die Gleichung einer semikubischen Parabel.

Die angenäherte Form des Freiträgers ergibt sich durch die Tangente an die Parabel im höchsten Punkt. Am freien Ende hat der Träger nach Seite 83 eine Höhe von $\frac{h}{3}$.

Die Höhe h an der Einspannstelle ergibt sich zu:

$$y_{max}{}^3 = h^3 = \frac{3\,Q}{\alpha \cdot l \cdot k_b} \cdot l^2$$

und die Breite zu: $b = \alpha \cdot h$.

Übung: Man bestimme die Form der Balken nach den drei besprochenen Formen für $P = Q = 1000$ kg, $l = 60$ cm und $k_b = 250$ kg/qcm.

Rollkurven.

Evolute und Evolvente.

Um ein beliebiges Vieleck sei ein Faden geschlungen. Faßt man diesen an einer Ecke an und wickelt ihn ab, indem man ihn straff hält, so beschreibt sein Endpunkt einen Kreisbogen um jede Ecke. Die Kreisbogen setzen sich zu einer Kurve zusammen, die Evolvente genannt wird. Das Vieleck heißt Evolute. Die Radien der Kreisbogen heißen Krümmungsradien, sie sind zugleich die Normalen der Evolvente.

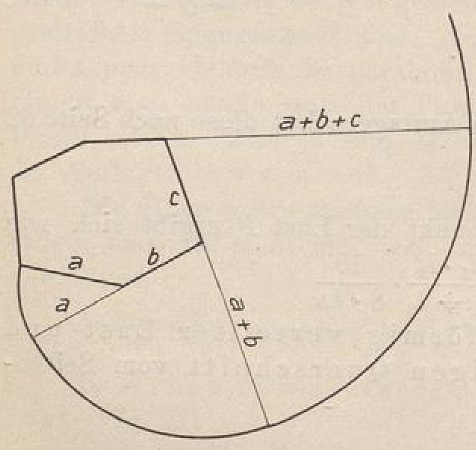

Fig. 73.

Aus der Fig. 73 gehen sofort folgende Sätze hervor:

1. Der Krümmungsradius der Evolvente ist gleich dem abgewickelten Stück der Evolute (z. B. gleich $a + b + c$).

2. Die Normalen der Evolvente umhüllen die Evolute.

3. Die Krümmungsmittelpunkte der Evolvente liegen auf den Ecken der Evolute.

Läßt man die Seiten des Vielecks unendlich klein und ihre Anzahl unendlich groß werden, so wird das Vieleck zu einer Kurve und die obigen drei Sätze lassen sich fast unverändert auf die Kurve übertragen:

1. Der Krümmungsradius der Evolvente ist gleich dem abgewickelten Stück der Evolute.

2. Die Normalen der Evolvente umhüllen die Evolute, sind also die Tangenten der letzteren.

3. Die Krümmungsmittelpunkte der Evolvente sind die Berührungspunkte dieser Tangenten.

Mit der Abwicklung kann man an einer beliebigen Stelle beginnen. Eine Evolute hat demnach unendlich viele Evolventen, die einander parallel sind; es sind also „Parallelkurven".

Zykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis auf einer seiner Tangenten so beschreibt jeder Punkt dieses Kreises eine Zykloide. Der Kreis heißt Rollkreis, die Tangente heißt Bahn und F der Fußpunkt (Fig. 74).

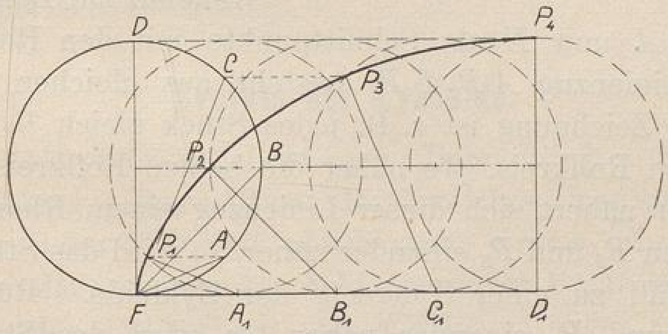

Fig. 74.

Konstruktion: Sie ergibt sich aus der Erklärung. Man teilt den Umfang des Rollkreises in beliebig viele Teile, z. B. in 8 gleiche Teile durch die Punkte A, B, C usw. und trägt die erhaltenen Bogen auf der Bahn vom Fußpunkt aus