Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Evolute der Zykloide

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Tangente und Normale.

Lehrsatz: Die Tangente der Zykloide geht durch den höchsten, die Normale durch den tiefsten Punkt des Rollkreises.

Beweis: Man zieht an den Rollkreis eine beliebige Tangente, verbindet seinen tiefsten Punkt F (Fig. 76) und seinen höchsten Punkt H mit dem Berührungspunkt B und mit einander und fällt von B die Senkrechte auf den Durchmesser FH. Dann ist:

$\alpha = \alpha'$ als Sehnen- und Tangentenwinkel,

$\alpha = \alpha''$ als Komplemente desselben Winkels.

Folglich ist $\alpha' = \alpha''$, d. h. BH halbiert den Winkel zwischen der Tangente des Rollkreises und der Horizontalen, ist also eine Tangente der Zykloide und BF die zugehörige Normale. Demnach geht die Tangente der Zykloide durch den höchsten und die Normale durch den tiefsten Punkt des zugehörigen Rollkreises.

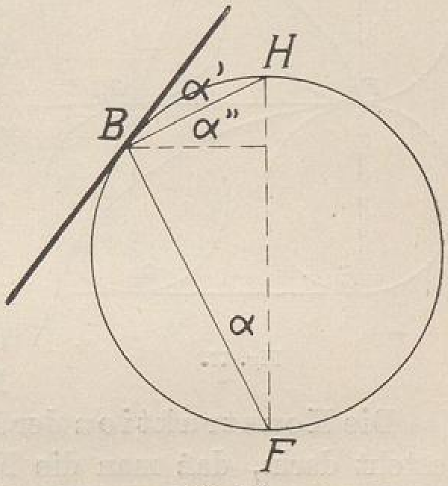

Fig. 76.

Evolute der Zykloide.

Man läßt einen Kreis auf seiner Bahn abrollen, bis z. B. $^3/_8$ seines Umfanges abgerollt ist. Dann zeichnet man symmetrisch unter der Bahn FQ zwei gleich große Kreise (Fig. 77).

Verbindet man nun den Zykloidenpunkt B mit dem tiefsten Punkt Q des Rollkreises und verlängert diese Gerade bis zum Schnitt C mit dem untern Kreis, so sind die abgeschnittenen Bogen $\widehat{BQ}$ und $\widehat{CQ}$ gleich und zwar hier gleich $^3/_8$ des Umfanges vom Rollkreis.

Denkt man sich jetzt den unteren Kreis nach links auf der unteren Bahn $Q_1 F_1$ abrollen, so beschreibt jeder Punkt des

Kreises, z. B. C, eine Zykloide. Sind $^3/_8$ des Umfanges abgerollt, also der Kreis bei F_1 angekommen, so muß C seinen höchsten Stand erreicht haben, also bei F angekommen sein. C und F sind also Punkte einer unteren Zykloide.

Da $B\,C$ durch Q also den tiefsten Punkt des oberen und den höchsten Punkt des unteren Rollkreises geht, so ist $B\,C$ die Tangente an die untere und zugleich Normale an die obere Zykloide (nach dem vorhergehenden Lehrsatz); dies läßt sich auch für die übrigen Stellungen des Rollkreises beweisen. Die untere Zykloide ist also die Evolute und die obere die zugehörige Evolvente. $B\,C$ ist demnach der Krümmungsradius der oberen Zykloide und C der Krümmungsmittelpunkt.

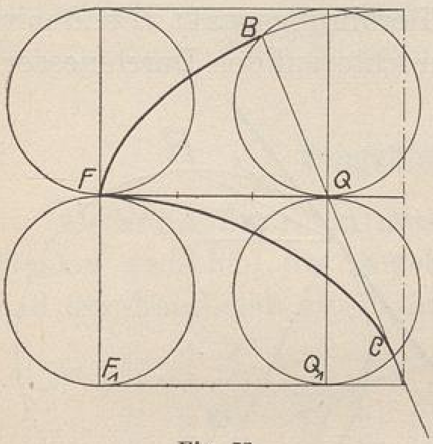

Fig. 77.

Die Konstruktion der Evolute einer gegebenen Zykloide besteht darin, daß man die Normalen der Zykloide über den Fußpunkt Q um sich selbst verlängert. Umgekehrt kann man auch die Tangenten über den höchsten Punkt des Rollkreises hinaus um sich selbst verlängern und erhält dann die zugehörige Evolvente der gegebenen Zykloide.

Auch die Länge der Zykloide ist jetzt leicht ableitbar. Da die Tangente gleich dem abgewickelten Stück z. B. $\overline{B\,C} = \widehat{F\,C}$ ist, so ist die ganze Länge der Zykloide gleich dem vierfachen Durchmesser des Rollkreises $L = 8\,r$.

Die Fläche der Zykloide.

Man zeichne eine Zykloide und die zugehörige Evolute (Fig. 78), ziehe dann einen beliebigen Krümmungsradius, z. B. $P_1\,C_1$ dicht daneben einen benachbarten $P_2\,C_2$ und durch P_2 eine Parallele $P_2\,E$ zur Bahn $A\,B$. Die beiden Krümmungsradien werden in G und H durch die Bahn halbiert. Liegen