Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Fläche der Zykloide

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Kreises, z. B. C, eine Zykloide. Sind $^3/_8$ des Umfanges abgerollt, also der Kreis bei F_1 angekommen, so muß C seinen höchsten Stand erreicht haben, also bei F angekommen sein. C und F sind also Punkte einer unteren Zykloide.

Da $B\,C$ durch Q also den tiefsten Punkt des oberen und den höchsten Punkt des unteren Rollkreises geht, so ist $B\,C$ die Tangente an die untere und zugleich Normale an die obere Zykloide (nach dem vorhergehenden Lehrsatz); dies läßt sich auch für die übrigen Stellungen des Rollkreises beweisen. Die untere Zykloide ist also die Evolute und die obere die zugehörige Evolvente. $B\,C$ ist demnach der Krümmungsradius der oberen Zykloide und C der Krümmungsmittelpunkt.

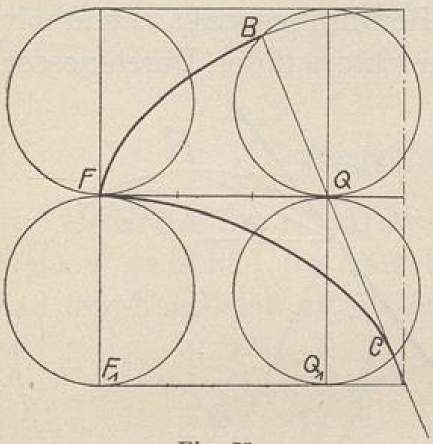

Fig. 77.

Die Konstruktion der Evolute einer gegebenen Zykloide besteht darin, daß man die Normalen der Zykloide über den Fußpunkt Q um sich selbst verlängert. Umgekehrt kann man auch die Tangenten über den höchsten Punkt des Rollkreises hinaus um sich selbst verlängern und erhält dann die zugehörige Evolvente der gegebenen Zykloide.

Auch die Länge der Zykloide ist jetzt leicht ableitbar. Da die Tangente gleich dem abgewickelten Stück z. B. $\overline{B\,C} = \overset{\frown}{F\,C}$ ist, so ist die ganze Länge der Zykloide gleich dem vierfachen Durchmesser des Rollkreises $L = 8\,r$.

Die Fläche der Zykloide.

Man zeichne eine Zykloide und die zugehörige Evolute (Fig. 78), ziehe dann einen beliebigen Krümmungsradius, z. B. $P_1\,C_1$ dicht daneben einen benachbarten $P_2\,C_2$ und durch P_2 eine Parallele $P_2\,E$ zur Bahn $A\,B$. Die beiden Krümmungsradien werden in G und H durch die Bahn halbiert. Liegen

P_1 und P_2, also auch C_1 und C_2 unendlich nahe aneinander, so wird $E P_2 C_2 C_1$ zum $\triangle E P_2 C_2$. Also ist das untere Dreieck $H G C_2 = \frac{1}{4}$ des ganzen $E P_2 C_2$.

Denken wir uns nun die ganze Fläche $A J B D = F_1 + F_2$ in unendlich viele schmale Dreiecke zerlegt, so ist die Summe der unteren Dreiecke also

$$F_2 = \frac{1}{4}(F_1 + F_2).$$

Also ist

$$F_1 = \frac{3}{4}(F_1 + F_2).$$

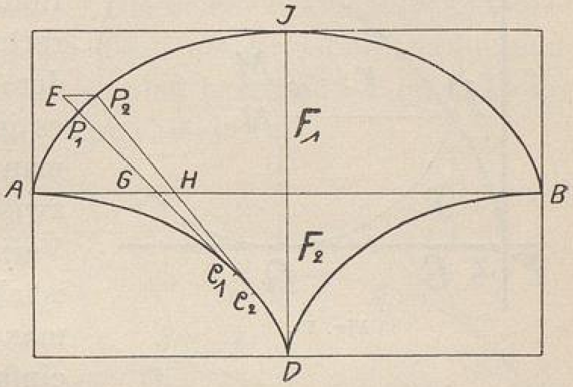

Fig. 78.

Die beiden Hälften von F_2 sind kongruent den Zwickeln rechts und links über der Zykloide $A J B$, ergänzen also die Fläche F_1 der oberen Zykloide zu einem Rechteck vom Inhalt:

$$F_1 + F_2 = 2r \cdot 2r\pi = 4r^2\pi \text{ oder } d \cdot d\pi = \pi d^2.$$

Demnach ist die Fläche der Zykloide

$$\boldsymbol{F_1 = 3r^2\pi = \frac{3}{4}\pi d^2.}$$

Die Gleichung der Zykloide.

Wir nehmen die Bahn des Rollkreises zur X-Achse und den Anfangspunkt F der Zykloide zum Schnittpunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes (Fig. 79).

Hat sich nun der Rollkreis von F nach Q gewälzt und sich dabei um den Winkel φ gedreht, so ist

$$\overline{FQ} = \widehat{PQ} = r \cdot \varphi$$

worin φ der „Rollwinkel" ist. Wenn man nun beachtet, daß

$$PN = r \cdot \sin\varphi$$

und