# Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Gleichung der Zykloide

$P_1$ und $P_2$, also auch $C_1$ und $C_2$ unendlich nahe aneinander, so wird $E P_2 C_2 C_1$ zum $\triangle E P_2 C_2$. Also ist das untere Dreieck $H G C_2 = \frac{1}{4}$ des ganzen $E P_2 C_2$.

Denken wir uns nun die ganze Fläche $A J B D = F_1 + F_2$ in unendlich viele schmale Dreiecke zerlegt, so ist die Summe der unteren Dreiecke also

$$F_2 = \frac{1}{4}(F_1 + F_2).$$

Also ist

$$F_1 = \frac{3}{4}(F_1 + F_2).$$

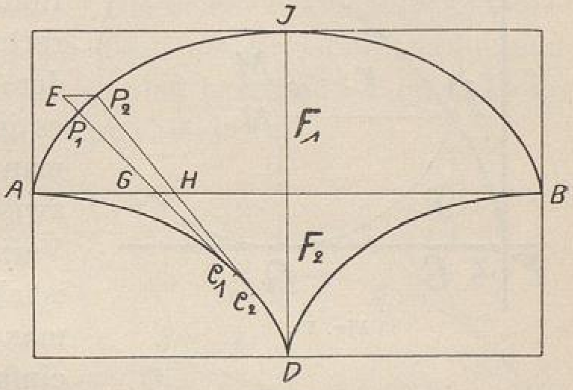

Fig. 78.

Die beiden Hälften von $F_2$ sind kongruent den Zwickeln rechts und links über der Zykloide $A J B$, ergänzen also die Fläche $F_1$ der oberen Zykloide zu einem Rechteck vom Inhalt:

$$F_1 + F_2 = 2r \cdot 2r\pi = 4r^2\pi \text{ oder } d \cdot d\pi = \pi d^2.$$

Demnach ist die Fläche der Zykloide

$$\boldsymbol{F_1 = 3 r^2 \pi = \frac{3}{4} \pi d^2.}$$

## Die Gleichung der Zykloide.

Wir nehmen die Bahn des Rollkreises zur $X$-Achse und den Anfangspunkt $F$ der Zykloide zum Schnittpunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes (Fig. 79).

Hat sich nun der Rollkreis von $F$ nach $Q$ gewälzt und sich dabei um den Winkel $\varphi$ gedreht, so ist

$$\overline{FQ} = \widehat{PQ} = r \cdot \varphi$$

worin $\varphi$ der „Rollwinkel“ ist. Wenn man nun beachtet, daß

$$PN = r \cdot \sin \varphi$$

und

$$MN = r \cdot \cos\varphi$$

ist, so ergibt sich:

$$x = FQ - PN = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi) \quad . \; \mathrm{I}$$
$$y = MQ - MN = r \quad - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi) \quad . \; \mathrm{II}$$

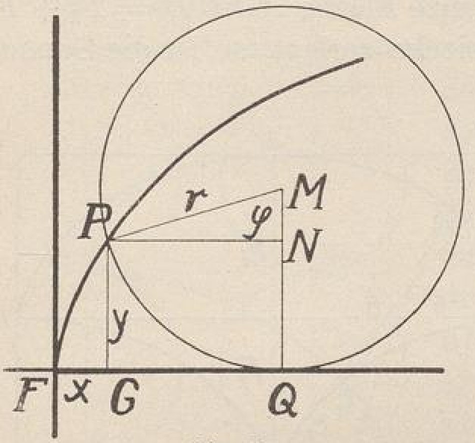

Fig. 79.

In diesen beiden Gleichungen sind $x$ und $y$ von einer dritten Variablen, nämlich dem Rollwinkel $\varphi$ abhängig. Berechnet man $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ aus der einen Gleichung und setzt es in die andere ein, so erhält man eine einzige Gleichung zwischen $x$ und $y$ ohne die dritte Variable $\varphi$. Diese Gleichung ist aber wenig übersichtlich und man behält daher besser obige einfachere Gleichungen bei.

## Die Steigung der Zykloide.

Aus Gleichung I folgt durch Differenzieren nach $x$:

$$1 = r\,\frac{d\varphi}{dx} - r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}$$

also

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r - r\cos\varphi} = \frac{1}{r(1 - \cos\varphi)}$$

Aus Gleichung II folgt ebenso und durch Einsetzen von $\frac{d\varphi}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = r\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r\sin\varphi\,\frac{1}{r(1 - \cos\varphi)} =$$

$$\frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2\varphi}{(1 - \cos\varphi)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}}$$

B e m e r k u n g: Diese Formel zeigt, daß die Steigung einer Zykloide nur vom Rollwinkel $\varphi$ und nicht vom Radius des Rollkreises abhängig ist. Wenn $\varphi = 90^0$, so ist die Steigung $= 1$, also der Winkel der Tangente $= 45^0$. Wenn $\varphi = 0$