Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die Steigung der Zykloide

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

$$MN = r \cdot \cos\varphi$$

ist, so ergibt sich:

$$x = FQ - PN = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi) \quad . \ \mathrm{I}$$
$$y = MQ - MN = r \quad - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi) \quad . \ \mathrm{II}$$

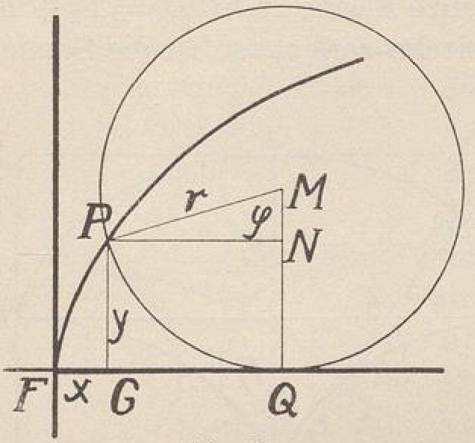

Fig. 79.

In diesen beiden Gleichungen sind x und y von einer dritten Variablen, nämlich dem Rollwinkel φ abhängig. Berechnet man $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ aus der einen Gleichung und setzt es in die andere ein, so erhält man eine einzige Gleichung zwischen x und y ohne die dritte Variable φ. Diese Gleichung ist aber wenig übersichtlich und man behält daher besser obige einfachere Gleichungen bei.

Die Steigung der Zykloide.

Aus Gleichung I folgt durch Differenzieren nach x:

$$1 = r\frac{d\varphi}{dx} - r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dx}$$

also

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r - r\cos\varphi} = \frac{1}{r(1 - \cos\varphi)}$$

Aus Gleichung II folgt ebenso und durch Einsetzen von $\frac{d\varphi}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = r\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r\sin\varphi\,\frac{1}{r(1 - \cos\varphi)} =$$
$$\frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2\varphi}{(1 - \cos\varphi)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}}$$

Bemerkung: Diese Formel zeigt, daß die Steigung einer Zykloide nur vom Rollwinkel φ und nicht vom Radius des Rollkreises abhängig ist. Wenn $\varphi = 90^0$, so ist die Steigung $= 1$, also der Winkel der Tangente $= 45^0$. Wenn $\varphi = 0$

oder 360°, so ist die Steigung $= \infty$ und der Steigungswinkel $= 90°$. Ist $\varphi = 180°$, so ist die Steigung $= 0°$. Im allgemeinen nimmt die Steigung mit dem Cosinus des Rollwinkels zu und ab.

Epizykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis auf einem anderen als Bahn, den er von außen berührt, so beschreibt jeder Punkt des Rollkreises eine Epizykloide. — Die bisher betrachtete Zykloide rollte auf einer Geraden. Da diese als Kreislinie mit unendlich großem Radius aufgefaßt werden kann, so ist die Zykloide nur ein besonderer Fall der Epizykloide.

Konstruktion: Aus der Erklärung ergibt sich, daß die Konstruktion der Epizykloide derjenigen der Zykloide entspricht. Der Unterschied besteht nur darin, daß die Parallelen zur Bahn hier konzentrische Kreise um den Mittelpunkt des festen sind. Das übrige Verfahren ist dasselbe wie bei der Zykloide (Fig. 80).

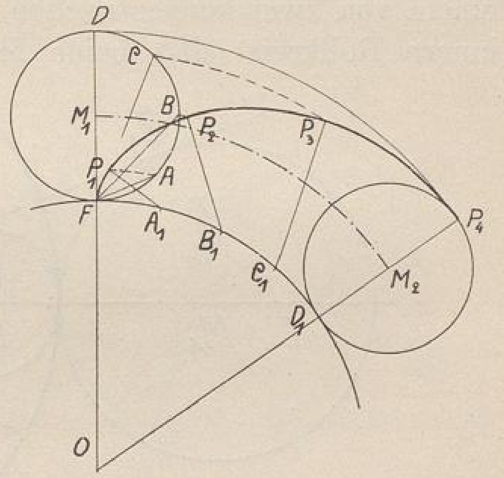

Fig. 80.

Lehrsatz: 1. Die Tangente der Epizykloide geht durch den höchsten, d. h. hier den äußersten, die Normale durch den tiefsten, d. h. hier den innersten Punkt des Rollkreises.

Beweis: Läßt man den Kreis um ein unendlich kleines Stückchen rollen, so unterscheidet sich der entstandene Bogen der Epizykloide nicht von dem der Zykloide, weil dies Stückcken der Bahn als unendlich kurze Gerade aufgefaßt werden kann. Durch den entstandenen Bogen der Epizykloide ist die Richtung der Tangente und die der Normalen gegeben, folglich haben diese dieselbe Richtung wie bei der Zykloide, jene Sätze der Zykloide gelten also auch für die Epizykloide.