Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Evolute der Epizykloide

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Lehrsatz: 2. Ist der Radius des festen Kreises $n = \frac{R}{r}$ mal so groß wie der des Rollkreises, so ist nach einer vollen Abwicklung des rollenden Kreises die abgelaufene Bahn $\frac{1}{n} = \frac{r}{R}$ des Umfanges des festen Kreises.

Beweis: Die Umfänge verhalten sich wie die Radien.

Die Evolute der Epizykloide.

Hilfssatz: Rollen zwei Rollkreise (M_1 und M_2) auf je einem von zwei konzentrischen festen Kreisen (C), sodaß der innere Rollkreis (M_2) beide festen Kreise berührt und die

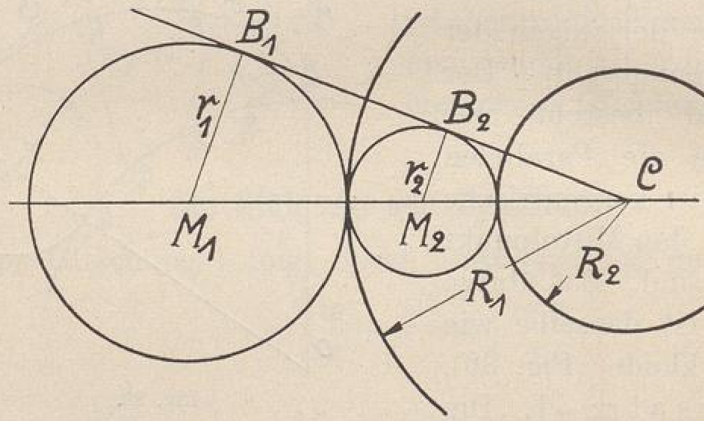

Fig. 81.

gemeinsame Tangente ($B_1 B_2$) der Rollkreise durch den Mittelpunkt C der festen Kreise geht, so verhalten sich die Radien der Rollkreise wie die der festen (Fig. 81).

Beweis: Man zieht die Radien r_1 und r_2 zu den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangente. Dann ist:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_1\,C}{M_2\,C} = \frac{r_1 + R_1}{r_2 + R_2}$$

$$r_1 r_2 + r_1 R_2 = r_1 r_2 + r_2 R_1$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Die Konstruktion dieser Kreise ergibt sich aus der Proportion $r_1 : R_1 = r_2 : R_2$ und $R_1 = 2\,r_2 + R_2$. Wäre z. B. $r_1 : R_1 = 2 : 3$ gegeben, so teilt man

$$R_1 \text{ in } 2 \cdot 2 + 3 = 7 \text{ Teile}$$

und der zweite Teilpunkt ist der Mittelpunkt des inneren Kreises. Das Verhältnis der Kreise ist dann

$$R_1 : R_2 = 7 : 3 = r_1 : r_2$$

Die Evolute. Ähnlich wie bei der Zykloide zeichnen wir den Stand des Rollkreises, wenn z. B. $\frac{3}{8}$ seines Umfanges abgerollt ist (Fig. 82); alsdann zeichnen wir auch die inneren Rollkreise nach der vorigen Konstruktion hinzu. Dann ist:

$$\widehat{B\,Q} = \widehat{F\,Q}$$

nach Konstruktion. Wir ziehen jetzt die Sehne $B\,Q$ und verlängern sie bis zum Schnitt C mit dem innern Kreise. Da sich die Radien der Rollkreise wie die der festen verhalten, so verhalten

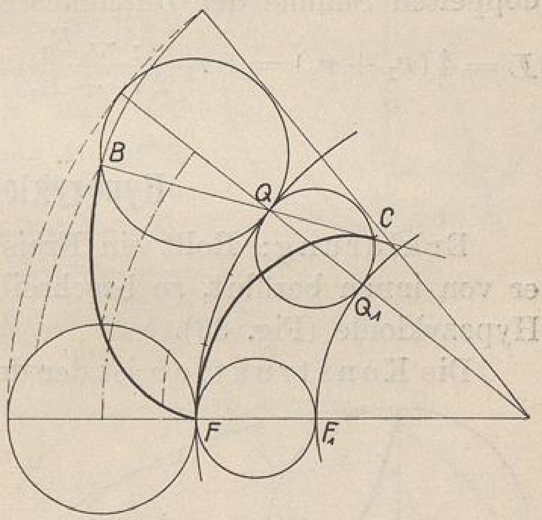

Fig. 82.

sich auch ebenso entsprechende Bogen. $\widehat{B\,Q} : \widehat{C\,Q} = \widehat{F\,Q} : \widehat{F_1\,Q_1}$. Da nun $\widehat{B\,Q} = \widehat{F\,Q}$ nach Konstruktion ist, so ist auch $\widehat{C\,Q} = \widehat{F_1\,Q_1}$.

Wenn also der kleine Rollkreis auf dem inneren festen Kreis von Q_1 bis F_1 rollt, so hat sich der Punkt C um $\widehat{Q\,C}$ gedreht, ist also an die höchste Stelle, also nach F gerückt. C und F sind also Punkte einer zweiten Epizykloide.

Wie bei der Zykloide, so ist auch hier $B\,C$ sowohl Tangente der inneren, als auch Normale und Krümmungsradius der äußeren Epizykloide. Die innere ist also Evolute der äußeren, die äußere ist Evolvente der innern und C der Krümmungspunkt für B.

Konstruktion der Evolute: Man erhält die Evolute der Epizykloide, indem man die Normale, z. B. BQ der Epizykloide über den Fußpunkt Q hinaus im Verhältnis der Radien der Rollkreise verlängert. — Dies Verhältnis war bei der Zykloide 1 : 1. — Durch entsprechende Verlängerung der Tangente nach außen erhält man die Evolvente aus der Evolute.

Die Länge der Epizykloide FC ist ähnlich wie bei der Zykloide gleich dem Krümmungsradius BC ihrer Evolvente; also ist die ganze Länge einer Epizykloide gleich der doppelten Summe der Durchmesser der Rollkreise.

$$\boldsymbol{L} = 4(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = 8\, r_1 \frac{r_1 + R_1}{2\, r_1 + R_1}$$

Hypozykloide.

Erklärung: Rollt ein Kreis in einem anderen ab, den er von innen berührt, so beschreibt jeder seiner Punkte eine Hypozykloide (Fig. 83).

Die Konstruktion ist der der Epizykloide entsprechend. Die konzentrischen Kreise liegen hier nnerhalb.

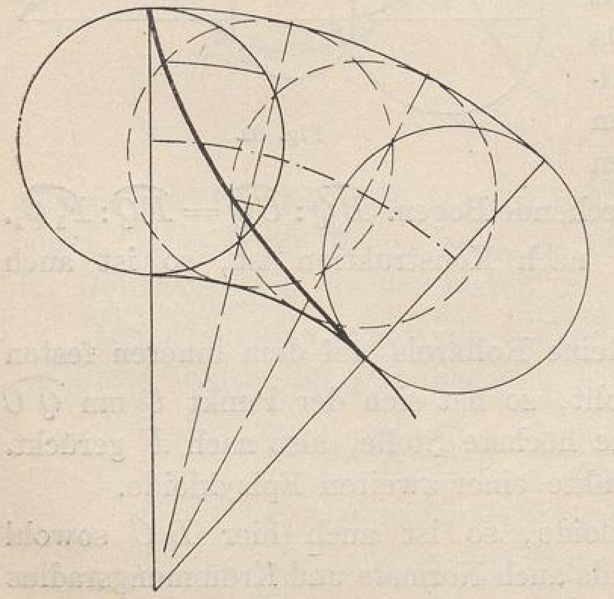

Fig. 83.

Die Tangente geht durch den höchsten, d. h. hier den i nnersten, die Normale durch den tiefsten, d. h. hier den äußersten Punkt des Rollkreises. Beweis wie oben.

Auch hier ist die nach einer vollen Abwicklung abgelaufene Bahn