Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Verlängerte Zykloiden und Trochoiden

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

einen Faden gelegt und wickelt man diesen von einem Punkte, z. B. A aus ab, so beschreibt dieser Punkt A eine Kreisevolvente (Fig. 85). Stellt man sich statt dessen vor, daß eine Tangente auf einem Kreisumfang rollt, so beschreibt jeder Punkt der Tangente ebenfalls eine Kreisevolvente.

Die Konstruktion ergibt sich aus dieser Erklärung. Man trägt von A aus gleiche Teile auf dem Kreise ab. Durch jeden Teilpunkt des Bogens zieht man eine Tangente und macht die erste gleich 1, die zweite gleich 2 dieser Teile usw. Die Endpunkte sind Punkte der Kreisevolvente.

Übersicht über die bisherigen Rollkurven.

Die erwähnten Rollkurven können als Spezialfälle der Epizykloide oder der Hypozykloide aufgefaßt werden. Bei der Zykloide ist der Bahnkreis unendlich groß. Bei der Kreisevolvente ist der Rollkreis unendlich groß. Außerdem kann man die Hypozykloide als eine Epizykloide mit negativem Rollkreis auffassen.

Verlängerte Zykloiden.

Denkt man sich mit dem Rollkreis einen Punkt außerhalb (z. B. A_1) oder innerhalb (J_1) fest verbunden, so beschreibt

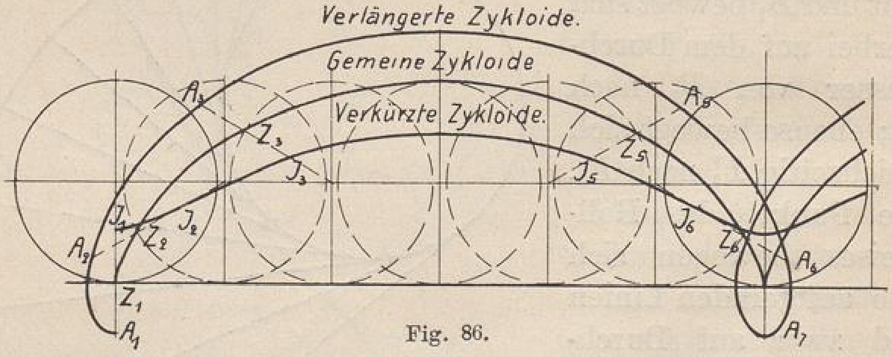

Fig. 86.

dieser Punkt eine verlängerte (A_1) oder verkürzte Zykloide (J_1) (Fig. 86).

Dasselbe tritt bei verlängerten Epi- und Hypozykloiden ein.

Bei der verlängerten wie verkürzten Zykloide ist die Bahn dieselbe geblieben, während bei der verlängerten der

Punkt A_1 einem größeren, bei der verkürzten Zykloide der Punkt J_1 einem kleineren Kreis als der Rollkreis entspricht.

Trochoiden entstehen ähnlich wie die Zykloiden. Der Kreis rollt aber nicht bloß, sondern eilt gleichzeitig durch Vorwärtsgleiten vor oder bleibt durch Rückwärtsgleiten zurück. Man trägt statt der Teile der Peripherie beliebige, aber gleiche Stücke auf der Bahn ab; diese Wegestücke können länger oder kürzer sein als die Teile der Peripherie.

Die stärker gekrümmte Trochoide entsteht, wenn der Rollkreis trotz seiner Drehung auf einer glatten Bahn im Vergleich zum reinen Abrollen zurückbleibt (bei den Lokomotivrädern während des Anfahrens und beim Slip der Schaufelräder). Bei ihrer Konstruktion trägt man kleinere Stücke auf der Bahn ab, als die Teile des Umfanges betragen. Die gekrümmtere Trochoide ist mit der verlängerten Zykloide identisch. Als Grenzfall, wo die Vorwärtsbewegung gleich Null ist, entsteht ein Kreis.

Die flache Trochoide entsteht, wenn der Rollkreis sich rascher fortbewegt, als seiner Abwicklung entspricht (bei der Kurbel eines Fahrrades). Ebenso entsteht sie, wenn ein Rad n seiner Umdrehung so gebremst wird, daß es zum Teil auf der Bahn gleitet (beim Einfahren in die Station). Bei ihrer Konstruktion trägt man größere Stücke auf der Bahn ab, als die Teile des Umfanges betragen. Die flache Trochoide ist mit der verkürzten Zykloide identisch. Als Grenzfall, wenn das Rad sich nicht mehr dreht, entsteht eine Gerade.

Der Mond macht im Jahre etwa 12 Umdrehungen um die Erde im Abstand von rund 384 000 km, während die Erde gleichzeitig einen Umlauf um die Sonne im Abstand von rund 150 000 000 km macht. Der Mond beschreibt folglich angenähert eine verkürzte Epizykloide, d. h. eine flache Trochoide.

Zykloiden- und Evolventenverzahnung.

Das Übersetzungsverhältnis zweier zusammenarbeitender Zahnräder soll konstant bleiben, die Räder sollen sich also gleichförmig, d. h. mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehen. Diese Bedingung wird nach dem Verzahnungsgesetz erfüllt, wenn die Normale im jeweiligen Berührungspunkt (Eingriffpunkt) der Zahnprofile stets durch denselben Punkt O der Verbindungslinie $M_1 M_2$ der Wellenmitten geht (Fig. 87). Dieser Punkt O teilt dann die Gerade $M_1 M_2$ im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder. Die durch O gehenden Kreise sind die Teilkreise, ihre Punkte haben dieselbe Um-

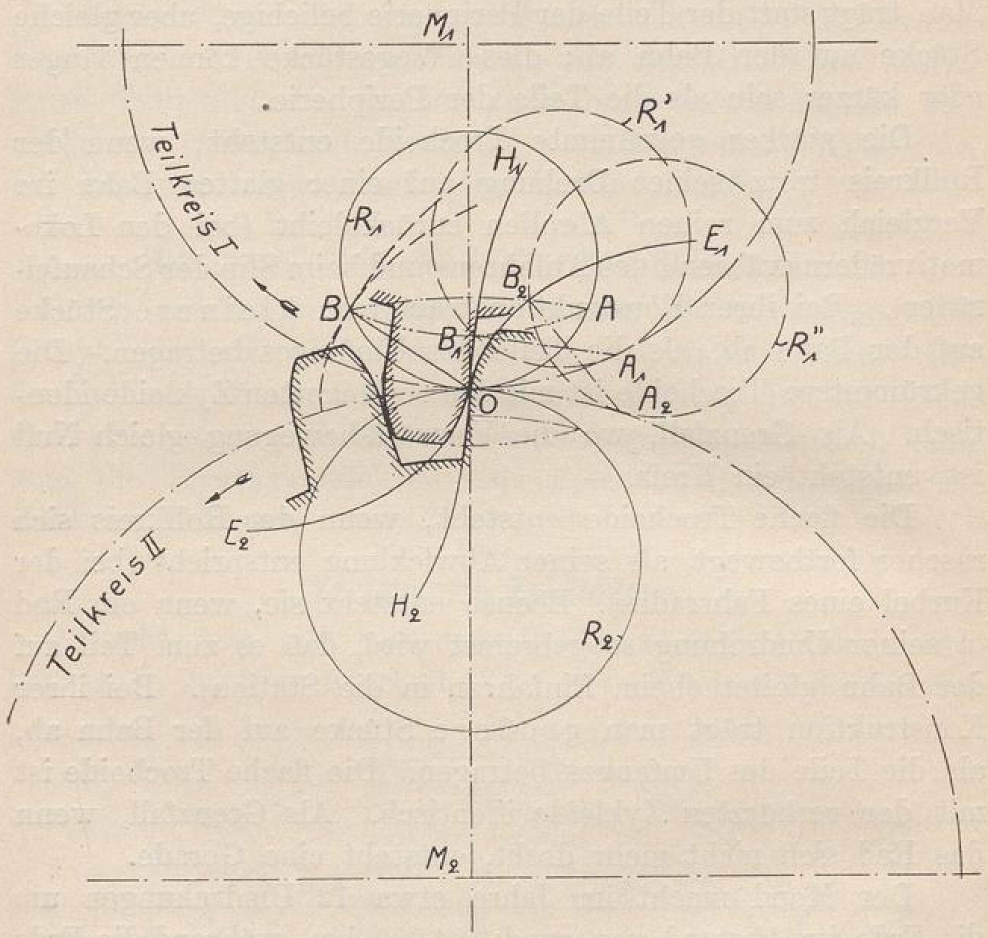

Fig. 87.

fangsgeschwindigkeit. Die Eingriffpunkte können auf einer ganz beliebig gestalteten Kurve (der Eingrifflinie) liegen. Die Beurteilung der Verzahnung gestaltet sich indessen leichter, wenn man als Eingrifflinie einen Kreis oder eine gerade Linie wählt. Man erhält dann als Zahnflanken zyklische Kurven und hat dadurch den weiteren Vorteil der einfachen Konstruktion der Zahnprofile und der genauen Formgebung bei der Bearbeitung der Zähne.

Daß die zyklischen Kurven das oben genannte Verzahnungsgesetz erfüllen, zeigen folgende Betrachtungen:

1. Zykloidenverzahnung (Fig. 87): Läßt man auf jedem der beiden Teilkreise I und II die Rollkreise R_1 und R_2 sich abwälzen, so erhält man die Epizykloiden $O\,E_1$ und $O\,E_2$ sowie die Hypozykloiden $O\,H_1$ und $O\,H_2$. Einem beliebigen Bogen des Rollkreises R_1, z. B. $\widehat{O\,A}$, entsprechen die Wälzungsbögen $\widehat{O\,A_1}$ und $\widehat{O\,A_2}$, und diesen die Kurvenpunkte B_1 bezüglich B_2, die man in der früher (Seite 95) angegebenen Weise erhält. Der Rollkreis R_1 hat dann die Lagen R_1' bzw. R_1''. Denkt man sich nun diese Kreise R_1' und R_1'' sowie die Kurven $O\,E_1$ und $O\,H_1$ mit den Teilkreisen I und II starr verbunden, und dreht die Teilkreise im Sinne der Pfeile so, daß sie aufeinanderrollen, ohne zu gleiten, so werden, weil $\widehat{O\,A_1} = \widehat{O\,A_2}$ ist, die Punkte A_1 und A_2 zugleich nach O kommen; die Kreise R_1' und R_1'' decken sich dann mit R_1, und weil $A_1\,B_1 = A_2\,B_2 = O\,A = O\,B$ ist, fallen die Punkte B_1 und B_2 mit B zusammen, d. h. die Eingriffpunkte liegen auf dem Kreise R_1. Da weiter $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$ die Normalen der Kurven sind, weil sie durch den tiefsten Punkt des Rollkreises gehen, so muß auch $O\,B$ die gemeinsame Normale im Berührungspunkt B sein; diese geht demnach durch Punkt O, erfüllt also das Verzahnungsgesetz. Ähnliche Verhältnisse liegen beim Eingriff der Kurven $O\,E_2$ und $O\,H_2$ vor, welche vom Rollkreis R_2 erzeugt werden.

Wird der Radius des Teilkreises II unendlich groß, so geht dieser Kreis in eine Gerade über, man erhält eine Zahnstange; die Epizykloide $O\,E_1$ und die Hypozykloide $O\,H_2$ werden dann Zykloiden.

2. Evolventenverzahnung (Fig. 88). Die Gerade $A_1\,O\,A_2$ ist die gemeinsame Tangente der beiden Grundkreise I und II. Die Punkte A_1 und A_2 sind ihre Berührungspunkte. Durch Wälzen der Geraden $O\,A_1$ auf Grundkreis I entsteht die Evolvente $O\,E_1$, durch Wälzen der Geraden $O\,A_2$ auf dem Grundkreis II entsteht die Evolvente $O\,E_2$. Die Wälzungsbögen $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$ seien gleich. Dem Punkte B_1 entspricht der Kurvenpunkt P_1, dem Punkte B_2 der Kurvenpunkt P_2. Denkt man sich die so entstandenen Kurven und die Geraden $B_1\,P_1$ und $B_2\,P_2$ mit den Grundkreisen starr verbunden, und diese so in Richtung der Pfeile gedreht, daß ihre Punkte dieselbe Umfangsgeschwindigkeit haben, so werden zugleich Punkt B_1 nach A_1 und B_2 nach A_2 fallen. Die Kurvenpunkte P_1 und P_2 kommen dann auf die Tangente $A_1\,A_2$ zu liegen, da ja auch $B_1\,P_1$ bzw. $B_2\,P_2$ Tangenten der Grundkreise sind. Punkt P_1 und P_2 müssen auf $A_1\,A_2$ zusammenfallen, da:

$$\overline{B_1\,P_1} = \overline{A_1\,O} + \widehat{A_1\,B_1}$$
$$\overline{B_2\,P_2} = \overline{A_2\,O} - \widehat{A_2\,B_2}$$
$$\overline{B_1\,P_1} + \overline{B_2\,P_2} = \overline{A_1\,O} + \overline{A_2\,O} = \overline{A_1\,A_2} = \text{Konstante.}$$

Die Evolventen berühren sich also stets auf $A_1 A_2$, d. h. die Eingrifflinie ist eine Gerade. Da ferner $B_1 P_1$ und $B_2 P_2$ Normalen der Evolventen sind und bei der Drehung auf $A_1 A_2$ fallen, so geht die gemeinsam Normale im Berührungspunkt stets durch Punkt O.

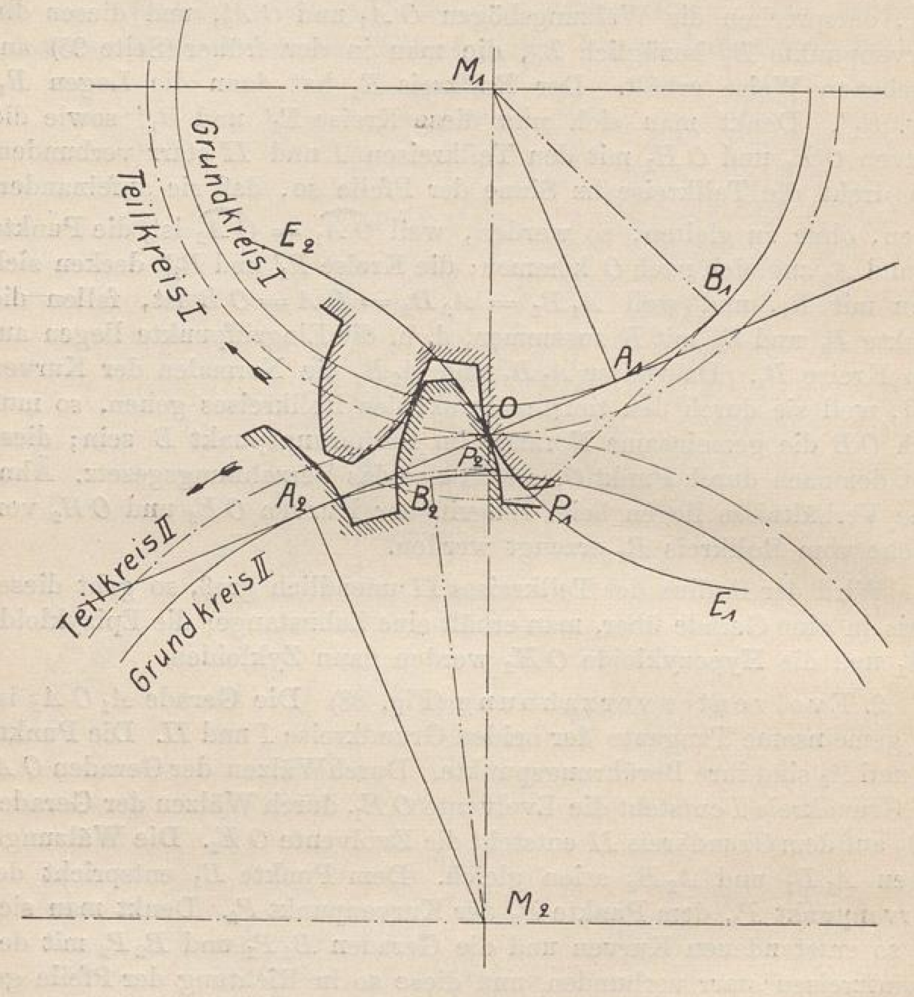

Fig. 88.

Da ferner $\Delta\, M_1 O A_1 \sim M_2 O A_2$,

so ist $$\frac{M_1 A_1}{M_2 A_2} = \frac{M_1 O}{M_2 O}$$

Bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit in den Grundkreisen sind also auch die Umfangsgeschwindigkeiten in den Teilkreisen gleich, und O teilt die Gerade $M_1 M_2$ im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Räder. Das Verzahnungsgesetz ist also erfüllt.