Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Andere Kurven.

Andere Kurven.

Die Adiabate.

Ähnlich wie bei der Isotherme (Seite 68) nehmen wir 1 cbm Gas von 8 atm Druck und lassen dies Gas sich ausdehnen (Fig. 89). Bliebe die Temperatur des Gases dieselbe, so würde es sich isothermisch ausdehnen, wie früher besprochen wurde. Wird aber keine Wärme von außen zugeführt, so sinkt die Temperatur während der Ausdehnung. Infolgedessen sinkt der Druck in stärkerem Maße, als das Volumen zunimmt, und zwar ist:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^k,$$

wobei $k = 1{,}4$, dem Verhältnis der spezifischen Wärmen der Gase ist. Die Gleichung der Adiabate ist also:

$$\boldsymbol{v_0^k \cdot p_0 = v_1^k \cdot p_1 = \textbf{Konstante} = C.}$$

Wir berechnen nun eine Tabelle, indem wir der Reihe nach $v = 8$, 4, 2 und 1 setzen und die zugehörigen Drucke berechnen; die Konstante ist hier $C = 1^{1,4} \cdot 8 = 8$.

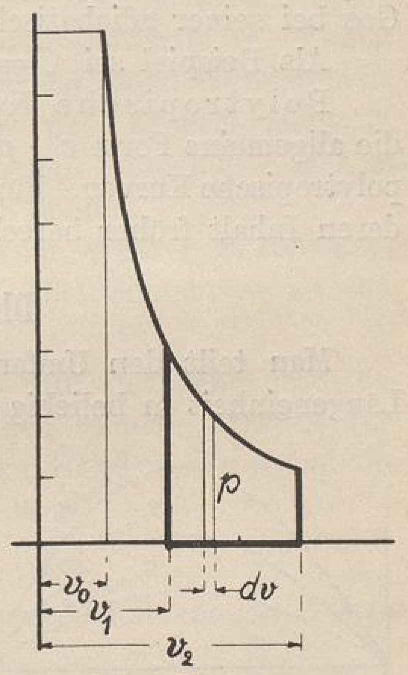

Fig. 89.

Alsdann wird auf der horizontalen Achse das Volumen und auf der vertikalen der zugehörige Druck abgetragen, und man erhält eine Kurve, die der adiabatischen Ausdehnung des Gases entspricht. Diese Kurve ist steiler als die Isotherme.

Inhalt: Um den Inhalt einer unter der Adiabate liegenden Fläche zu finden, zerlegen wir diese Fläche in vertikale Streifen. Jeder hat die Höhe p und die Breite Δv bzw. dv, sein Inhalt ist also $dF = p \cdot dv$. Die Fläche ist demnach im allgemeinen:

$$F = \int d\,F = \int p \cdot d\,v = \int \frac{C}{v^k} \cdot d\,v = \int C \cdot v^{-k} \cdot d\,v$$

Die Fläche von v_1 bis v_2 ist also

$$F = \int_{v_1}^{v_2} C \cdot v^{-k} \cdot dv = \left[\frac{C \cdot v^{-k+1}}{-k+1}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{C}{-0,4}\,(v_2^{-0,4} - v_1^{-0,4})$$

$$= \frac{C}{0,4}\left(\frac{1}{v_1^{0,4}} - \frac{1}{v_2^{0,4}}\right).$$

Die so berechnete Fläche stellt die Arbeit dar, welche das Gas bei seiner adiabatischen Ausdehnung von v_1 bis v_2 leistet.

Als Beispiel sei $C = 8$ und $v_1 = 2$ cbm, $v_2 = 3$ cbm.

Polytropische Kurven: Kurven, deren Gleichungen die allgemeine Form $v^n \cdot p =$ Konstante $= C$ haben, nennt man polytropische Kurven. Für $n = 1$ ergibt sich die Isotherme, deren Inhalt früher berechnet wurde.

Die Sinuslinie.

Man teilt den Umfang eines Kreises vom Radius $R = 1$ Längeneinheit in beliebig viele Teile und trägt die Länge der Bogenstücke aneinander auf eine horizontale Achse ab. Die ganze Strecke ist also gleich 2π-Einheiten, gleich dem ganzen Umfang; in Fig. 90 ist nur der halbe Umfang π abgewickelt. Alsdann trägt man den zu jedem Bogen x des Einheitskreises gehörigen Sinus y an der zugehörigen Stelle der horizontalen Achse als Ordinate senkrecht nach oben ab. Die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinate heißt Sinuslinie. Ihre Gleichung ist $y = \sin x$.

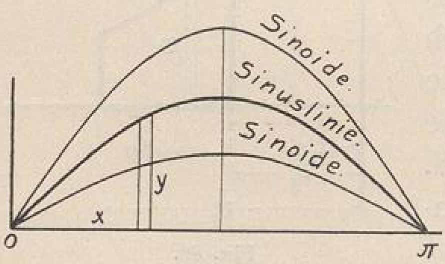

Fig. 90.

Die Steigung: Durch Differenzieren der Gleichung $y = \sin x$ erhält man die Steigung $\frac{dy}{dx} = \cos x$. Die Sinuslinie steigt also so, wie der Cosinus des betreffenden Winkels angibt.

Bei 0^0 beträgt der Cosinus 1, mithin ist die Steigung hier gleich 1. Der zugehörige Steigungswinkel ist demnach 45^0, da $tg\ 45^0 = 1$ ist. Bei 0^0 steigt also die Tangente der Sinuslinie unter 45^0 an.

Setzt man die Steigung $y' = \cos x$ gleich Null, so erhält man die Lage des Maximums bei $\frac{\pi}{2}$, d. h. bei $\frac{1}{4}$ des Umfangs und des Minimums bei $\frac{3\pi}{2}$, d. h. bei $\frac{3}{4}$ des Umfangs. Beide Extremwerte sind gleich dem Radius, also hier gleich ± 1.

Setzt man den zweiten Differentialquotienten $y'' = -\sin x$ gleich Null, so erhält man bei 0, π und 2π einen Wendepunkt.

Ähnlichkeit: Ist der Radius des Kreises nicht 1, sondern r, so sind alle Längen der neuen Sinuslinie r mal so groß. Alle Sinuslinien sind einander ähnlich.

Die Steigung ($\cos x$) ist nur vom Winkel x abhängig, nicht vom Radius; sie ist also bei allen Sinuslinien an entsprechenden Punkten gleich groß.

Inhalt: Wenn man sich die von der Sinuslinie begrenzte Fläche in senkrechte unendlich schmale Streifen zerlegt denkt, so hat jeder Streifen die Höhe $r \cdot \sin x$ und die Grundlinie $r \cdot dx$, demnach die Fläche

$$dF = r^2 \cdot \sin x \cdot dx.$$

Die gezeichnete, dem halben Umfang entsprechende Fläche ist also:

$$F = \int_0^\pi r^2 \cdot \sin x \cdot dx = r^2 \int_0^\pi \sin x \cdot dx = -r^2 \Big[\cos x\Big]_0^\pi$$
$$= -r^2 (\cos \pi - \cos 0) = -r^2 (-1 - 1) = 2r^2$$

Die Fläche der Sinuslinie ist also gleich dem doppelten Quadrat des Radius. Man prüfe dies Resultat durch Zeichnung.

Die Inhalte verschiedener Sinuslinien verhalten sich wie die Quadrate der Radien[1]).

---

[1]) Elektrotechnische Anwendungen der Sinuslinie finden sich: Elemente der Differential- und Integralrechnung v. Düsing. Seite 78 u. 79.

Sinoide.

Trägt man nicht die Sinus selbst, sondern Vergrößerungen oder Verkleinerungen dieser Stücke senkrecht nach oben auf, so erhält man als Kurve eine Sinoide. Eine solche Kurve bekommt man auch, wenn man die Sinus zwar selbst in wahrer Größe, aber die Bogen vergrößert oder verkleinert aufträgt.

Allgemeine Betrachtungen an Kurven.

Die Bogenlänge.

Die Länge s einer beliebigen Kurve (Fig. 91), die zwischen zwei den Abszissen x_1 und x_2 entsprechenden Punkten der Kurve liegt, denkt man sich in unendlich kleine Teile zerlegt. Jedes Teilchen ds ist dann:

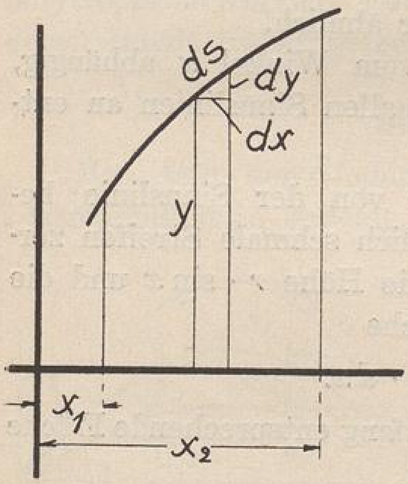

Fig. 91.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Die Länge der Kurve zwischen den Abszissen x_1 und x_2 ist also:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Die Fläche.

Den Inhalt der Fläche zwischen einer Kurve, der Abszissenachse und den Ordinaten y_1 und y_2 haben wir bei den Kegelschnitten wiederholt berechnet. Ähnlich wie bei diesen zerlegen wir auch bei einer beliebigen Kurve mit bekannter Gleichung die Fläche in senkrechte Streifen von der Länge y und der Breite dx. Dann ist jeder Streifen $y \cdot dx$. Die Fläche zwischen y_1 und y_2 ist also: