Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Sinuslinie

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

$$F = \int d F = \int p \cdot dv = \int \frac{C}{v^k} \cdot dv = \int C \cdot v^{-k} \cdot dv$$

Die Fläche von v_1 bis v_2 ist also

$$F = \int_{v_1}^{v_2} C \cdot v^{-k} \cdot dv = \left[\frac{C \cdot v^{-k+1}}{-k+1}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{C}{-0{,}4}\,(v_2^{-0{,}4} - v_1^{-0{,}4})$$

$$= \frac{C}{0{,}4}\left(\frac{1}{v_1^{0{,}4}} - \frac{1}{v_2^{0{,}4}}\right).$$

Die so berechnete Fläche stellt die Arbeit dar, welche das Gas bei seiner adiabatischen Ausdehnung von v_1 bis v_2 leistet.

Als Beispiel sei $C = 8$ und $v_1 = 2$ cbm, $v_2 = 3$ cbm.

Polytropische Kurven: Kurven, deren Gleichungen die allgemeine Form $v^n \cdot p =$ Konstante $= C$ haben, nennt man polytropische Kurven. Für $n = 1$ ergibt sich die Isotherme, deren Inhalt früher berechnet wurde.

Die Sinuslinie.

Man teilt den Umfang eines Kreises vom Radius $R = 1$ Längeneinheit in beliebig viele Teile und trägt die Länge der Bogenstücke aneinander auf eine horizontale Achse ab. Die ganze Strecke ist also gleich 2π-Einheiten, gleich dem ganzen Umfang; in Fig. 90 ist nur der halbe Umfang π abgewickelt. Alsdann trägt man den zu jedem Bogen x des Einheitskreises gehörigen Sinus y an der zugehörigen Stelle der horizontalen Achse als Ordinate senkrecht nach oben ab. Die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinate heißt Sinuslinie. Ihre Gleichung ist $y = \sin x$.

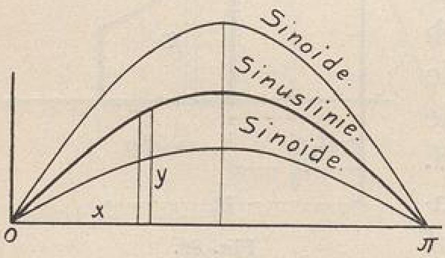

Fig. 90.

Die Steigung: Durch Differenzieren der Gleichung $y = \sin x$ erhält man die Steigung $\frac{dy}{dx} = \cos x$. Die Sinuslinie steigt also so, wie der Cosinus des betreffenden Winkels angibt.

Bei 0^0 beträgt der Cosinus 1, mithin ist die Steigung hier gleich 1. Der zugehörige Steigungswinkel ist demnach 45^0, da $tg\ 45^0 = 1$ ist. Bei 0^0 steigt also die Tangente der Sinuslinie unter 45^0 an.

Setzt man die Steigung $y' = \cos x$ gleich Null, so erhält man die Lage des Maximums bei $\frac{\pi}{2}$, d. h. bei $\frac{1}{4}$ des Umfangs und des Minimums bei $\frac{3\pi}{2}$, d. h. bei $\frac{3}{4}$ des Umfangs. Beide Extremwerte sind gleich dem Radius, also hier gleich ± 1.

Setzt man den zweiten Differentialquotienten $y'' = -\sin x$ gleich Null, so erhält man bei 0, π und 2π einen Wendepunkt.

Ähnlichkeit: Ist der Radius des Kreises nicht 1, sondern r, so sind alle Längen der neuen Sinuslinie r mal so groß. Alle Sinuslinien sind einander ähnlich.

Die Steigung ($\cos x$) ist nur vom Winkel x abhängig, nicht vom Radius; sie ist also bei allen Sinuslinien an entsprechenden Punkten gleich groß.

Inhalt: Wenn man sich die von der Sinuslinie begrenzte Fläche in senkrechte unendlich schmale Streifen zerlegt denkt, so hat jeder Streifen die Höhe $r \cdot \sin x$ und die Grundlinie $r \cdot dx$, demnach die Fläche

$$dF = r^2 \cdot \sin x \cdot dx.$$

Die gezeichnete, dem halben Umfang entsprechende Fläche ist also:

$$F = \int_0^\pi r^2 \cdot \sin x \cdot dx = r^2 \int_0^\pi \sin x \cdot dx = - r^2 \Big[\cos x\Big]_0^\pi$$
$$= - r^2 (\cos \pi - \cos 0) = - r^2 (-1 - 1) = 2 r^2$$

Die Fläche der Sinuslinie ist also gleich dem doppelten Quadrat des Radius. Man prüfe dies Resultat durch Zeichnung.

Die Inhalte verschiedener Sinuslinien verhalten sich wie die Quadrate der Radien[1]).

---

1) Elektrotechnische Anwendungen der Sinuslinie finden sich: Elemente der Differential- und Integralrechnung v. Düsing. Seite 78 u. 79.