Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Allgemeine Ableitungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Sinoide.

Trägt man nicht die Sinus selbst, sondern Vergrößerungen oder Verkleinerungen dieser Stücke senkrecht nach oben auf, so erhält man als Kurve eine Sinoide. Eine solche Kurve bekommt man auch, wenn man die Sinus zwar selbst in wahrer Größe, aber die Bogen vergrößert oder verkleinert aufträgt.

Allgemeine Betrachtungen an Kurven.

Die Bogenlänge.

Die Länge s einer beliebigen Kurve (Fig. 91), die zwischen zwei den Abszissen x_1 und x_2 entsprechenden Punkten der Kurve liegt, denkt man sich in unendlich kleine Teile zerlegt. Jedes Teilchen ds ist dann:

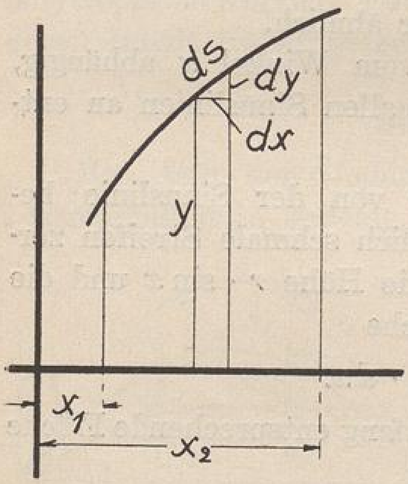

Fig. 91.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Die Länge der Kurve zwischen den Abszissen x_1 und x_2 ist also:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Die Fläche.

Den Inhalt der Fläche zwischen einer Kurve, der Abszissenachse und den Ordinaten y_1 und y_2 haben wir bei den Kegelschnitten wiederholt berechnet. Ähnlich wie bei diesen zerlegen wir auch bei einer beliebigen Kurve mit bekannter Gleichung die Fläche in senkrechte Streifen von der Länge y und der Breite dx. Dann ist jeder Streifen $y \cdot dx$. Die Fläche zwischen y_1 und y_2 ist also:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} = f(x) \cdot dx$$

Oft sind Flächen von Kurven begrenzt, deren Gleichung nicht bekannt oder sehr verwickelt ist. Der Inhalt kann dann auf verschiedene Weise ermittelt werden.

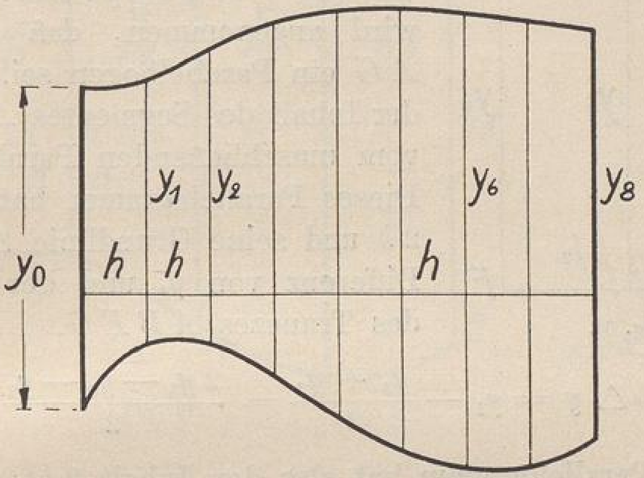

Fig. 92.

a) Trapezregel (Fig. 92): Man teilt die gegebene Fläche in eine beliebige Anzahl Streifen von der gleichen Breite h und sieht die Streifen als Trapeze an. Dann ist Streifen F_1, F_2 usw.:

$$F_1 = h \frac{y_0 + y_1}{2}$$

$$F_2 = h \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_8 = h \frac{y_7 + y_8}{2}$$

Die ganze Fläche $F = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots . \frac{y_8}{2}\right)$.

An Stellen mit starker Krümmung zerlegt man die Streifen in schmälere Streifen durch Zwischenordinaten und kann die zerlegten Streifen für sich nach der Trapezregel berechnen.

b) Simpsonsche Regel: Man teilt die gegebene Fläche durch Ordinaten in eine gerade Anzahl von Streifen mit gleicher Breite h, z. B. in Fig. 93 in 2 Streifen. Die Ordinaten sind y_0, y_1, y_2. Wir verbinden A mit G und ziehen durch E eine Parallele zu $A\,G$.

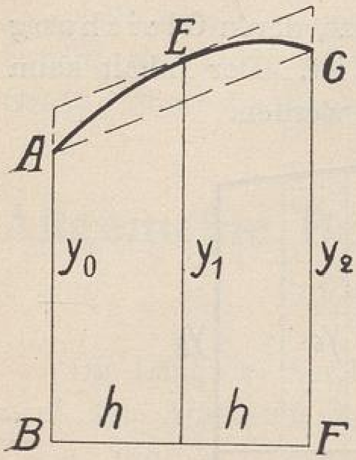

Fig. 93.

Bei der Simpsonschen Regel wird angenommen, daß der Bogen $A\,G$ ein Parabelbogen sei. Dann ist der Inhalt des Segmentes $A\,E\,G = {}^2/_3$ vom umschließenden Parallelogramm. Dieses Parallelogramm hat die Höhe $2\,h$ und seine Grundlinie $\triangle\,y$ ist die Differenz von y_1 und der Mittellinie des Trapezes $A\,B\,F\,G$.

$$\triangle\,y = y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{2\,y_1 - y_0 - y_2}{2}$$

Das Parallelogramm hat also den Inhalt $2\,h \cdot \triangle\,y$.

$$\text{Parabelsegment} = \frac{2}{3}\,2\,h \cdot \triangle\,y = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot h\,\frac{2\,y_1 - y_0 - y_2}{2}$$

$$= \frac{h}{3}\,(4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2).$$

Hierzu kommt noch das Trapez:

$$A\,B\,F\,G = 2\,h\,\frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{h}{3}\,(3\,y_0 + 3\,y_2)$$

Als Summe von Parabelsegment und Trapez erhält man die Fläche $F_1 = \frac{h}{3}\,(4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2 + 3\,y_0 + 3\,y_2)$

$$F_1 = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

Diese Formel gilt auch für Flächen, welche oben und unten durch Kurven begrenzt sind, z. B. F_1 in Fig. 94.

Ist nun die Fläche $A\,B\,C\,D$ (Fig. 94) zu ermitteln, so teilt man sie in eine gerade Anzahl von Teilen von gleicher

Breite h. Die berechnete Fläche F_1 ist der erste Teil der gegebenen Fläche $ABCD$. Letztere ergibt sich als Summe der Teile:

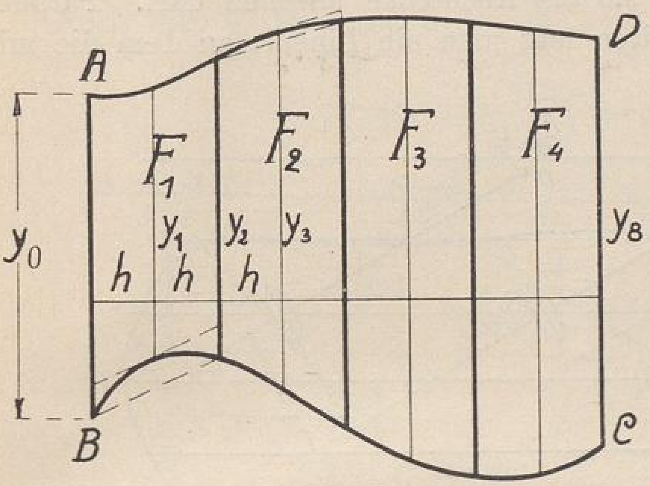

Fig. 94.

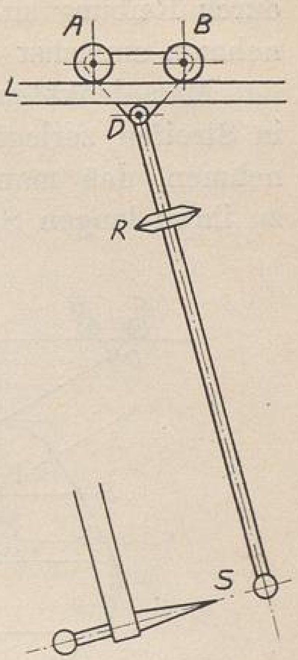

Fig. 95.

$$F_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$
$$F_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4\,y_3 + y_4)$$
$$F_3 = \frac{h}{3}(y_4 + 4\,y_5 + y_6)$$
$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + 2\,y_4 + 4\,y_5 + y_6).$$

Diese Formel liefert größere Genauigkeit als die Trapezregel, weil sich die Parabel besser als die Gerade an eine Kurve anschmiegt.

c) Der Integrator (Fig. 95). Den Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche kann man auch ohne Rechnung durch Ausmessen mit dem Integrator finden. An einem um D drehbaren Arm sitzt eine Spitze S und zugleich eine Rolle R, welche beide auf dem Papier aufliegen. Umfährt man mit der Spitze S die Umrisse der gegebenen Fläche, so wird die Rolle durch Reibung auf dem Papier in Umdrehung versetzt. Wir nehmen zunächst an, die Rolle befände sich an der Spitze S.

Man denkt sich jetzt die gegebene Fläche durch Parallelen in Streifen zerlegt (Fig. 96); diese kann man so schmal annehmen, daß man sie als Rechtecke ansehen darf. Parallel zu ihren langen Seiten legt man ein Lineal, an dem die mit

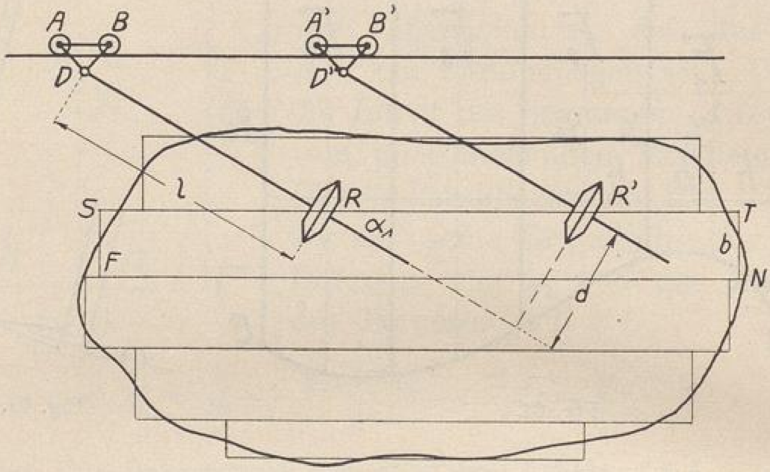

Fig. 96.

dem Drehpunkt D fest verbundenen Rollen A und B entlangrollen. Fährt man mit der Rolle über eine Seite, z. B. von R bis R', so können wir uns diese Bewegung der Rolle zusammengesetzt denken aus einem Schieben der Rolle längs ihrer Achse und einem Drehen der Rolle senkrecht hierzu um ihre Achse (Fig. 96). Also ist die Drehung auf dem Wege $R\,R'$

$$d = R\,R' \cdot \sin \alpha_1.$$

Die Drehung ist also proportional dem Sinus des Winkels zwischen dem Arm und der durchlaufenen Strecke.

Befindet sich die Rolle nun nicht an der Spitze S, sondern bei R (Fig. 95), so führt sie bei ihrer Drehung sowohl wie bei ihrer Schiebung dieselben Bewegungen aus wie die Spitze S, was man sich in Fig. 96 leicht hineinzeichnen kann.

Beim Durchlaufen der Seite $ST = a$ (Fig. 97) beträgt die Drehung also $+ a \cdot \sin \alpha_1$.
Beim Zurücklaufen auf der unteren Seite NF beträgt die Drehung $- a \cdot \sin \alpha_2$.

Nach Fig. 97 ist: $\sin \alpha_1 = \frac{r}{l}$

$$\sin \alpha_2 = \frac{r + b}{l}$$

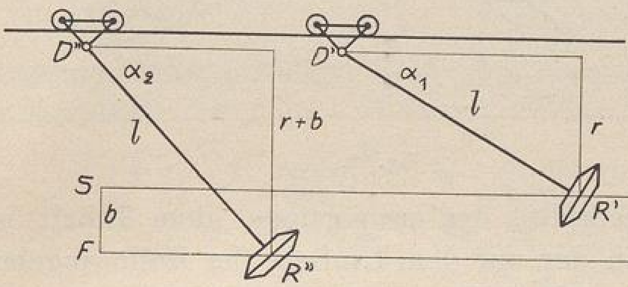

Fig. 97.

Die Drehung beim Durchlaufen der oberen und unteren Seite beträgt also:

$$a \frac{r}{l} - a \frac{r + b}{l} = \frac{a}{l} (r - r - b) = - \frac{a b}{l}$$

Diese Drehung der Rolle ist also proportional dem Inhalt $a b$.

Es bleibt noch das Durchfahren der Abstände links (SF) und rechts (TN). Denkt man sich diese in unendlich viele kleine Teile zerlegt, so werden entsprechende Stücke links und rechts in entgegengesetztem Sinne und unter demselben Winkel durchlaufen. Die Drehungen auf beiden Rechtecksseiten b heben sich also auf, auch wenn die Rolle R sich nicht an der Spitze befindet.

Die Gesamtdrehung beim Umfahren des ganzen Rechteckes bleibt also $-\frac{a b}{l}$, also proportional dem Inhalt.

Umfährt man nun das folgende, z. B. in Fig. 96 unter $SFNT$ liegende Rechteck, so heben sich die Drehungen auf dem gemeinsamen Stück der Seite FN auf.

Statt also sämtliche Rechtecke einzeln zu umfahren, braucht man nur ihren Gesamtumriß, d. h. den Umriß der gegebenen Fläche, zu umfahren. Die Rolle hat sich hierbei um einen

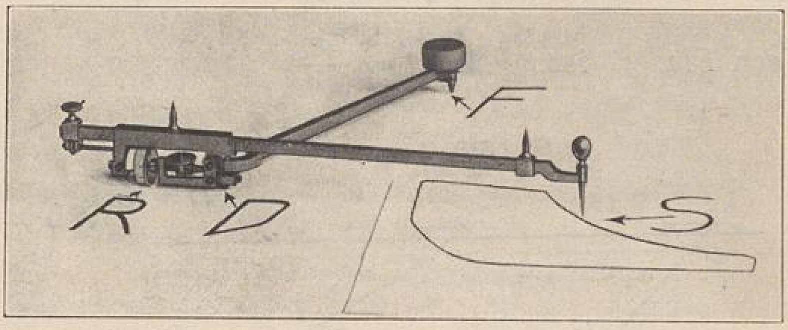

Fig. 98.

Betrag weitergedreht, der proportional dem Inhalt ist und welchen man an der auf dem Umfang der Rolle angebrachten Teilung abliest. Die Teilung ist so gewählt, daß man direkt den Inhalt zahlenmäßig erhält.

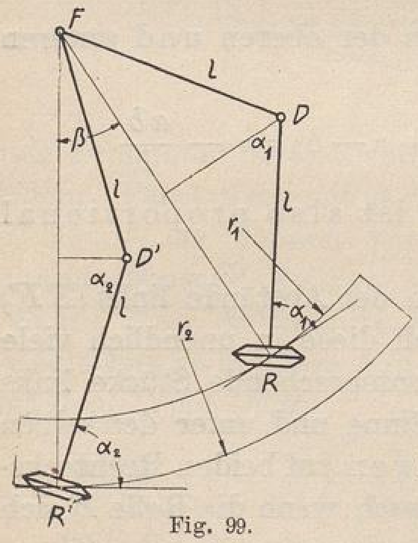

Fig. 99.

d) Polarplanimeter. Gebräuchlicher als dieser Integrator ist das Polarplanimeter (Fig. 98 und 99). Es unterscheidet sich vom vorherigen dadurch, daß die Punkte A und B (Fig. 95 und 96) zu einem vereinigt sind, der einen festen Drehpunkt F bildet.

Wir denken uns die gegebene Fläche durch konzentrische Kreise in Ringe zerlegt und stecken die feste Nadel F des Planimeters in ihren Mittelpunkt.

Auch hier können wir uns die Bewegung der Rolle über ein Stück der Kreise aus einem Schieben der Rolle längs ihrer Achse und einem Drehen senkrecht hierzu um ihre Achse zusammengesetzt denken. Die Drehung ist hierbei wie oben proportional dem Sinus des Winkels zwischen Arm und der durchlaufenen Strecke, d. h. hier zwischen Arm und Tangente an dem Bogen.

Die Drehung der Rolle (Fig. 99) beim Bewegen über den Bogen $\widehat{r_1 \cdot \beta}$ des inneren Kreises ist demnach $+\widehat{r_1 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_1$ und beim äußeren Kreis $-\widehat{r_2 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_2$.

Nun ist aber in den gleichschenkligen Dreiecken FDR und $FD'R'$:

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{r_1}{2} : l \\ \sin \alpha_2 &= \frac{r_2}{2} : l \end{aligned}\right\}$$ Diese Werte werden eingesetzt und

die Drehung beim Bewegen über den inneren und äußeren Bogen ist also:

$$+\widehat{r_1 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_1 - \widehat{r_2 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_2 =$$

$$+\frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2\,l} - \frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2\,l} =$$

$$\frac{1}{l}\left(\frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2} - \frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2}\right)$$

Der Ausdruck $\frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2}$, oder $\frac{1}{2} \times$ Radius $\times$ Bogen ist aber der Inhalt eines Sektors, dasselbe gilt von $\frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2}$.

Also ist die Drehung $= \frac{1}{l} \times$ Differenz der Sektoren,

$= \frac{1}{l} \times$ Inhalt des Ringes.

Diese Drehung ist also proportional dem Inhalt des Ringes.

Die Drehung beim Überfahren der Abstände der Kreise hebt sich wie oben auf.

Ebenso braucht man nicht jeden Ring zu umfahren, sondern nur den gesamten Umriß der Ringe, d. h. den Umriß der gegebenen Fläche. Die Gesamtdrehung der Rolle ist also auch hier proportional dem Inhalt der ganzen Fläche. Man liest diesen Inhalt an der Teilung auf dem Umfang der Rolle ab. Wegen der einfacheren Handhabung wird in der Praxis das Polarplanimeter dem Integrator vorgezogen.

Allgemeine Ableitung der Berührungsgrößen.

Es sei der Punkt P_1 einer beliebigen Kurve (Fig. 100) mit den Koordinaten x_1 und y_1 gegeben. Dann sei t die Länge der Tangente und n die Länge der Normalen zwischen dem Berührungspunkt P_1 und der X-Achse; t' und n' seien die entsprechenden Projektionen von t und n auf die X-Achse.

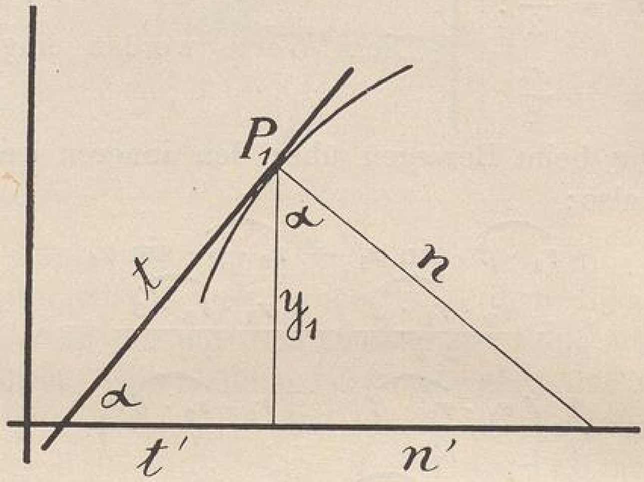

Fig. 100.

Letztere seien zuerst berechnet:[1])

Die Subnormale $n' = y_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_1 \cdot y'$

Die Subtangente $t' = \dfrac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{y_1}{y'}$

Hieraus ergibt sich:

Die Normale

$$n = \sqrt{n'^2 + y_1^2} = \sqrt{y_1^2 y'^2 + y_1^2} = y_1 \sqrt{1 + y'^2}$$

Die Tangente

$$t = \sqrt{t'^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(\frac{y_1}{y'}\right)^2 + y_1^2} = y_1 \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}$$

Diese Formeln gelten für jede Kurve, deren Gleichung bekannt ist.

---

[1]) Anm.: Statt $\dfrac{dy}{dx}$ schreibt man kurz y'.

1. Anwendung auf die Parabel. Man berechnet den Differentialquotienten y' der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2\,p\,x$$

aus und setzt ihn in obige Formeln ein. Es ergibt sich, daß

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

ist. Die Steigung beim Berührungspunkt P_1 ist also $\frac{p}{y_1}$. Setzt man dies ein und $y_1^2 = 2\,p\,x_1$, so erhält man:

$$\text{Subnormale } n' = y_1 \frac{p}{y_1} = p$$

$$\text{Subtangente } t' = \frac{y_1\,y_1}{p} = \frac{y_1^{\,2}}{p} = \frac{2\,p\,x_1}{p} = 2\,x_1$$

Normale

$$n = y_1 \sqrt{1 + \frac{p^2}{y_1^{\,2}}} = \frac{y_1}{y_1} \sqrt{y_1^{\,2} + p^2} = \sqrt{y_1^{\,2} + p^2}$$

Tangente

$$= y_1 \sqrt{1 + \frac{y_1^{\,2}}{p^2}} = \sqrt{y_1^{\,2} + \frac{y_1^{\,4}}{p^2}} = \sqrt{y_1^{\,2} + \frac{4\,p^2\,x_1^{\,2}}{p^2}} = \sqrt{y_1^{\,2} + 4\,x_1^{\,2}}$$

2. Anwendung auf die Ellipse. Der Differentialquotient der Ellipsengleichung ist nach Gleichung (22):

$$y' = -\frac{x\,b^2}{y\,a^2}$$

Die Steigung am Berührungspunkt P_1 ist also: $-\frac{x_1\,b^2}{y_1\,a^2}$ und wird in obige Formeln eingesetzt unter Fortlassung des Vorzeichens, weil nur die absolute Länge in Betracht kommt.

$$\text{Subnormale } n' = y_1 \frac{x_1\,b^2}{y_1\,a^2} = \frac{x_1\,b^2}{a^2}.$$

$$\text{Subtangente } t' = y_1 \frac{y_1\,a^2}{x_1\,b^2} = \frac{y_1^{\,2}\,a^2}{x_1\,b^2} = \frac{a^2\,b^2 - x_1^{\,2}\,b^2}{x_1\,b^2} = \frac{a^2 - x_1^{\,2}}{x_1}$$

$$\text{Normale } n = y_1 \sqrt{1 + \frac{x_1^{\,2}\,b^4}{y_1^{\,2}\,a^4}}$$

$$\text{Tangente } t = y_1 \sqrt{1 + \frac{y_1^{\,2}\,a^4}{x_1^{\,2}\,b^4}}$$

3. Anwendung auf die Hyperbel. Der Differentialquotient der Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich von dem der Ellipse nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen. Da auch hier das Vorzeichen ohne Belang ist, so stimmen die Formeln mit denen der Ellipse überein.

Sämtliche Formeln, die wir unter 1, 2, 3 für die Berührungsgrößen der Kegelschnitte erhalten haben, sind dieselben wie die früher auf Seite 41, 55 und 63 abgeleiteten.

Übung: 1. Man berechne die Subtangente der gleichseitigen Hyperbel $x y = C$.

2. Welche Konstruktion von Tangenten ergibt sich hieraus?

3. Man berechne die Subtangenten der höheren Parabeln $y^r = q x$.

Die Krümmung.

Legt man an eine Kurve, z. B. an eine Ellipse, Fig. 101, eine Tangente, so kann man durch ihren Berührungspunkt unendlich viele Kreise zeichnen, welche dieselbe Tangente berühren. Ellipse und Kreise haben hier dieselbe Steigung, also auch denselben ersten Differentialquotienten.

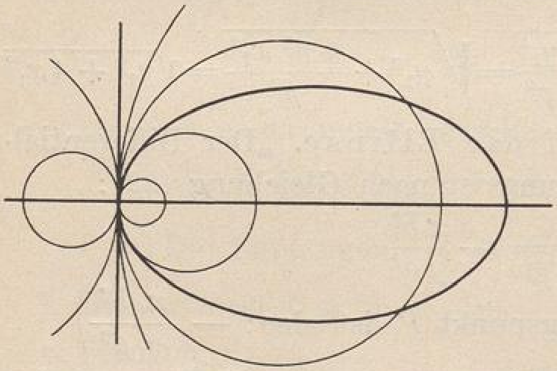

Fig. 101.

Da nun eine Tangente durch Drehung einer Sehne entstanden ist, so hat sie mit der berührten Kurve zwei im Berührungspunkt zusammenfallende Punkte gemeinsam. Alle in Fig. 101 gezeichneten Kurven haben eine Tangente und demnach zwei im Berührungspunkt zusammenfallende Punkte gemeinsam, sie berühren sich.

Unter den gezeichneten Kreisen schmiegen sich viele am Berührungspunkt der Ellipse durchaus nicht an; die linksliegenden krümmen sich sogar nach der entgegengesetzten Seite, obwohl sie zwei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam haben.

Schon der Augenschein lehrt, daß unter den vielen möglichen Kreisen einer sein wird, der sich der Krümmung der Ellipse im Berührungspunkt besonders gut anschmiegen wird, also wohl *mehr als zwei*, vielleicht *drei* zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam haben wird. Ein solcher Kreis heißt *Krümmungskreis*, sein Radius *Krümmungsradius*. Seine Beziehungen zur Kurve sollen untersucht werden.

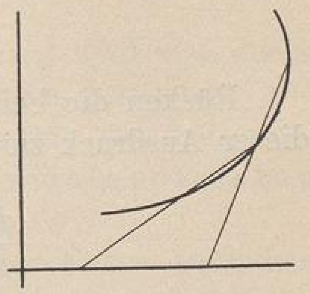

Fig. 102.

Während wir früher *eine* Sehne drehten, bis ihre beiden Schnittpunkte zusammenfielen und sie zur Tangente wurde, wollen wir jetzt *zwei* benachbarte Sehnen nehmen (Fig. 102). Sie haben einen Schnittpunkt gemeinsam und werden so lange gedreht, bis auch die beiden anderen Schnittpunkte mit diesem zusammenfallen und aus den zwei Sehnen zwei unmittelbar benachbarte Tangenten werden, die mit der Kurve *drei* zusammenfallende Punkte gemeinsam haben.

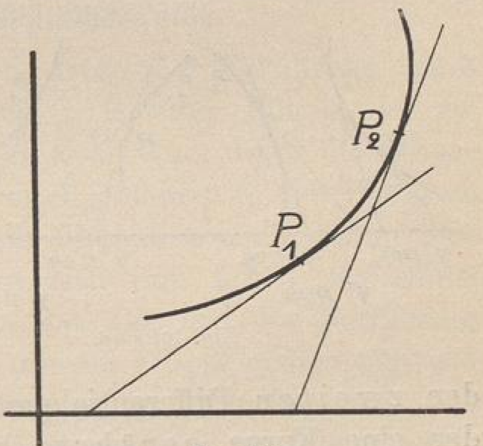

Fig. 103.

Der *Krümmungskreis* einer Kurve hat mit ihr *drei Punkte* und demnach *zwei* auf einander folgende *Tangenten* gemeinsam.

Um dies besser überschauen zu können, sind in Fig. 103 zwei solche unmittelbar nebeneinander liegende Tangenten angedeutet. Je mehr die Steigung der beiden Tangenten von einander abweicht, desto stärker ist auch die Krümmung der Kurve an dieser Stelle.

Die Steigung der Tangente ist dieselbe wie die der Kurve an der betreffenden Stelle, ist also gleich dem Differentialquotienten y' der Kurvengleichung an der Stelle P_1 bezw.

P_2; dieser sei mit y'_1 bezw. y'_2 bezeichnet. Der Unterschied der Steigung der Tangenten ist also:

$$y'_2 - y'_1 = \Delta y'$$

Wir bestimmeu das Verhältnis dieses Unterschiedes $\Delta y'$ zu Δx und erhalten:

$$\frac{y'_2 - y'_1}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x}$$

Rücken die beiden Punkte P_1 und P_2 zusammen, so wird dieser Ausdruck zum zweiten Differentialquotienten [1]):

$$\frac{d(y')}{d x} = \frac{d \frac{d y}{d x}}{d x} = \frac{d(dy)}{(d x)^2}$$

Obigen Ausdruck schreibt man nun der Kürze halber:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} \text{ oder } y''$$

Da Krümmungskreis und Kurve zwei benachbarte Tangenten gemeinsam haben, so nimmt die Steigung der Tangenten für beide Kurven um denselben Betrag, nämlich um den des zweiten Differentialquotienten zu. Der Krümmungskreis einer Kurve hat mit ihr also nicht nur den ersten, sondern auch den zweiten Differentialquotienten gemeinsam. Ein Kreis, der eine Kurve berührt, hat mit ihr nur den ersten Differentialquotienten gemeinsam.

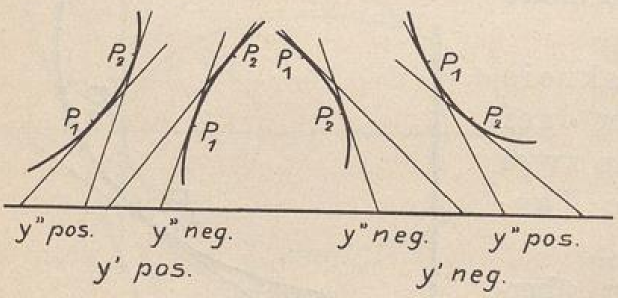

Fig. 104 $a-d$.

Ist $y'_2 > y'_1$, so ist y'' positiv, und die Kurve ist von oben betrachtet hohl (konkav). (Fig. 104 a und d.)

Ist $y'_2 < y'_1$, so ist y'' negativ und die Kurve von oben betrachtet gewölbt (konvex). (Fig. 104 b und c.)

[1]) Elemente d. Differential- u. Integralrechnung v. Düsing, S. 30.

Ist $y_2' = y_1'$, so ist $y'' =$ Null, und die Kurve schmiegt sich an dieser Stelle in drei zusammenfallenden Punkten an die Tangente an. War y'' auf der einen Seite des Berührungspunktes positiv, auf der anderen negativ, so wechselt die Kurve hierbei ihre Krümmung. Einen solchen Punkt nennt man Wendepunkt.

Die Art und das Maß der Krümmung wird also durch den zweiten Differentialquotienten bestimmt. Die Art und das Maß der Steigung wird, wie wir früher gesehen haben, durch den ersten Differentialquotienten bestimmt.

Hat man einen Extremwert bei einer Kurve gefunden, indem man $y' = 0$ setzte und hieraus das x des Extremwertes berechnete, so kann man für diesen Punkt y'' berechnen und sieht hieraus, ob die Kurve an dieser Stelle gewölbt oder hohl ist, ob hier also ein Maximum (y'' negativ) oder ein Minimum (y'' positiv) gefunden wurde.

Lage der Krümmungskreise.

Um sich die verschiedenen Arten der Berührung eines Kreises und eines Kegelschnittes, z. B. einer Ellipse, klarzumachen, legt man zunächst einen Kreis quer durch die Ellipse (Fig. 105 *A*). Er schneidet sie im allgemeinen in vier Punkten.

Dann schiebt man den Kreis allmählich nach unten. Die Schnittpunkte *I* und *II* nähern sich und fallen schließlich zusammen (Fig. *B*). Der Kreis hat also bei der Berührung zwei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam und schneidet die Ellipse noch in zwei andern Punkten.

Läßt man den Kreis allmählich wachsen, so fällt schließlich auch Punkt *III* in den Berührungspunkt *I II*. Wir haben also eine Berührung mit drei zusammenfallenden Punkten; der Kreis ist ein Krümmungskreis (Fig. *C*).

Schiebt man den Kreis von Fig. *A* nach links, so nähern sich die Punkte *I* und *IV*. Liegt nun der Mittelpunkt des Kreises auf der *X*-Achse, so fallen schließlich Punkt *I* und *IV* auf der *X*-Achse zusammen (Fig. *D*).

Läßt man diesen Kreis jetzt kleiner werden, so nähern sich auch *II* und *III* dem Scheitel und fallen schließlich mit ihm zusammen (Fig. *E*). Hier haben Kreis und Ellipse vier zusammenfallende Punkte gemeinsam. Einen solchen Krümmungskreis nennen wir „Hauptkrümmungskreis".

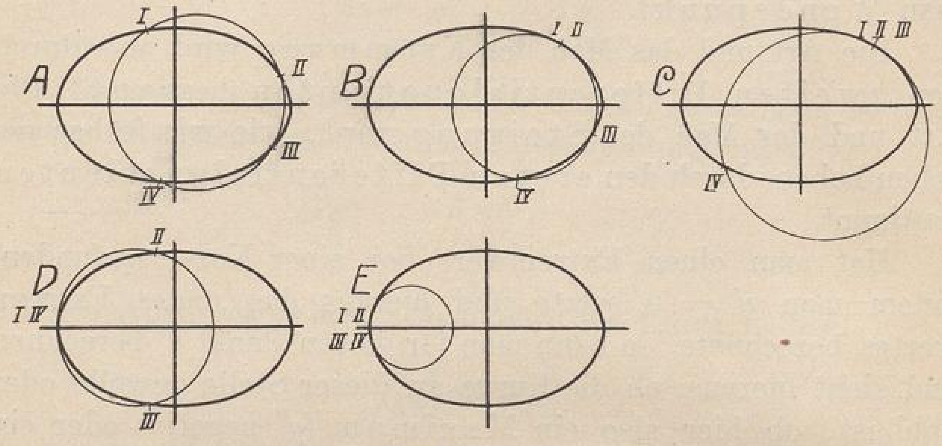

Fig. 105 (*A*—*E*).

Aus Fig. *D* und *E* geht hervor, daß die vier Schnittpunkte nur dann zusammenfallen können, wenn sie sich symmetrisch nähern, d. h. wenn der Mittelpunkt auf der Achse liegt. Hauptkrümmungskreise können also nur an den vier Scheiteln der Ellipse liegen. Bei der Parabel und jedem Hyperbelast gibt es nur einen Hauptkrümmungskreis.

Berechnung der Hauptkrümmungskreise der Kegelschnitte.

Diejenigen Krümmungskreise, welche die Kegelschnitte an einem Scheitel berühren, sind wie gesagt die Hauptkrümmungskreise. Ihr Radius kann auf folgende einfache Weise berechnet werden:

1. Bei der Parabel: Der Scheitel ist beiden Kurven gemeinsam, seine Koordinaten müssen also sowohl die Gleichung der Parabel wie die Scheitelgleichung des Krümmungskreises erfüllen. Erstere lautet:

$$y^2 = 2\,p\,x$$

Letztere (Gleichung 11): $y^2 = 2\,r\,x - x^2$

Folglich gilt für den Scheitelpunkt $x_1 y_1$:

$$2\,p\,x_1 = 2\,r\,x_1 - x_1^2$$
$$2\,p = 2\,r - x_1$$

Da nun für den Scheitel $x_1 = 0$ ist, so ist

$$\boldsymbol{r = p.}$$

Der Radius des Hauptkrümmungskreises einer Parabel ist also gleich dem halben Parameter und gleich der Ordinate im Brennpunkt (Fig. 106).

2. Bei der Ellipse: Ihre Scheitelgleichung (Gleichung 24) lautet:

$$y^2 = \frac{2\,b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

Die Scheitelgleichung des Kreises:

$$y^2 = 2\,r\,x - x^2$$

Die Koordinaten $x_1 y_1$ des Scheitelpunkts erfüllen beide Gleichungen:

$$\frac{2\,b^2}{a}\,x_1 - \frac{b^2}{a^2}\,x_1^2 = 2\,r\,x_1 - x_1^2$$
$$\frac{2\,b^2}{a} - \frac{b^2}{a^2}\,x_1 = 2\,r - x_1$$

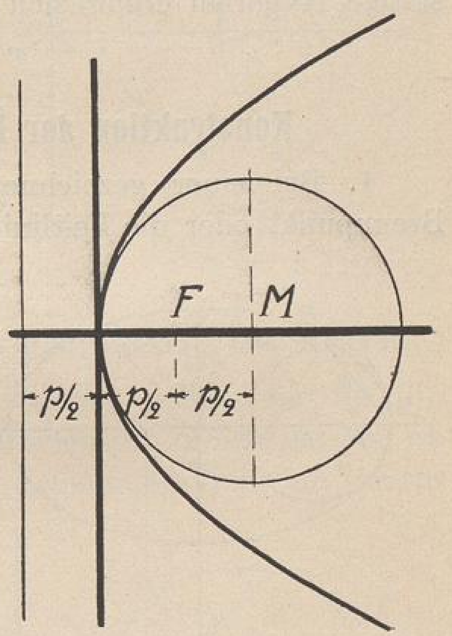

Fig. 106.

Da nun $x_1 = 0$ ist, so ergibt sich

$$\frac{2\,b^2}{a} = 2\,r$$
$$\boldsymbol{r = \frac{b^2}{a} = p}$$

Auch hier ist der Radius des Hauptkrümmungskreises gleich der Ordinate im Brennpunkt. Rechnet man auf ähnliche Weise den Radius des oberen Hauptkrümmungskreises aus, so erhält man

$$\boldsymbol{r = \frac{a^2}{b}}$$

3. Bei der Hyperbel. Die Rechnung wird ebenso durchgeführt wie bei der Ellipse und liefert dasselbe Resultat:

$$r = \frac{b^2}{a}$$

Auch hier erhalten wir also einen Radius, der ebenso groß ist wie die Ordinate im Brennpunkt.

4. Hauptkrümmungskreise der gleichseitigen Kegelschnitte. Sowohl für den Kreis wie für die gleichseitige Hyperbel ergibt sich:

$$r = a.$$

Konstruktion der Hauptkrümmungskreise.

1. Bei einer gezeichneten Parabel ist p durch den Brennpunkt oder die Leitlinie gegeben; gegebenen Falls kann man p auch als Subnormale finden.

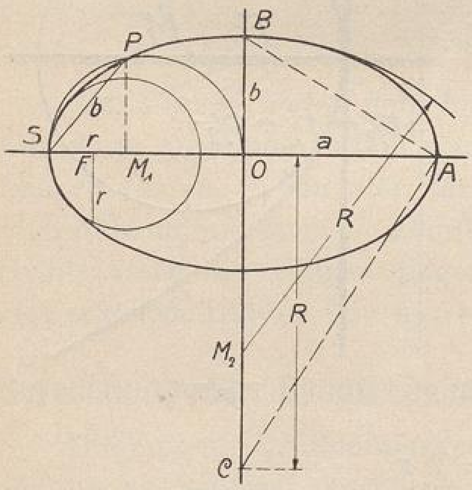

Fig. 107.

2. Bei der Ellipse: Man schlägt über $S\,O$ einen Halbkreis (Fig. 107) und mit b als Radius einen Kreis um S; beide schneiden sich in P. Dann ist die Projektion $S\,M_1$ von der Strecke $S\,P$ oder b auf die große Achse gleich dem gesuchten Radius r des Hauptkrümmungskreises. Es ist nämlich

$$b^2 = S\,P^2 = r\,a, \text{ also } r = \frac{b^2}{a}$$

Sucht man den oberen Hauptkrümmungskreis, so verbindet man die Endpunkte von b und a, nämlich B und A, miteinander und errichtet in A auf $A\,B$ ein Lot, welches auf der unteren Hälfte der Y-Achse eine Strecke abschneidet, die gleich dem gesuchten Radius R des Hauptkrümmungskreises ist. Hier ist nämlich

$$a^2 = b \cdot R, \text{ also } R = \frac{a^2}{b}$$

3. Bei der Hyperbel: Man errichtet auf der Asymptote (Fig. 108) im Schnittpunkt mit b, nämlich in B, ein Lot. Dann ist die Projektion dieses Lotes auf die X-Achse der gesuchte Radius r. Es ist nämlich

$$b^2 = a \cdot r, \text{ also } r = \frac{b^2}{a}$$

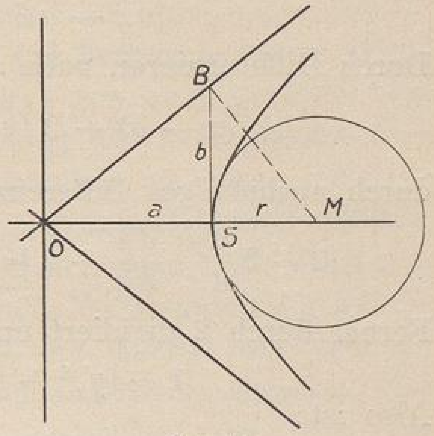

Fig. 108.

Bei allen drei Kegelschnitten kann man auch im Brennpunkt eine Ordinate errichten. Diese ist gleich dem gesuchten Radius des Hauptkrümmungskreises.

Allgemeine Ableitung der Krümmungskreise von Kurven.

Obige Formeln und Konstruktionen gelten nur für die Hauptkrümmungskreise der Kegelschnitte. Diese liegen an den Scheiteln. Will man den Krümmungskreis an einem anderen Punkt der Kegelschnitte oder für irgendeine andere Kurve berechnen, so bedarf man einer allgemeinen Formel, die jetzt abgeleitet werden soll.

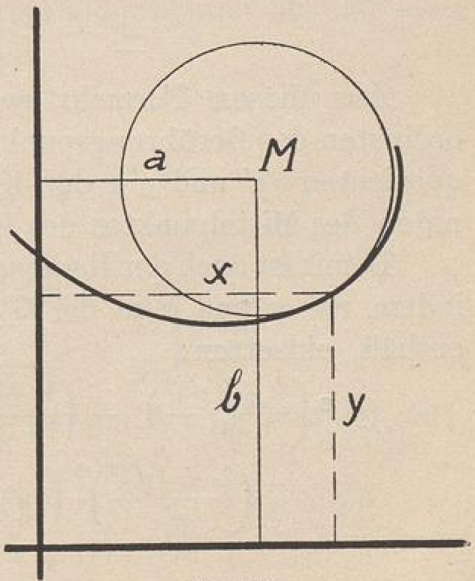

Fig. 109.

Der gesuchte Kreis hat an der Berührungsstelle denselben ersten (y') und zweiten Differentialquotienten (y'') wie die Kurve. Wenn die Gleichung der Kurve gegeben ist, so kann man ihre Differentialquotienten berechnen. Setzt man diese in die allgemeine Gleichung des Kreises ein, so läßt sich aus der erhaltenen Gleichung die Lage des Kreises, also die Länge von a und b der Figur 109 berechnen.

Angenommen, der Kreis um M sei der Krümmungskreis für Punkt (x, y) einer Kurve, so ist seine Gleichung:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I})$$

Durch Differenzieren nach x erhält man:

$$2\,(x - a) + 2\,(y - b)\,\frac{d\,y}{d\,x} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{II})$$

durch nochmaliges Differenzieren bekommt man:

$$2 + 2\,\frac{d\,y}{d\,x}\,\frac{d\,y}{d\,x} + 2\,(y - b)\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 0$$

Ferner durch 2 dividiert und kurz geschrieben gibt:

$$1 + (y')^2 + y\,y'' - b\,y'' = 0$$

Also ist:

$$\underline{b} = \frac{1 + (y')^2 + y\,y''}{y''} = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} \quad . \; . \; . \quad (\mathrm{III})$$

Setzt man b in die obige Gleichung (II) des ersten Differentialquotienten ein, so läßt sich hieraus auch a berechnen:

$$x - a + y\,y' - y'\,\frac{1 + (y')^2}{y''} - y\,y' = 0$$

Also ist:

$$\underline{a} = x - y'\,\frac{1 + (y')^2}{y''} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{IV})$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß durch die Koordinaten des Berührungspunktes (x und y) und die Differentialquotienten (y' und y'') der Kurve die Lage d. h. die Koordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises bestimmt sind.

Damit ist auch der Radius r des Krümmungskreises gegeben, indem wir a und b in die Gleichung (I) des Kreises, die ja r enthält, einsetzen:

$$(y')^2 \left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 + \left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 \left((y')^2 + 1\right) = r^2$$

$$\underline{r^2} = \frac{(1 + (y')^2)^3}{(y'')^2} \quad . \; . \quad (\mathrm{V})$$

Hiermit ist also der Radius des Krümmungskreises einer beliebigen Kurve in einem beliebigen Punkte bestimmt.

Bemerkung: Da $r = \pm \frac{\sqrt{(1+(y')^2)^3}}{y''}$

ist, so wechselt das Vorzeichen von r mit demjenigen von y''. Wir hatten früher gesehen, daß bei Zunahme der Steigung der Kurve y'' positiv und die Kurve von oben gesehen hohl ist (Fig. 104 a und d). Alsdann liegt der Krümmungsmittelpunkt oberhalb, und der Krümmungsradius sei dann positiv. — Wird die Kurve flacher, so wächst der Krümmungsradius schließlich ins Unendliche. Dies ist der Fall, wenn z. B. die Kurve zu einer Geraden wird oder bei einem Wendepunkt der Kurve; y'' ist hier gleich Null. — Wird die Kurve von oben gesehen gewölbt, so wird der Krümmungsradius negativ. Der Krümmungsmittelpunkt kommt gleichzeitig aus dem Unendlichen auf der negativen Seite zurück ins Endliche, der zweite Differentialquotient ist negativ (Fig. 104 b, c). — Wird die Krümmung der Kurve stärker, so wird der Krümmungsradius schließlich Null und es entsteht ein Punkt.

1. Anwendung auf die Parabel.

Man leitet die beiden Differentialquotienten ab und setzt sie in obige Formel (V) für r^2 ein.

Die Gleichung der Parabel ist: $y^2 = 2\,p\,x$

Der erste Differentialquotient:

$$y' = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}} = \sqrt{\frac{p}{2\,x}}$$

Der zweite Differentialquotient:

$$y'' = -\sqrt{\frac{p}{2}}\;\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2\,x^3}}$$

Diese Größen werden in die Formel (V) für r^2 eingesetzt:

$$r^2 = \frac{\left(1+\frac{p}{2\,x}\right)^3}{\frac{p}{8\,x^3}} = \frac{(2\,x+p)^3\;8\,x^3}{8\,x^3\,p} = \frac{(2\,x+p)^3}{p}$$

Bemerkung: Die Dimension der Formel ist richtig. Zur weiteren Prüfung setzen wir $x = 0$, was am Scheitel der Parabel der Fall ist, und erhalten:

$$r^2 = \frac{p^3}{p} \text{ und } r = p.$$

Dies stimmt mit der früher (S. 123) gefundenen Formel für den Radius des Hauptkrümmungskreises überein.

2. Anwendung auf die Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse ist:

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$$

Man differenziert und erhält:

$$2 b^2 x + 2 a^2 y y' = 0$$

Also ist

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Man differenziert abermals:

$$2 b^2 + 2 a^2 (y')^2 + 2 a^2 y y'' = 0$$

Also ist

$$y'' = \frac{-b^2 - a^2 (y')^2}{a^2 y} = -\frac{b^2 a^2 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^3} =$$

$$-\frac{b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^4 y^3} = -\frac{a^2 b^4}{a^4 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

Die erhaltenen beiden Differentialquotienten werden in die Formel für r^2 eingesetzt:

$$r^2 = \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^3 a^4 y^6}{b^8} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3 a^4 y^6}{a^{12} y^6 b^8} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8 b^8}.$$

Bemerkung: Die Formel hat die richtige Dimension. Zur weiteren Prüfung setzen wir $x = a$ und $y = 0$. Dann wird:

$$r^2 = \frac{(b^4 a^2)^3}{a^8 b^8} = \frac{b^{12} a^6}{a^8 b^8} = \frac{b^4}{a^2}$$

Also ist $r = \frac{b^2}{a}$

Setzt man dagegen $x = 0$ und $y = b$, so erhält man

$$r = \frac{a^2}{b}.$$

Beide Resultate stimmen überein mit den Formeln für die Radien der Hauptkrümmungskreise der Ellipse.

3. Anwendung auf die Hyperbel.

Die Differentialquotienten sind dieselben wie bei der Ellipse, nur hat der erste das entgegengesetzte Vorzeichen. Da beide in der Formel für r^2 als Quadrate vorkommen, so erhält man dieselbe Formel für r^2 wie bei der Ellipse.

Aufgabe: 1. Bei einer Ellipse soll man den Radius desjenigen Krümmungskreises zahlenmäßig berechnen, dessen Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt, also etwa wie bei Fig. 105 *C*. Bei der Ellipse sei gegeben:

$$a = 9 \text{ und } b = 7 \text{ cm.}$$

Anleitung: Man berechnet das x und y des Berührungspunktes und setzt es ebenso wie das gegebene a und b in die Formel für den Krümmungsradius der Ellipse ein:

$$r^2 = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8 b^8}$$

Oder man berechnet aus x, y, a, b zuerst y' und y'' und setzt diese Größen in die allgemeine Formel (V) des Krümmungsradius ein:

$$r^2 = \frac{(1 + (y')^2)^3}{(y'')^2}$$

2. Die Parabel $y^2 = 2px$ und der Hauptkrümmungskreis sollen verglichen werden, und zwar sollen die Ordinaten in der halben Brennweite $\left(x_1 = \frac{p}{4}\right)$ für beide Kurven berechnet und verglichen werden.

Das Ergebnis wird zeigen, daß die Gestalt der Parabel in der Nähe des Scheitels sich nur wenig von der des Hauptkrümmungskreises unterscheidet. Daher nimmt man oft statt der parabolischen Spiegel kugelförmige, die sich leichter herstellen lassen. Doch dürfen sie im Vergleich zur Brennweite nicht zu groß sein. Der Brennpunkt liegt dann in der Mitte des Radius (Fig. 106).

3. Man untersuche die Krümmungen der Kegelschnitte. Hierbei wird man finden, daß y'' stets beide Vorzeichen hat, wenn es durch x ausgedrückt ist, weil zu jedem x eine gewölbte und eine hohle Stelle gehört. Drückt man aber y'' durch y aus, so hat es entweder das positive oder das negative Vorzeichen. Für negative y sind die Kurven von oben betrachtet hohl, für positive oberhalb der X-Achse sind sie dagegen gewölbt.

4. Man untersuche, ob die Kegelschnitte Wendepunkte haben.

5. Man bestimme für die Kurve

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

Maximum, Minimum und Wendepunkt, ferner den Radius der Krümmungskreise an den Stellen des Maximums und Minimums, sowie die Koordinaten der Mittelpunkte dieser Krümmungskreise.[1])

6. Man führe dieselben Rechnungen für die Kurve mit folgender Gleichung aus:

$$y = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$$

Andere Koordinatensysteme.

Unter besonderen Umständen ist es angebracht, andere Koordinaten als die rechtwinkligen zu gebrauchen.

Gebogene Koordinaten.

1. Bei vielen Registrierapparaten, z. B. bei einem selbstschreibenden Barometer, dreht sich eine Trommel von einem Uhrwerk getrieben langsam um ihre Achse. Auf sie ist

---

[1]) Weitere Beispiele über Minim., Maxim. u. Wendepunkte findet man: „Elem. d. Diff.- u. Integ.-Rechnung“ v. Düsing, 2. Aufl., S. 54—67.