Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Fläche

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Sinoide.

Trägt man nicht die Sinus selbst, sondern Vergrößerungen oder Verkleinerungen dieser Stücke senkrecht nach oben auf, so erhält man als Kurve eine Sinoide. Eine solche Kurve bekommt man auch, wenn man die Sinus zwar selbst in wahrer Größe, aber die Bogen vergrößert oder verkleinert aufträgt.

Allgemeine Betrachtungen an Kurven.

Die Bogenlänge.

Die Länge s einer beliebigen Kurve (Fig. 91), die zwischen zwei den Abszissen x_1 und x_2 entsprechenden Punkten der Kurve liegt, denkt man sich in unendlich kleine Teile zerlegt. Jedes Teilchen ds ist dann:

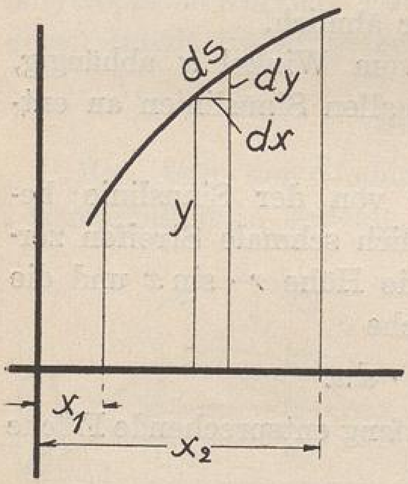

Fig. 91.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Die Länge der Kurve zwischen den Abszissen x_1 und x_2 ist also:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Die Fläche.

Den Inhalt der Fläche zwischen einer Kurve, der Abszissenachse und den Ordinaten y_1 und y_2 haben wir bei den Kegelschnitten wiederholt berechnet. Ähnlich wie bei diesen zerlegen wir auch bei einer beliebigen Kurve mit bekannter Gleichung die Fläche in senkrechte Streifen von der Länge y und der Breite dx. Dann ist jeder Streifen $y \cdot dx$. Die Fläche zwischen y_1 und y_2 ist also:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} = f(x) \cdot dx$$

Oft sind Flächen von Kurven begrenzt, deren Gleichung nicht bekannt oder sehr verwickelt ist. Der Inhalt kann dann auf verschiedene Weise ermittelt werden.

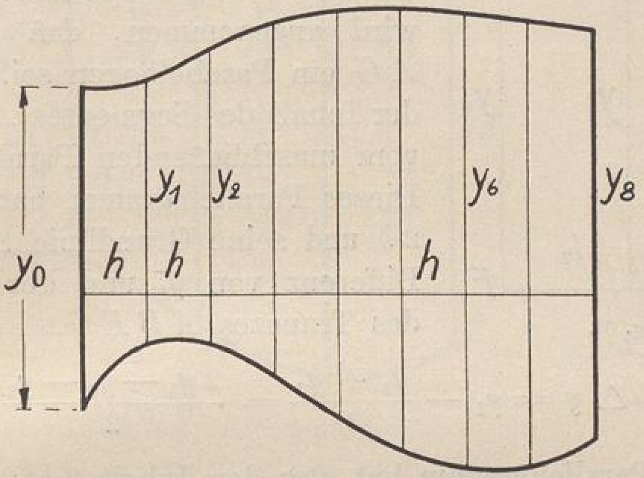

Fig. 92.

a) Trapezregel (Fig. 92): Man teilt die gegebene Fläche in eine beliebige Anzahl Streifen von der gleichen Breite h und sieht die Streifen als Trapeze an. Dann ist Streifen F_1, F_2 usw.:

$$F_1 = h \frac{y_0 + y_1}{2}$$

$$F_2 = h \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_8 = h \frac{y_7 + y_8}{2}$$

Die ganze Fläche $F = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots \frac{y_8}{2} \right)$.

An Stellen mit starker Krümmung zerlegt man die Streifen in schmälere Streifen durch Zwischenordinaten und kann die zerlegten Streifen für sich nach der Trapezregel berechnen.

b) Simpsonsche Regel: Man teilt die gegebene Fläche durch Ordinaten in eine gerade Anzahl von Streifen mit gleicher Breite h, z. B. in Fig. 93 in 2 Streifen. Die Ordinaten sind y_0, y_1, y_2. Wir verbinden A mit G und ziehen durch E eine Parallele zu $A\,G$.

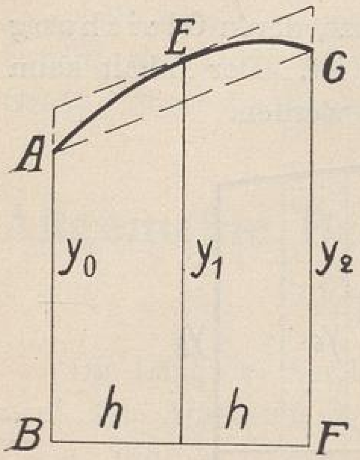

Fig. 93.

Bei der Simpsonschen Regel wird angenommen, daß der Bogen $A\,G$ ein Parabelbogen sei. Dann ist der Inhalt des Segmentes $A\,E\,G = {}^2/_3$ vom umschließenden Parallelogramm. Dieses Parallelogramm hat die Höhe $2\,h$ und seine Grundlinie $\triangle\,y$ ist die Differenz von y_1 und der Mittellinie des Trapezes $A\,B\,F\,G$.

$$\triangle\,y = y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{2\,y_1 - y_0 - y_2}{2}$$

Das Parallelogramm hat also den Inhalt $2\,h \cdot \triangle\,y$.

$$\text{Parabelsegment} = \frac{2}{3}\,2\,h \cdot \triangle\,y = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot h\,\frac{2\,y_1 - y_0 - y_2}{2}$$

$$= \frac{h}{3}\,(4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2).$$

Hierzu kommt noch das Trapez:

$$A\,B\,F\,G = 2\,h\,\frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{h}{3}\,(3\,y_0 + 3\,y_2)$$

Als Summe von Parabelsegment und Trapez erhält man die Fläche $F_1 = \frac{h}{3}\,(4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2 + 3\,y_0 + 3\,y_2)$

$$F_1 = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

Diese Formel gilt auch für Flächen, welche oben und unten durch Kurven begrenzt sind, z. B. F_1 in Fig. 94.

Ist nun die Fläche $A\,B\,C\,D$ (Fig. 94) zu ermitteln, so teilt man sie in eine gerade Anzahl von Teilen von gleicher

Breite h. Die berechnete Fläche F_1 ist der erste Teil der gegebenen Fläche $ABCD$. Letztere ergibt sich als Summe der Teile:

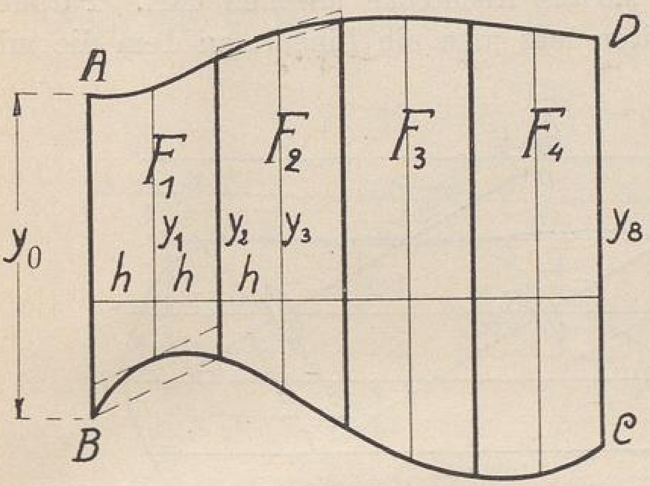

Fig. 94.

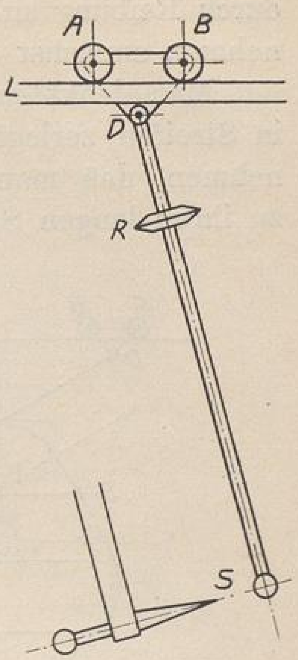

Fig. 95.

$$F_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

$$F_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4\,y_3 + y_4)$$

$$F_3 = \frac{h}{3}(y_4 + 4\,y_5 + y_6)$$

$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + 2\,y_4 + 4\,y_5 + y_6).$$

Diese Formel liefert größere Genauigkeit als die Trapezregel, weil sich die Parabel besser als die Gerade an eine Kurve anschmiegt.

c) Der Integrator (Fig. 95). Den Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche kann man auch ohne Rechnung durch Ausmessen mit dem Integrator finden. An einem um D drehbaren Arm sitzt eine Spitze S und zugleich eine Rolle R, welche beide auf dem Papier aufliegen. Umfährt man mit der Spitze S die Umrisse der gegebenen Fläche, so wird die Rolle durch Reibung auf dem Papier in Umdrehung versetzt. Wir nehmen zunächst an, die Rolle befände sich an der Spitze S.

Man denkt sich jetzt die gegebene Fläche durch Parallelen in Streifen zerlegt (Fig. 96); diese kann man so schmal annehmen, daß man sie als Rechtecke ansehen darf. Parallel zu ihren langen Seiten legt man ein Lineal, an dem die mit

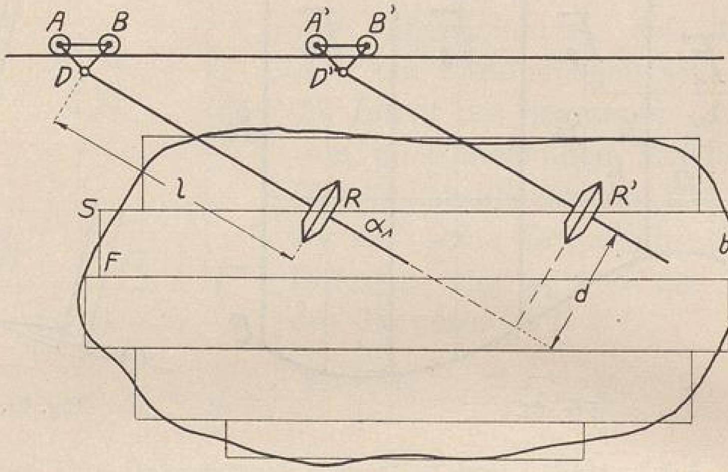

Fig. 96.

dem Drehpunkt D fest verbundenen Rollen A und B entlangrollen. Fährt man mit der Rolle über eine Seite, z. B. von R bis R', so können wir uns diese Bewegung der Rolle zusammengesetzt denken aus einem Schieben der Rolle längs ihrer Achse und einem Drehen der Rolle senkrecht hierzu um ihre Achse (Fig. 96). Also ist die Drehung auf dem Wege RR'

$$d = RR' \cdot \sin \alpha_1.$$

Die Drehung ist also proportional dem Sinus des Winkels zwischen dem Arm und der durchlaufenen Strecke.

Befindet sich die Rolle nun nicht an der Spitze S, sondern bei R (Fig. 95), so führt sie bei ihrer Drehung sowohl wie bei ihrer Schiebung dieselben Bewegungen aus wie die Spitze S, was man sich in Fig. 96 leicht hineinzeichnen kann.

Beim Durchlaufen der Seite $S\,T = a$ (Fig. 97) beträgt die Drehung also $+ a \cdot \sin \alpha_1$.
Beim Zurücklaufen auf der unteren Seite $N\,F$ beträgt die Drehung $- a \cdot \sin \alpha_2$.

Nach Fig. 97 ist: $\sin \alpha_1 = \frac{r}{l}$

$$\sin \alpha_2 = \frac{r+b}{l}$$

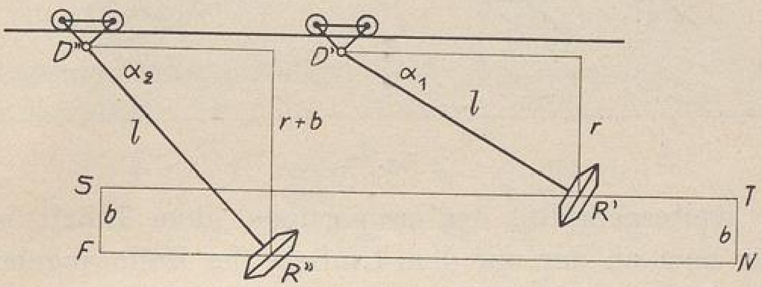

Fig. 97.

Die Drehung beim Durchlaufen der oberen **und** unteren Seite beträgt also:

$$a\,\frac{r}{l} - a\,\frac{r+b}{l} = \frac{a}{l}\,(r - r - b) = -\,\frac{a\,b}{l}$$

Diese Drehung der Rolle ist also proportional dem Inhalt $a\,b$.

Es bleibt noch das Durchfahren der Abstände links ($S\,F$) und rechts ($T\,N$). Denkt man sich diese in unendlich viele kleine Teile zerlegt, so werden entsprechende Stücke links und rechts in entgegengesetztem Sinne und unter demselben Winkel durchlaufen. **Die Drehungen** auf beiden Rechtecksseiten b **heben sich also auf**, auch wenn die Rolle R sich nicht an der Spitze befindet.

Die Gesamtdrehung beim Umfahren des **ganzen** Rechteckes bleibt also $-\frac{a\,b}{l}$, also proportional dem Inhalt.

Umfährt man nun das folgende, z. B. in Fig. 96 unter $S\,F\,N\,T$ liegende Rechteck, so heben sich die **Drehungen auf dem gemeinsamen Stück der Seite** $F\,N$ auf.

Statt also sämtliche Rechtecke einzeln zu umfahren, braucht man nur ihren Gesamtumriß, d. h. den Umriß der gegebenen Fläche, zu umfahren. Die Rolle hat sich hierbei um einen

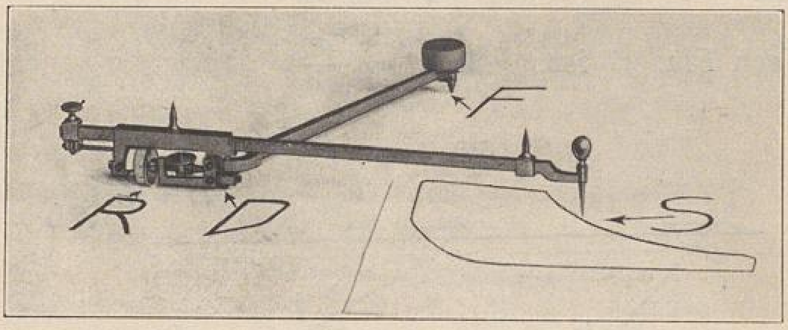

Fig. 98.

Betrag weitergedreht, der proportional dem Inhalt ist und welchen man an der auf dem Umfang der Rolle angebrachten Teilung abliest. Die Teilung ist so gewählt, daß man direkt den Inhalt zahlenmäßig erhält.

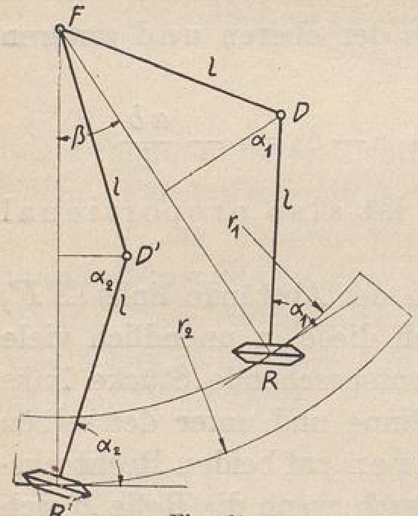

Fig. 99.

d) Polarplanimeter. Gebräuchlicher als dieser Integrator ist das Polarplanimeter (Fig. 98 und 99). Es unterscheidet sich vom vorherigen dadurch, daß die Punkte A und B (Fig. 95 und 96) zu einem vereinigt sind, der einen festen Drehpunkt F bildet.

Wir denken uns die gegebene Fläche durch konzentrische Kreise in Ringe zerlegt und stecken die feste Nadel F des Planimeters in ihren Mittelpunkt.

Auch hier können wir uns die Bewegung der Rolle über ein Stück der Kreise aus einem Schieben der Rolle längs ihrer Achse und einem Drehen senkrecht hierzu um ihre Achse zusammengesetzt denken. Die Drehung ist hierbei wie oben proportional dem Sinus des Winkels zwischen Arm und der durchlaufenen Strecke, d. h. hier zwischen Arm und Tangente an dem Bogen.

Die Drehung der Rolle (Fig. 99) beim Bewegen über den Bogen $\widehat{r_1 \cdot \beta}$ des inneren Kreises ist demnach $+\widehat{r_1 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_1$ und beim äußeren Kreis $-\widehat{r_2 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_2$.

Nun ist aber in den gleichschenkligen Dreiecken FDR und $FD'R'$:

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{r_1}{2} : l \\ \sin \alpha_2 &= \frac{r_2}{2} : l \end{aligned}\right\} \text{ Diese Werte werden eingesetzt und}$$

die Drehung beim Bewegen über den inneren **und** äußeren Bogen ist also:

$$+\widehat{r_1 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_1 - \widehat{r_2 \cdot \beta} \cdot \sin \alpha_2 =$$

$$+\frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2\,l} - \frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2\,l} =$$

$$\frac{1}{l}\left(\frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2} - \frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2}\right)$$

Der Ausdruck $\frac{r_1 \cdot \widehat{r_1 \cdot \beta}}{2}$, oder $\frac{1}{2} \times$ Radius $\times$ Bogen ist aber der Inhalt eines Sektors, dasselbe gilt von $\frac{r_2 \cdot \widehat{r_2 \cdot \beta}}{2}$.

Also ist die Drehung $= \frac{1}{l} \times$ Differenz der Sektoren,

$= \frac{1}{l} \times$ Inhalt des Ringes.

Diese Drehung ist also proportional dem Inhalt des Ringes.

Die Drehung beim Überfahren der Abstände der Kreise hebt sich wie oben auf.

Ebenso braucht man nicht jeden Ring zu umfahren, sondern nur den gesamten Umriß der Ringe, d. h. den Umriß der gegebenen Fläche. Die Gesamtdrehung der Rolle ist also auch hier proportional dem Inhalt der ganzen Fläche. Man liest diesen Inhalt an der Teilung auf dem Umfang der Rolle ab. Wegen der einfacheren Handhabung wird in der Praxis das Polarplanimeter dem Integrator vorgezogen.