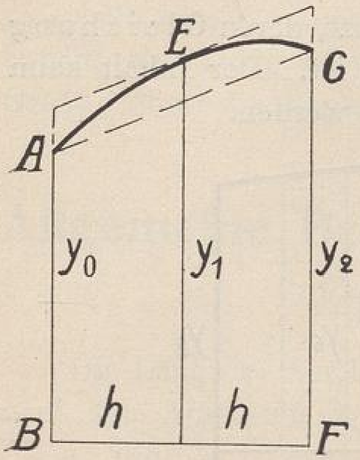
# Leitfaden der Kurvenlehre

**Düsing, Karl**

**Hannover, 1911**

Simpsonsche Regel

b) Simpsonsche Regel: Man teilt die gegebene Fläche durch Ordinaten in eine gerade Anzahl von Streifen mit gleicher Breite $h$, z. B. in Fig. 93 in 2 Streifen. Die Ordinaten sind $y_0$, $y_1$, $y_2$. Wir verbinden $A$ mit $G$ und ziehen durch $E$ eine Parallele zu $A\,G$.



Eig. 93.

Bei der Simpsonschen Regel wird angenommen, daß der Bogen $A\,G$ ein Parabelbogen sei. Dann ist der Inhalt des Segmentes $A\,E\,G = {}^2/_3$ vom umschließenden Parallelogramm. Dieses Parallelogramm hat die Höhe $2\,h$ und seine Grundlinie $\triangle\,y$ ist die Differenz von $y_1$ und der Mittellinie des Trapezes $A\,B\,F\,G$.

$$\triangle\,y = y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{2\,y_1 - y_0 - y_2}{2}$$

Das Parallelogramm hat also den Inhalt $2\,h \cdot \triangle\,y$.

$$\text{Parabelsegment} = \frac{2}{3}\,2\,h \cdot \triangle\,y = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot h\,\frac{2\,y_1 - y_0 - y_2}{2}$$

$$= \frac{h}{3}\,(4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2).$$

Hierzu kommt noch das Trapez:

$$A\,B\,F\,G = 2\,h\,\frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{h}{3}\,(3\,y_0 + 3\,y_2)$$

Als Summe von Parabelsegment und Trapez erhält man die Fläche $F_1 = \frac{h}{3}\,(4\,y_1 - 2\,y_0 - 2\,y_2 + 3\,y_0 + 3\,y_2)$

$$F_1 = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

Diese Formel gilt auch für Flächen, welche oben und unten durch Kurven begrenzt sind, z. B. $F_1$ in Fig. 94.

Ist nun die Fläche $A\,B\,C\,D$ (Fig. 94) zu ermitteln, so teilt man sie in eine gerade Anzahl von Teilen von gleicher

Breite $h$. Die berechnete Fläche $F_1$ ist der erste Teil der gegebenen Fläche $ABCD$. Letztere ergibt sich als Summe der Teile:

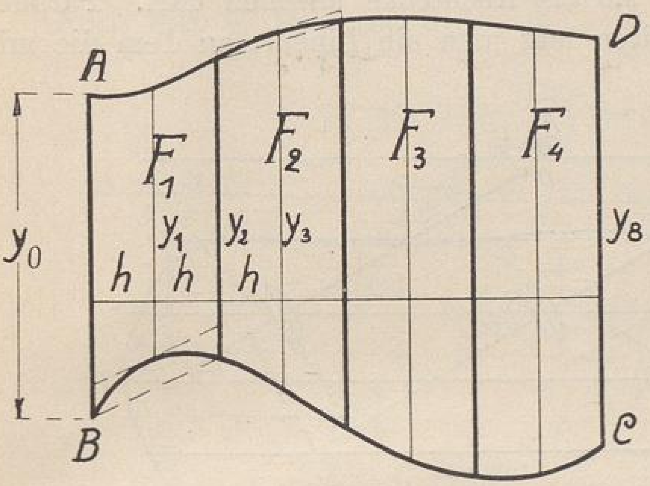


Fig. 94.

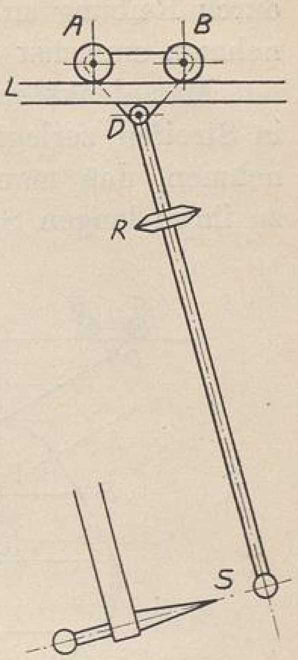


Fig. 95.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)\\
F_2 &= \frac{h}{3}\,(y_2 + 4\,y_3 + y_4)\\
F_3 &= \frac{h}{3}\,(y_4 + 4\,y_5 + y_6)\\
\hline
F &= \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + 2\,y_4 + 4\,y_5 + y_6).
\end{aligned}
$$

Diese Formel liefert größere Genauigkeit als die Trapezregel, weil sich die Parabel besser als die Gerade an eine Kurve anschmiegt.

c) Der Integrator (Fig. 95). Den Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche kann man auch ohne Rechnung durch Ausmessen mit dem Integrator finden. An einem um $D$ drehbaren Arm sitzt eine Spitze $S$ und zugleich eine Rolle $R$, welche beide auf dem Papier aufliegen. Umfährt man mit der Spitze $S$ die Umrisse der gegebenen Fläche, so wird die Rolle