



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Integrator

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78413)

Breite h . Die berechnete Fläche F_1 ist der erste Teil der gegebenen Fläche $ABCD$. Letztere ergibt sich als Summe der Teile:

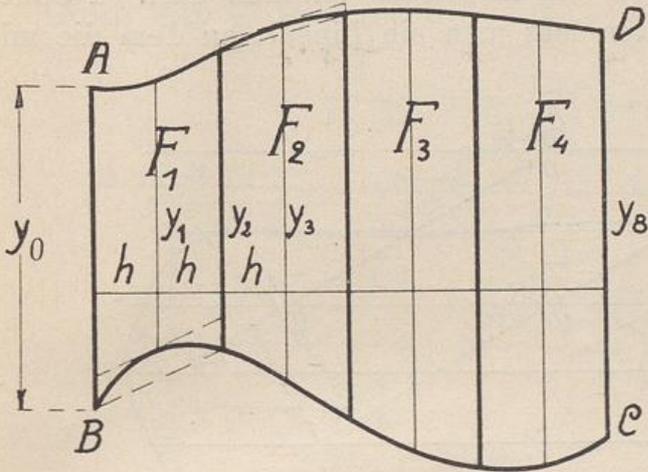


Fig. 94.

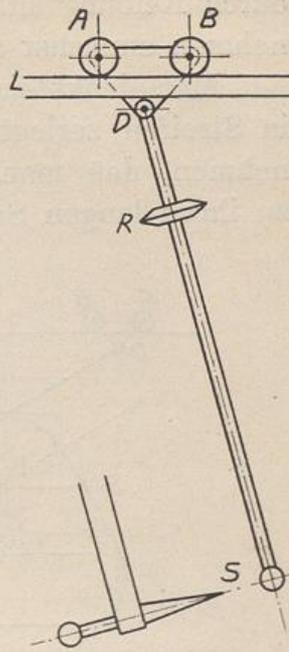


Fig. 95.

$$F_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + y_2)$$

$$F_2 = \frac{h}{3} (y_2 + 4 y_3 + y_4)$$

$$F_3 = \frac{h}{3} (y_4 + 4 y_5 + y_6)$$

$$F = \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + 2 y_4 + 4 y_5 + y_6).$$

Diese Formel liefert größere Genauigkeit als die Trapezregel, weil sich die Parabel besser als die Gerade an eine Kurve anschmiegt.

c) Der Integrator (Fig. 95). Den Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche kann man auch ohne Rechnung durch Ausmessen mit dem Integrator finden. An einem um D drehbaren Arm sitzt eine Spitze S und zugleich eine Rolle R , welche beide auf dem Papier aufliegen. Umfährt man mit der Spitze S die Umriss der gegebenen Fläche, so wird die Rolle

durch Reibung auf dem Papier in Umdrehung versetzt. Wir nehmen zunächst an, die Rolle befände sich an der Spitze S .

Man denkt sich jetzt die gegebene Fläche durch Parallelen in Streifen zerlegt (Fig. 96); diese kann man so schmal annehmen, daß man sie als Rechtecke ansehen darf. Parallel zu ihren langen Seiten legt man ein Lineal, an dem die mit

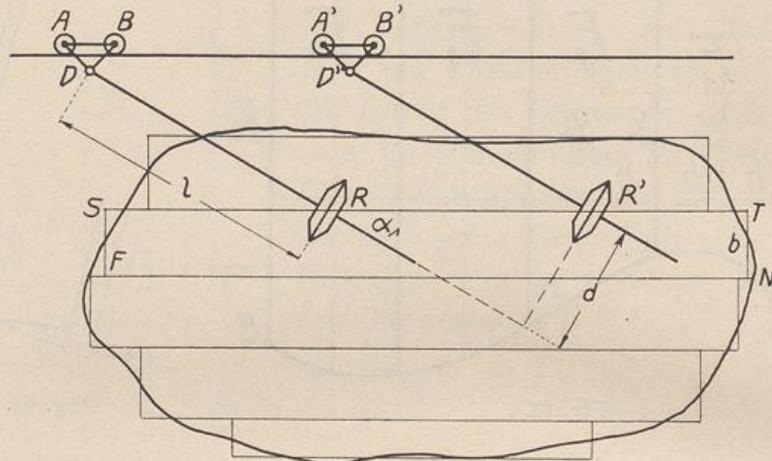


Fig. 96.

dem Drehpunkt D fest verbundenen Rollen A und B entlangrollen. Fährt man mit der Rolle über eine Seite, z. B. von R bis R' , so können wir uns diese Bewegung der Rolle zusammengesetzt denken aus einem Schieben der Rolle längs ihrer Achse und einem Drehen der Rolle senkrecht hierzu um ihre Achse (Fig. 96). Also ist die Drehung auf dem Wege RR'

$$d = RR' \cdot \sin \alpha_1.$$

Die Drehung ist also proportional dem Sinus des Winkels zwischen dem Arm und der durchlaufene Strecke.

Befindet sich die Rolle nun nicht an der Spitze S , sondern bei R (Fig. 95), so führt sie bei ihrer Drehung sowohl wie bei ihrer Schiebung dieselben Bewegungen aus wie die Spitze S , was man sich in Fig. 96 leicht hineinzeichnen kann.

Beim Durchlaufen der Seite $ST = a$ (Fig. 97) beträgt die Drehung also $+ a \cdot \sin \alpha_1$.
 Beim Zurücklaufen auf der unteren Seite NF beträgt die Drehung $- a \cdot \sin \alpha_2$.

Nach Fig. 97 ist: $\sin \alpha_1 = \frac{r}{l}$
 $\sin \alpha_2 = \frac{r+b}{l}$

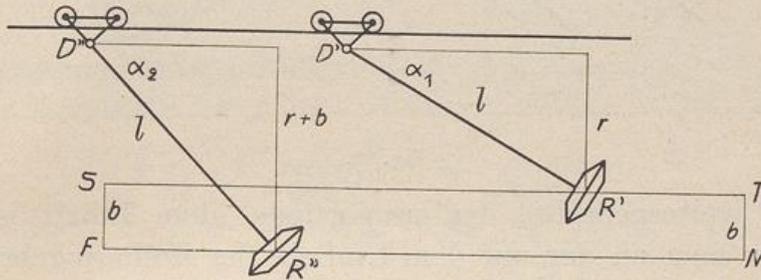


Fig. 97.

Die Drehung beim Durchlaufen der oberen und unteren Seite beträgt also:

$$a \frac{r}{l} - a \frac{r+b}{l} = \frac{a}{l} (r - r - b) = - \frac{ab}{l}$$

Diese Drehung der Rolle ist also proportional dem Inhalt ab .

Es bleibt noch das Durchfahren der Abstände links (SF) und rechts (TN). Denkt man sich diese in unendlich viele kleine Teile zerlegt, so werden entsprechende Stücke links und rechts in entgegengesetztem Sinne und unter demselben Winkel durchlaufen. Die Drehungen auf beiden Rechteckseiten b heben sich also auf, auch wenn die Rolle R sich nicht an der Spitze befindet.

Die Gesamtdrehung beim Umfahren des ganzen Rechteckes bleibt also $-\frac{ab}{l}$, also proportional dem Inhalt.

Umfährt man nun das folgende, z. B. in Fig. 96 unter $SFNT$ liegende Rechteck, so heben sich die Drehungen auf dem gemeinsamen Stück der Seite FN auf.

Statt also sämtliche Rechtecke einzeln zu umfahren, braucht man nur ihren Gesamtumriß, d. h. den Umriß der gegebenen Fläche, zu umfahren. Die Rolle hat sich hierbei um einen

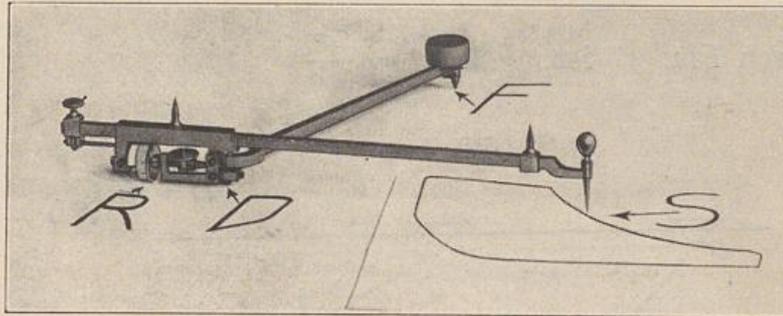


Fig. 98.

Betrag weitergedreht, der proportional dem Inhalt ist und welchen man an der auf dem Umfang der Rolle angebrachten Teilung abliest. Die Teilung ist so gewählt, daß man direkt den Inhalt zahlenmäßig erhält.

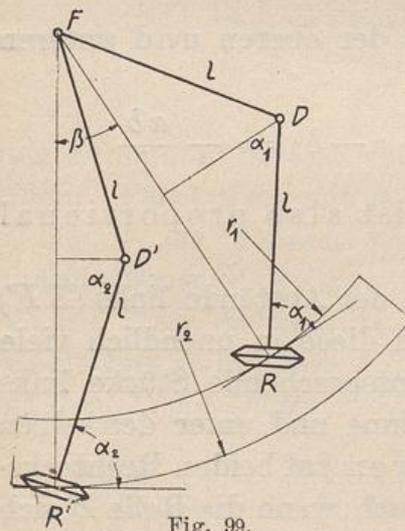


Fig. 99.

d) Polarplanimeter. Gebräuchlicher als dieser Integrator ist das Polarplanimeter (Fig. 98 und 99). Es unterscheidet sich vom vorherigen dadurch, daß die Punkte *A* und *B* (Fig. 95 und 96) zu einem vereinigt sind, der einen festen Drehpunkt *F* bildet.

Wir denken uns die gegebene Fläche durch konzentrische Kreise in Ringe zerlegt und stecken die feste Nadel *F* des Planimeters in ihren Mittelpunkt.

Auch hier können wir uns die Bewegung der Rolle über ein Stück der Kreise aus einem Schieben der Rolle längs ihrer Achse und einem Drehen senkrecht hierzu um ihre Achse zusammengesetzt denken. Die Drehung ist hierbei wie oben proportional dem Sinus des Winkels zwischen Arm und der durchlaufenen Strecke, d. h. hier zwischen Arm und Tangente an dem Bogen.