



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Berührungsgrößen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78413)

Allgemeine Ableitung der Berührungsgrößen.

Es sei der Punkt P_1 einer beliebigen Kurve (Fig. 100) mit den Koordinaten x_1 und y_1 gegeben. Dann sei t die Länge der Tangente und n die Länge der Normalen zwischen dem Berührungspunkt P_1 und der X-Achse; t' und n' seien die entsprechenden Projektionen von t und n auf die X-Achse.

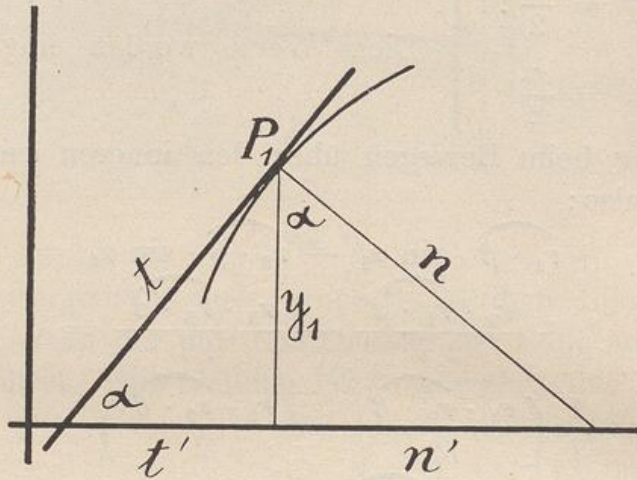


Fig. 100.

Letztere seien zuerst berechnet:¹⁾

$$\text{Die Subnormale } n' = y_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_1 \cdot y'$$

$$\text{Die Subtangente } t' = \frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y_1}{y'}$$

Hieraus ergibt sich:

Die Normale

$$n = \sqrt{n'^2 + y_1^2} = \sqrt{y_1^2 y'^2 + y_1^2} = y_1 \sqrt{1 + y'^2}$$

Die Tangente

$$t = \sqrt{t'^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(\frac{y_1}{y'}\right)^2 + y_1^2} = y_1 \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}$$

Diese Formeln gelten für jede Kurve, deren Gleichung bekannt ist.

¹⁾ Anm.: Statt $\frac{dy}{dx}$ schreibt man kurz y' .

1. Anwendung auf die Parabel. Man berechnet den Differentialquotienten y' der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2 p x$$

aus und setzt ihn in obige Formeln ein. Es ergibt sich, daß

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

ist. Die Steigung beim Berührungspunkt P_1 ist also $\frac{p}{y_1}$. Setzt man dies ein und $y_1^2 = 2 p x_1$, so erhält man:

$$\text{Subnormale } n' = y_1 \frac{p}{y_1} = p$$

$$\text{Subtangente } t' = \frac{y_1 y_1}{p} = \frac{y_1^2}{p} = \frac{2 p x_1}{p} = 2 x_1$$

Normale

$$n = y_1 \sqrt{1 + \frac{p^2}{y_1^2}} = \frac{y_1}{y_1} \sqrt{y_1^2 + p^2} = \sqrt{y_1^2 + p^2}$$

Tangente

$$= y_1 \sqrt{1 + \frac{y_1^2}{p^2}} = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^4}{p^2}} = \sqrt{y_1^2 + \frac{4 p^2 x_1^2}{p^2}} = \sqrt{y_1^2 + 4 x_1^2}$$

2. Anwendung auf die Ellipse. Der Differentialquotient der Ellipsengleichung ist nach Gleichung (22):

$$y' = - \frac{x b^2}{y a^2}$$

Die Steigung am Berührungspunkt P_1 ist also: $-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$

und wird in obige Formeln eingesetzt unter Fortlassung des Vorzeichens, weil nur die absolute Länge in Betracht kommt.

$$\text{Subnormale } n' = y_1 \frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} = \frac{x_1 b^2}{a^2}.$$

$$\text{Subtangente } t' = y_1 \frac{y_1 a^2}{x_1 b^2} = \frac{y_1^2 a^2}{x_1 b^2} = \frac{a^2 b^2 - x_1^2 b^2}{x_1 b^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

$$\text{Normale } n = y_1 \sqrt{1 + \frac{x_1^2 b^4}{y_1^2 a^4}}$$

$$\text{Tangente } t = y_1 \sqrt{1 + \frac{y_1^2 a^4}{x_1^2 b^4}}$$

3. Anwendung auf die Hyperbel. Der Differentialquotient der Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich von dem der Ellipse nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen. Da auch hier das Vorzeichen ohne Belang ist, so stimmen die Formeln mit denen der Ellipse überein.

Sämtliche Formeln, die wir unter 1, 2, 3 für die Berührungsgrößen der Kegelschnitte erhalten haben, sind dieselben wie die früher auf Seite 41, 55 und 63 abgeleiteten.

Übung: 1. Man berechne die Subtangente der gleichseitigen Hyperbel $xy = C$.

2. Welche Konstruktion von Tangenten ergibt sich hieraus?

3. Man berechne die Subtangenten der höheren Parabeln $y^r = q x$.

Die Krümmung.

Legt man an eine Kurve, z. B. an eine Ellipse, Fig. 101, eine Tangente, so kann man durch ihren Berührungspunkt

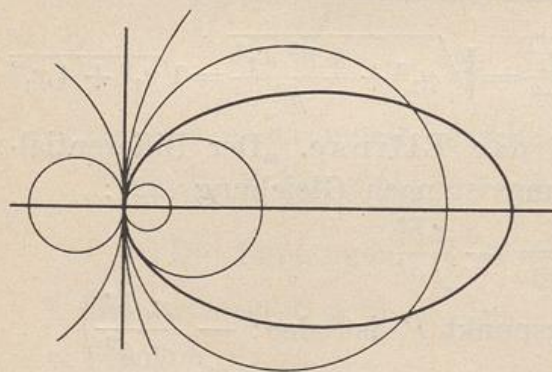


Fig. 101.

unendlich viele Kreise zeichnen, welche dieselbe Tangente berühren. Ellipse und Kreise haben hier dieselbe Steigung, also auch denselben ersten Differentialquotienten.

Da nun eine Tangente durch Drehung einer Sehne entstanden ist, so hat sie mit der berührten

Kurve zwei im Berührungspunkt zusammenfallende Punkte gemeinsam. Alle in Fig. 101 gezeichneten Kurven haben eine Tangente und demnach zwei im Berührungspunkt zusammenfallende Punkte gemeinsam, sie berühren sich.

Unter den gezeichneten Kreisen schmiegen sich viele am Berührungspunkt der Ellipse durchaus nicht an; die linksliegenden krümmen sich sogar nach der entgegengesetzten Seite, obwohl sie zwei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam haben.