Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Krümmung

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

3. Anwendung auf die Hyperbel. Der Differentialquotient der Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich von dem der Ellipse nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen. Da auch hier das Vorzeichen ohne Belang ist, so stimmen die Formeln mit denen der Ellipse überein.

Sämtliche Formeln, die wir unter 1, 2, 3 für die Berührungsgrößen der Kegelschnitte erhalten haben, sind dieselben wie die früher auf Seite 41, 55 und 63 abgeleiteten.

Übung: 1. Man berechne die Subtangente der gleichseitigen Hyperbel $xy = C$.

2. Welche Konstruktion von Tangenten ergibt sich hieraus?

3. Man berechne die Subtangenten der höheren Parabeln $y^r = qx$.

Die Krümmung.

Legt man an eine Kurve, z. B. an eine Ellipse, Fig. 101, eine Tangente, so kann man durch ihren Berührungspunkt unendlich viele Kreise zeichnen, welche dieselbe Tangente berühren. Ellipse und Kreise haben hier dieselbe Steigung, also auch denselben ersten Differentialquotienten.

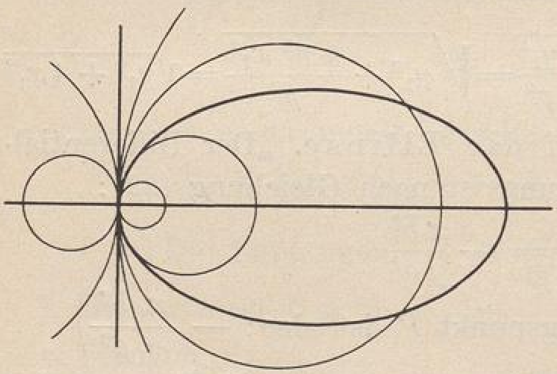

Fig. 101.

Da nun eine Tangente durch Drehung einer Sehne entstanden ist, so hat sie mit der berührten Kurve zwei im Berührungspunkt zusammenfallende Punkte gemeinsam. Alle in Fig. 101 gezeichneten Kurven haben eine Tangente und demnach zwei im Berührungspunkt zusammenfallende Punkte gemeinsam, sie berühren sich.

Unter den gezeichneten Kreisen schmiegen sich viele am Berührungspunkt der Ellipse durchaus nicht an; die linksliegenden krümmen sich sogar nach der entgegengesetzten Seite, obwohl sie zwei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam haben.

Schon der Augenschein lehrt, daß unter den vielen möglichen Kreisen einer sein wird, der sich der Krümmung der Ellipse im Berührungspunkt besonders gut anschmiegen wird, also wohl *mehr als zwei*, vielleicht *drei* zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam haben wird. Ein solcher Kreis heißt *Krümmungskreis*, sein Radius *Krümmungsradius*. Seine Beziehungen zur Kurve sollen untersucht werden.

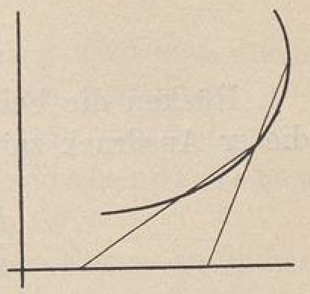

Fig. 102.

Während wir früher *eine* Sehne drehten, bis ihre beiden Schnittpunkte zusammenfielen und sie zur Tangente wurde, wollen wir jetzt *zwei* benachbarte Sehnen nehmen (Fig. 102). Sie haben einen Schnittpunkt gemeinsam und werden so lange gedreht, bis auch die beiden anderen Schnittpunkte mit diesem zusammenfallen und aus den zwei Sehnen zwei unmittelbar benachbarte Tangenten werden, die mit der Kurve *drei* zusammenfallende Punkte gemeinsam haben.

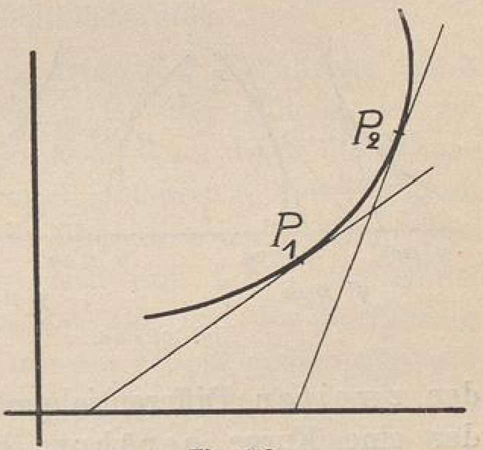

Fig. 103.

Der *Krümmungskreis* einer Kurve hat mit ihr *drei Punkte* und demnach *zwei* auf einander folgende *Tangenten* gemeinsam.

Um dies besser überschauen zu können, sind in Fig. 103 zwei solche unmittelbar nebeneinander liegende Tangenten angedeutet. Je mehr die Steigung der beiden Tangenten von einander abweicht, desto stärker ist auch die Krümmung der Kurve an dieser Stelle.

Die Steigung der Tangente ist dieselbe wie die der Kurve an der betreffenden Stelle, ist also gleich dem Differentialquotienten y' der Kurvengleichung an der Stelle P_1 bezw.

P_2; dieser sei mit y'_1 bezw. y'_2 bezeichnet. Der Unterschied der Steigung der Tangenten ist also:

$$y'_2 - y'_1 = \Delta y'$$

Wir bestimmeu das Verhältnis dieses Unterschiedes $\Delta y'$ zu Δx und erhalten:

$$\frac{y'_2 - y'_1}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x}$$

Rücken die beiden Punkte P_1 und P_2 zusammen, so wird dieser Ausdruck zum zweiten Differentialquotienten [1]):

$$\frac{d(y')}{d x} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{d x} = \frac{d(dy)}{(d x)^2}$$

Obigen Ausdruck schreibt man nun der Kürze halber:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} \text{ oder } y''$$

Da Krümmungskreis und Kurve zwei benachbarte Tangenten gemeinsam haben, so nimmt die Steigung der Tangenten für beide Kurven um denselben Betrag, nämlich um den des zweiten Differentialquotienten zu. Der Krümmungskreis einer Kurve hat mit ihr also nicht nur den ersten, sondern auch den zweiten Differentialquotienten gemeinsam. Ein Kreis, der eine Kurve berührt, hat mit ihr nur den ersten Differentialquotienten gemeinsam.

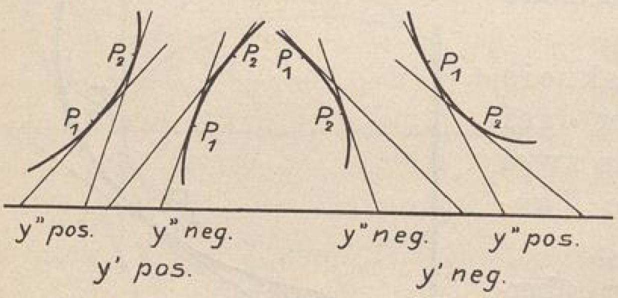

Fig. 104 $a-d$.

Ist $y'_2 > y'_1$, so ist y'' positiv, und die Kurve ist von oben betrachtet hohl (konkav). (Fig. 104 a und d.)

Ist $y'_2 < y'_1$, so ist y'' negativ und die Kurve von oben betrachtet gewölbt (konvex). (Fig. 104 b und c.)

---

[1]) Elemente d. Differential- u. Integralrechnung v. Düsing, S. 30.

Ist $y_2' = y_1'$, so ist $y'' =$ Null, und die Kurve schmiegt sich an dieser Stelle in drei zusammenfallenden Punkten an die Tangente an. War y'' auf der einen Seite des Berührungspunktes positiv, auf der anderen negativ, so wechselt die Kurve hierbei ihre Krümmung. Einen solchen Punkt nennt man Wendepunkt.

Die Art und das Maß der Krümmung wird also durch den zweiten Differentialquotienten bestimmt. Die Art und das Maß der Steigung wird, wie wir früher gesehen haben, durch den ersten Differentialquotienten bestimmt.

Hat man einen Extremwert bei einer Kurve gefunden, indem man $y' = 0$ setzte und hieraus das x des Extremwertes berechnete, so kann man für diesen Punkt y'' berechnen und sieht hieraus, ob die Kurve an dieser Stelle gewölbt oder hohl ist, ob hier also ein Maximum (y'' negativ) oder ein Minimum (y'' positiv) gefunden wurde.

Lage der Krümmungskreise.

Um sich die verschiedenen Arten der Berührung eines Kreises und eines Kegelschnittes, z. B. einer Ellipse, klarzumachen, legt man zunächst einen Kreis quer durch die Ellipse (Fig. 105 *A*). Er schneidet sie im allgemeinen in vier Punkten.

Dann schiebt man den Kreis allmählich nach unten. Die Schnittpunkte *I* und *II* nähern sich und fallen schließlich zusammen (Fig. *B*). Der Kreis hat also bei der Berührung zwei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam und schneidet die Ellipse noch in zwei andern Punkten.

Läßt man den Kreis allmählich wachsen, so fällt schließlich auch Punkt *III* in den Berührungspunkt *I II*. Wir haben also eine Berührung mit drei zusammenfallenden Punkten; der Kreis ist ein Krümmungskreis (Fig. *C*).

Schiebt man den Kreis von Fig. *A* nach links, so nähern sich die Punkte *I* und *IV*. Liegt nun der Mittelpunkt des Kreises auf der *X*-Achse, so fallen schließlich Punkt *I* und *IV* auf der *X*-Achse zusammen (Fig. *D*).