Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Lage der Krümmungskreise

Ist $y_2' = y_1'$, so ist $y'' =$ Null, und die Kurve schmiegt sich an dieser Stelle in drei zusammenfallenden Punkten an die Tangente an. War y'' auf der einen Seite des Berührungspunktes positiv, auf der anderen negativ, so wechselt die Kurve hierbei ihre Krümmung. Einen solchen Punkt nennt man Wendepunkt.

Die Art und das Maß der Krümmung wird also durch den zweiten Differentialquotienten bestimmt. Die Art und das Maß der Steigung wird, wie wir früher gesehen haben, durch den ersten Differentialquotienten bestimmt.

Hat man einen Extremwert bei einer Kurve gefunden, indem man $y' = 0$ setzte und hieraus das x des Extremwertes berechnete, so kann man für diesen Punkt y'' berechnen und sieht hieraus, ob die Kurve an dieser Stelle gewölbt oder hohl ist, ob hier also ein Maximum (y'' negativ) oder ein Minimum (y'' positiv) gefunden wurde.

Lage der Krümmungskreise.

Um sich die verschiedenen Arten der Berührung eines Kreises und eines Kegelschnittes, z. B. einer Ellipse, klarzumachen, legt man zunächst einen Kreis quer durch die Ellipse (Fig. 105 *A*). Er schneidet sie im allgemeinen in vier Punkten.

Dann schiebt man den Kreis allmählich nach unten. Die Schnittpunkte *I* und *II* nähern sich und fallen schließlich zusammen (Fig. *B*). Der Kreis hat also bei der Berührung zwei zusammenfallende Punkte mit der Ellipse gemeinsam und schneidet die Ellipse noch in zwei andern Punkten.

Läßt man den Kreis allmählich wachsen, so fällt schließlich auch Punkt *III* in den Berührungspunkt *I II*. Wir haben also eine Berührung mit drei zusammenfallenden Punkten; der Kreis ist ein Krümmungskreis (Fig. *C*).

Schiebt man den Kreis von Fig. *A* nach links, so nähern sich die Punkte *I* und *IV*. Liegt nun der Mittelpunkt des Kreises auf der *X*-Achse, so fallen schließlich Punkt *I* und *IV* auf der *X*-Achse zusammen (Fig. *D*).

Läßt man diesen Kreis jetzt kleiner werden, so nähern sich auch *II* und *III* dem Scheitel und fallen schließlich mit ihm zusammen (Fig. *E*). Hier haben Kreis und Ellipse vier zusammenfallende Punkte gemeinsam. Einen solchen Krümmungskreis nennen wir „Hauptkrümmungskreis".

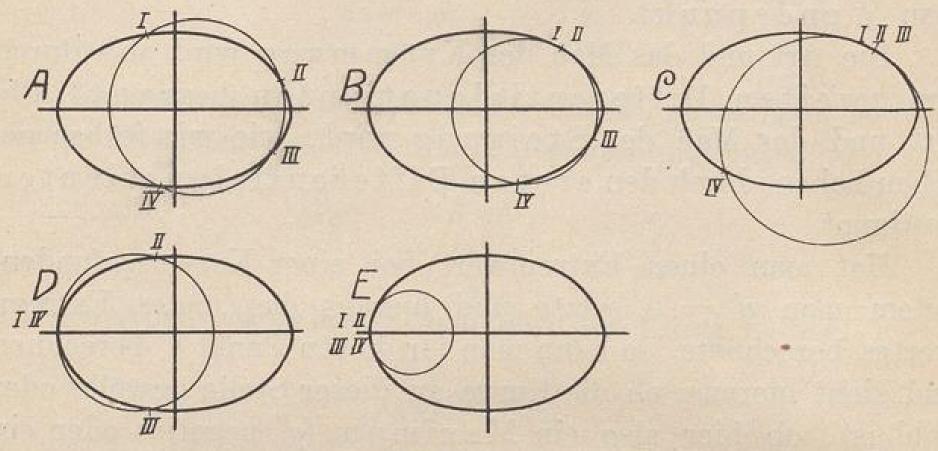

Fig. 105 (*A*—*E*).

Aus Fig. *D* und *E* geht hervor, daß die vier Schnittpunkte nur dann zusammenfallen können, wenn sie sich symmetrisch nähern, d. h. wenn der Mittelpunkt auf der Achse liegt. Hauptkrümmungskreise können also nur an den vier Scheiteln der Ellipse liegen. Bei der Parabel und jedem Hyperbelast gibt es nur einen Hauptkrümmungskreis.

Berechnung der Hauptkrümmungskreise der Kegelschnitte.

Diejenigen Krümmungskreise, welche die Kegelschnitte an einem Scheitel berühren, sind wie gesagt die Hauptkrümmungskreise. Ihr Radius kann auf folgende einfache Weise berechnet werden:

1. Bei der Parabel: Der Scheitel ist beiden Kurven gemeinsam, seine Koordinaten müssen also sowohl die Gleichung der Parabel wie die Scheitelgleichung des Krümmungskreises erfüllen. Erstere lautet:

$$y^2 = 2\,p\,x$$

Letztere (Gleichung 11): $y^2 = 2\,r\,x - x^2$