Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Hauptkrümmungskreise der Kegelschnitte

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Läßt man diesen Kreis jetzt kleiner werden, so nähern sich auch *II* und *III* dem Scheitel und fallen schließlich mit ihm zusammen (Fig. *E*). Hier haben Kreis und Ellipse vier zusammenfallende Punkte gemeinsam. Einen solchen Krümmungskreis nennen wir „Hauptkrümmungskreis“.

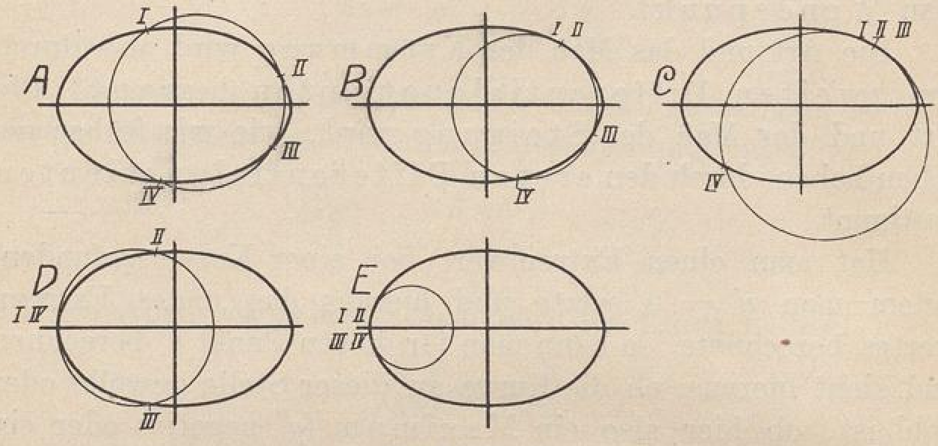

Fig. 105 (*A—E*).

Aus Fig. *D* und *E* geht hervor, daß die vier Schnittpunkte nur dann zusammenfallen können, wenn sie sich symmetrisch nähern, d. h. wenn der Mittelpunkt auf der Achse liegt. Hauptkrümmungskreise können also nur an den vier Scheiteln der Ellipse liegen. Bei der Parabel und jedem Hyperbelast gibt es nur einen Hauptkrümmungskreis.

Berechnung der Hauptkrümmungskreise der Kegelschnitte.

Diejenigen Krümmungskreise, welche die Kegelschnitte an einem Scheitel berühren, sind wie gesagt die Hauptkrümmungskreise. Ihr Radius kann auf folgende einfache Weise berechnet werden:

1. Bei der Parabel: Der Scheitel ist beiden Kurven gemeinsam, seine Koordinaten müssen also sowohl die Gleichung der Parabel wie die Scheitelgleichung des Krümmungskreises erfüllen. Erstere lautet:

$$y^2 = 2\,p\,x$$

Letztere (Gleichung 11): $y^2 = 2\,r\,x - x^2$

Folglich gilt für den Scheitelpunkt $x_1 y_1$:

$$2\,p\,x_1 = 2\,r\,x_1 - x_1^2$$
$$2\,p = 2\,r - x_1$$

Da nun für den Scheitel $x_1 = 0$ ist, so ist

$$\boldsymbol{r = p}.$$

Der Radius des Hauptkrümmungskreises einer Parabel ist also gleich dem halben Parameter und gleich der Ordinate im Brennpunkt (Fig. 106).

2. Bei der Ellipse: Ihre Scheitelgleichung (Gleichung 24) lautet:

$$y^2 = \frac{2\,b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

Die Scheitelgleichung des Kreises:

$$y^2 = 2\,r\,x - x^2$$

Die Koordinaten $x_1 y_1$ des Scheitelpunkts erfüllen beide Gleichungen:

$$\frac{2\,b^2}{a}\,x_1 - \frac{b^2}{a^2}\,x_1^2 = 2\,r\,x_1 - x_1^2$$
$$\frac{2\,b^2}{a} - \frac{b^2}{a^2}\,x_1 = 2\,r - x_1$$

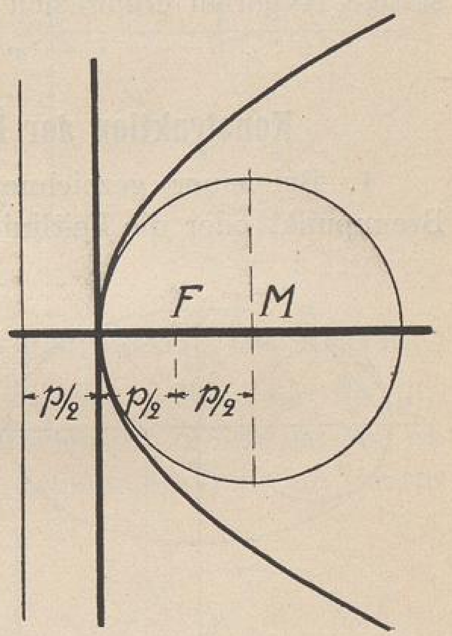

Fig. 106.

Da nun $x_1 = 0$ ist, so ergibt sich

$$\frac{2\,b^2}{a} = 2\,r$$
$$\boldsymbol{r = \frac{b^2}{a} = p}$$

Auch hier ist der Radius des Hauptkrümmungskreises gleich der Ordinate im Brennpunkt. Rechnet man auf ähnliche Weise den Radius des oberen Hauptkrümmungskreises aus, so erhält man

$$\boldsymbol{r = \frac{a^2}{b}}$$

3. Bei der Hyperbel. Die Rechnung wird ebenso durchgeführt wie bei der Ellipse und liefert dasselbe Resultat:

$$r = \frac{b^2}{a}$$

Auch hier erhalten wir also einen Radius, der ebenso groß ist wie die Ordinate im Brennpunkt.

4. Hauptkrümmungskreise der gleichseitigen Kegelschnitte. Sowohl für den Kreis wie für die gleichseitige Hyperbel ergibt sich:

$$r = a.$$

Konstruktion der Hauptkrümmungskreise.

1. Bei einer gezeichneten Parabel ist p durch den Brennpunkt oder die Leitlinie gegeben; gegebenen Falls kann man p auch als Subnormale finden.

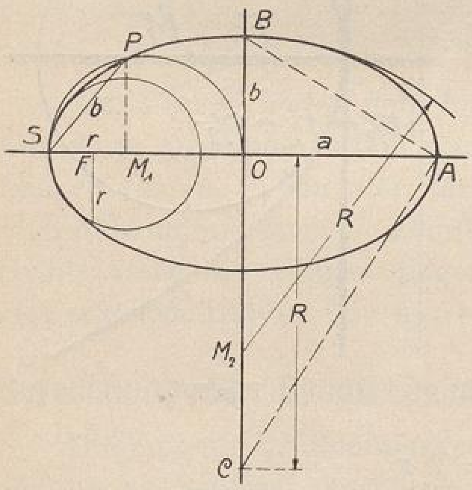

Fig. 107.

2. Bei der Ellipse: Man schlägt über $S\,O$ einen Halbkreis (Fig. 107) und mit b als Radius einen Kreis um S; beide schneiden sich in P. Dann ist die Projektion $S\,M_1$ von der Strecke $S\,P$ oder b auf die große Achse gleich dem gesuchten Radius r des Hauptkrümmungskreises. Es ist nämlich

$$b^2 = S\,P^2 = r\,a, \text{ also } r = \frac{b^2}{a}$$

Sucht man den oberen Hauptkrümmungskreis, so verbindet man die Endpunkte von b und a, nämlich B und A, miteinander und errichtet in A auf $A\,B$ ein Lot, welches auf der unteren Hälfte der Y-Achse eine Strecke abschneidet, die gleich dem gesuchten Radius R des Hauptkrümmungskreises ist. Hier ist nämlich