Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Allgemeine Ableitung der Krümmungskreise

$$a^2 = b \cdot R, \text{ also } R = \frac{a^2}{b}$$

3. Bei der Hyperbel: Man errichtet auf der Asymptote (Fig. 108) im Schnittpunkt mit b, nämlich in B, ein Lot. Dann ist die Projektion dieses Lotes auf die X-Achse der gesuchte Radius r. Es ist nämlich

$$b^2 = a \cdot r, \text{ also } r = \frac{b^2}{a}$$

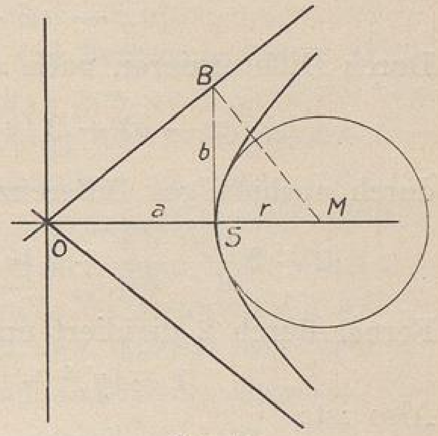

Fig. 108.

Bei allen drei Kegelschnitten kann man auch im Brennpunkt eine Ordinate errichten. Diese ist gleich dem gesuchten Radius des Hauptkrümmungskreises.

Allgemeine Ableitung der Krümmungskreise von Kurven.

Obige Formeln und Konstruktionen gelten nur für die Hauptkrümmungskreise der Kegelschnitte. Diese liegen an den Scheiteln. Will man den Krümmungskreis an einem anderen Punkt der Kegelschnitte oder für irgendeine andere Kurve berechnen, so bedarf man einer allgemeinen Formel, die jetzt abgeleitet werden soll.

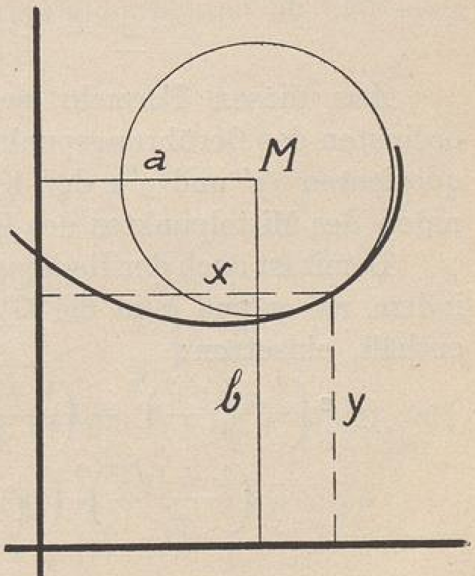

Fig. 109.

Der gesuchte Kreis hat an der Berührungsstelle denselben ersten (y') und zweiten Differentialquotienten (y'') wie die Kurve. Wenn die Gleichung der Kurve gegeben ist, so kann man ihre Differentialquotienten berechnen. Setzt man diese in die allgemeine Gleichung des Kreises ein, so läßt sich aus der erhaltenen Gleichung die Lage des Kreises, also die Länge von a und b der Figur 109 berechnen.

Angenommen, der Kreis um M sei der Krümmungskreis für Punkt (x, y) einer Kurve, so ist seine Gleichung:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I})$$

Durch Differenzieren nach x erhält man:

$$2\,(x - a) + 2\,(y - b)\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{II})$$

durch nochmaliges Differenzieren bekommt man:

$$2 + 2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{dy}{dx} + 2\,(y - b)\,\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Ferner durch 2 dividiert und kurz geschrieben gibt:

$$1 + (y')^2 + y\,y'' - b\,y'' = 0$$

Also ist:

$$\underline{b} = \frac{1 + (y')^2 + y\,y''}{y''} = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} \quad . \; . \; . \quad (\mathrm{III})$$

Setzt man b in die obige Gleichung (II) des ersten Differentialquotienten ein, so läßt sich hieraus auch a berechnen:

$$x - a + y\,y' - y'\,\frac{1 + (y')^2}{y''} - y\,y' = 0$$

Also ist:

$$\underline{a} = x - y'\,\frac{1 + (y')^2}{y''} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{IV})$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß durch die Koordinaten des Berührungspunktes (x und y) und die Differentialquotienten (y' und y'') der Kurve die Lage d. h. die Koordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises bestimmt sind.

Damit ist auch der Radius r des Krümmungskreises gegeben, indem wir a und b in die Gleichung (I) des Kreises, die ja r enthält, einsetzen:

$$(y')^2 \left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 + \left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right)^2 \left((y')^2 + 1\right) = r^2$$

$$\underline{r^2} = \frac{(1 + (y')^2)^3}{(y'')^2} \quad . \; . \quad (\mathrm{V})$$

Hiermit ist also der Radius des Krümmungskreises einer beliebigen Kurve in einem beliebigen Punkte bestimmt.

Bemerkung: Da $r = \pm \frac{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}{y''}$ ist, so wechselt das Vorzeichen von r mit demjenigen von y''. Wir hatten früher gesehen, daß bei Zunahme der Steigung der Kurve y'' positiv und die Kurve von oben gesehen hohl ist (Fig. 104 a und d). Alsdann liegt der Krümmungsmittelpunkt oberhalb, und der Krümmungsradius sei dann positiv. — Wird die Kurve flacher, so wächst der Krümmungsradius schließlich ins Unendliche. Dies ist der Fall, wenn z. B. die Kurve zu einer Geraden wird oder bei einem Wendepunkt der Kurve; y'' ist hier gleich Null. — Wird die Kurve von oben gesehen gewölbt, so wird der Krümmungsradius negativ. Der Krümmungsmittelpunkt kommt gleichzeitig aus dem Unendlichen auf der negativen Seite zurück ins Endliche, der zweite Differentialquotient ist negativ (Fig. 104 b, c). — Wird die Krümmung der Kurve stärker, so wird der Krümmungsradius schließlich Null und es entsteht ein Punkt.

1. Anwendung auf die Parabel.

Man leitet die beiden Differentialquotienten ab und setzt sie in obige Formel (V) für r^2 ein.

Die Gleichung der Parabel ist: $y^2 = 2\,p\,x$

Der erste Differentialquotient:

$$y' = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}} = \sqrt{\frac{p}{2x}}$$

Der zweite Differentialquotient:

$$y'' = -\sqrt{\frac{p}{2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2\,x^3}}$$

Diese Größen werden in die Formel (V) für r^2 eingesetzt:

$$\frac{r^2}{} = \frac{\left(1 + \frac{p}{2\,x}\right)^3}{\frac{p}{8\,x^3}} = \frac{(2\,x + p)^3\;8\,x^3}{8\,x^3\,p} = \frac{(2\,x + p)^3}{p}$$

Bemerkung: Die Dimension der Formel ist richtig. Zur weiteren Prüfung setzen wir $x = 0$, was am Scheitel der Parabel der Fall ist, und erhalten:

$$r^2 = \frac{p^3}{p} \text{ und } r = p.$$

Dies stimmt mit der früher (S. 123) gefundenen Formel für den Radius des Hauptkrümmungskreises überein.

2. Anwendung auf die Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse ist:

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$$

Man differenziert und erhält:

$$2 b^2 x + 2 a^2 y y' = 0$$

Also ist

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Man differenziert abermals:

$$2 b^2 + 2 a^2 (y')^2 + 2 a^2 y y'' = 0$$

Also ist

$$y'' = \frac{-b^2 - a^2 (y')^2}{a^2 y} = -\frac{b^2 a^2 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^3} =$$

$$-\frac{b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^4 y^3} = -\frac{a^2 b^4}{a^4 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

Die erhaltenen beiden Differentialquotienten werden in die Formel für r^2 eingesetzt:

$$r^2 = \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^3 a^4 y^6}{b^8} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3 a^4 y^6}{a^{12} y^6 b^8} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8 b^8}.$$

Bemerkung: Die Formel hat die richtige Dimension. Zur weiteren Prüfung setzen wir $x = a$ und $y = 0$. Dann wird:

$$r^2 = \frac{(b^4 a^2)^3}{a^8 b^8} = \frac{b^{12} a^6}{a^8 b^8} = \frac{b^4}{a^2}$$

Also ist $r = \frac{b^2}{a}$

Setzt man dagegen $x = 0$ und $y = b$, so erhält man

$$r = \frac{a^2}{b}.$$

Beide Resultate stimmen überein mit den Formeln für die Radien der Hauptkrümmungskreise der Ellipse.

3. Anwendung auf die Hyperbel.

Die Differentialquotienten sind dieselben wie bei der Ellipse, nur hat der erste das entgegengesetzte Vorzeichen. Da beide in der Formel für r^2 als Quadrate vorkommen, so erhält man dieselbe Formel für r^2 wie bei der Ellipse.

Aufgabe: 1. Bei einer Ellipse soll man den Radius desjenigen Krümmungskreises zahlenmäßig berechnen, dessen Berührungspunkt senkrecht über dem Brennpunkt liegt, also etwa wie bei Fig. 105 *C*. Bei der Ellipse sei gegeben:

$$a = 9 \text{ und } b = 7 \text{ cm.}$$

Anleitung: Man berechnet das x und y des Berührungspunktes und setzt es ebenso wie das gegebene a und b in die Formel für den Krümmungsradius der Ellipse ein:

$$r^2 = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8 b^8}$$

Oder man berechnet aus x, y, a, b zuerst y' und y'' und setzt diese Größen in die allgemeine Formel (V) des Krümmungsradius ein:

$$r^2 = \frac{(1 + (y')^2)^3}{(y'')^2}$$

2. Die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ und der Hauptkrümmungskreis sollen verglichen werden, und zwar sollen die Ordinaten in der halben Brennweite $\left(x_1 = \frac{p}{4}\right)$ für beide Kurven berechnet und verglichen werden.

Das Ergebnis wird zeigen, daß die Gestalt der Parabel in der Nähe des Scheitels sich nur wenig von der des Hauptkrümmungskreises unterscheidet. Daher nimmt man oft statt der parabolischen Spiegel kugelförmige, die sich leichter herstellen lassen. Doch dürfen sie im Vergleich zur Brennweite nicht zu groß sein. Der Brennpunkt liegt dann in der Mitte des Radius (Fig. 106).

3. Man untersuche die Krümmungen der Kegelschnitte. Hierbei wird man finden, daß y'' stets beide Vorzeichen hat, wenn es durch x ausgedrückt ist, weil zu jedem x eine gewölbte und eine hohle Stelle gehört. Drückt man aber y'' durch y aus, so hat es entweder das positive oder das negative Vorzeichen. Für negative y sind die Kurven von oben betrachtet hohl, für positive oberhalb der X-Achse sind sie dagegen gewölbt.

4. Man untersuche, ob die Kegelschnitte Wendepunkte haben.

5. Man bestimme für die Kurve

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

Maximum, Minimum und Wendepunkt, ferner den Radius der Krümmungskreise an den Stellen des Maximums und Minimums, sowie die Koordinaten der Mittelpunkte dieser Krümmungskreise. [1])

6. Man führe dieselben Rechnungen für die Kurve mit folgender Gleichung aus:

$$y = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$$

Andere Koordinatensysteme.

Unter besonderen Umständen ist es angebracht, andere Koordinaten als die rechtwinkligen zu gebrauchen.

Gebogene Koordinaten.

1. Bei vielen Registrierapparaten, z. B. bei einem selbstschreibenden Barometer, dreht sich eine Trommel von einem Uhrwerk getrieben langsam um ihre Achse. Auf sie ist

[1]) Weitere Beispiele über Minim., Maxim. u. Wendepunkte findet man: „Elem. d. Diff.- u. Integ.-Rechnung" v. Düsing, 2. Aufl., S. 54—67.