



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Schiefwinklige Koordinaten

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78413](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78413)

ein Papierstreifen gewickelt, über den ein Stift fährt und den Barometerstand aufschreibt. Da der Stift aber an einem langen Hebelarm sitzt, der sich um einen Drehpunkt bewegt, so würde er bei stillstehender Trommel Kreisbögen auf das Papier schreiben. Die Ordinaten sind daher Kreislinien, deren Radius gleich der Hebellänge ist. Jede horizontale Linie entspricht einem bestimmten Barometerstand (Fig. 110); jeder Kreisbogen einer bestimmten Stunde. Auf dem Registrierpapier sind solche Kreislinien für jede zweite Stunde vor-

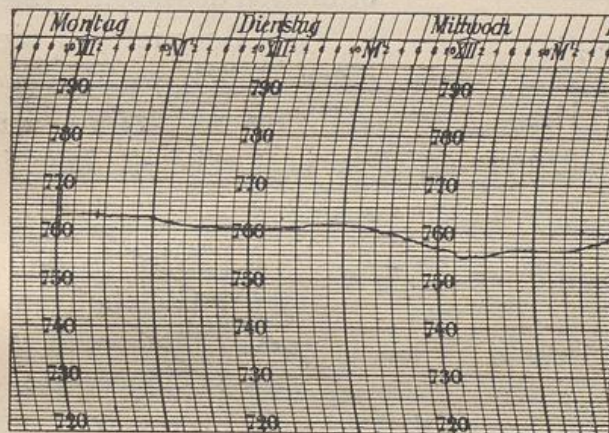


Fig. 110.

gezeichnet. Bei der Bewegung der Trommel zeichnet nun der Stift eine Kurve auf, welche den Verlauf des Barometerstandes angibt.

2. Auch die geographische Breite und Länge, die bekanntlich zur Bestimmung der Lage eines Ortes auf der Erde dient, mag als eine Art gebogener Koordinaten hier erwähnt werden. Die Messung geschieht wie bekannt nach Graden, Minuten und Sekunden.

Schiefwinklige Koordinaten.

Umformung: Die rechtwinkligen Koordinaten x und y eines Punktes sollen in die Koordinaten ξ und η eines Systems umgerechnet werden, dessen Achsen einen schiefen Winkel (hier $\beta - \alpha$) miteinander bilden (Fig. 111).

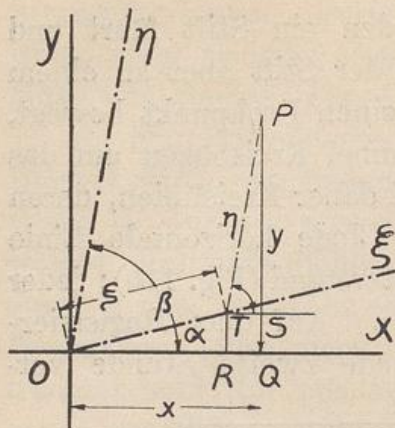


Fig. 111.

$$\begin{aligned}
 x &= OQ = OR + QR = OR + ST, \\
 x &= \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta, \\
 &\text{weil } \sphericalangle PTS = \beta, \\
 y &= PQ = PS + SQ = PS + RT, \\
 y &= \eta \sin \beta + \xi \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Diese Umrechnung wird in die gegebene Gleichung des Punktes oder der Linie eingesetzt, und man erhält eine Gleichung, die die Koordinaten des neuen Systems enthält.

Als Beispiel soll die Gleichung einer beliebigen Hyperbel in bezug auf ihre Asymptoten aufgestellt werden. Der Winkel der Asymptoten (Fig. 112) sei 2φ , dann ist unser

$$\alpha = -\varphi \text{ und } \beta = +\varphi$$

Ferner ist: $\sin \alpha = -\sin \beta = \frac{b}{e}$ } wird in die
 $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{a}{e}$ } Gleichungen
 für x und y
 eingesetzt:

$$x = \xi \frac{a}{e} + \eta \frac{a}{e} = (\xi + \eta) \frac{a}{e}$$

$$y = \eta \frac{b}{e} - \xi \frac{b}{e} = (\eta - \xi) \frac{b}{e}$$

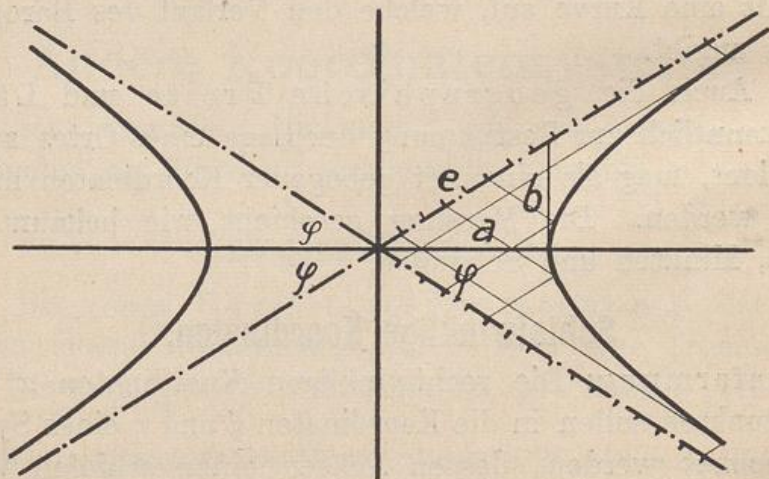


Fig. 112.

Eingesetzt in die Gleichung der Hyperbel

$$x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2 \text{ gibt:}$$

$$(\xi^2 + 2 \xi \eta + \eta^2) \frac{a^2 b^2}{e^2} - (\eta^2 - 2 \xi \eta + \xi^2) \frac{a^2 b^2}{e^2} = a^2 b^2$$

$$\xi^2 + 2 \xi \eta + \eta^2 - \eta^2 + 2 \xi \eta - \xi^2 = e^2$$

$$4 \xi \eta = e^2$$

$$\xi \eta = \frac{e^2}{4}$$

Also ist auch hier das Produkt der Koordinaten eine Konstante. Für die gleichseitige Hyperbel ist $a = b$, also

$$e^2 = a^2 + a^2 = 2 a^2.$$

Demnach $\xi \eta = \frac{a^2}{2}$, wie früher gefunden.

Polarkoordinaten.

Die Lage eines Punktes P in einer Ebene kann auch durch die Länge r der Verbindungslinie mit einem festen

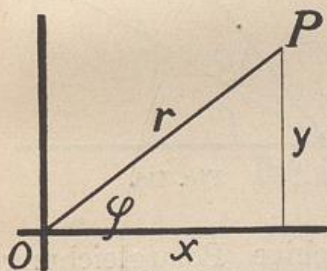


Fig. 113.

Punkte O und durch den Winkel φ bestimmt werden (Fig. 113), den diese Verbindungslinie mit einer festen Geraden $O X$ bildet, die durch den Punkt O geht. Der Winkel wird wie beim Einheitskreis durch eine Drehung links herum, also von $O X$ nach $O P$ positiv gerechnet.

Die Länge r heißt Leitstrahl (Radius vector) und φ der Polarwinkel (Anomalie); beide heißen Polarkoordinaten. Der feste Punkt O heißt Pol und $O X$ die Polarachse. Die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten hat also im allgemeinen die Form $r = f(\varphi)$ oder auch $\varphi = f(r)$. Die Polarkoordinaten werden unter anderem vorteilhaft verwendet bei der Aufstellung der Gleichungen von verschiedenen Spiralen.

Umwandlung: Die rechtwinkligen Koordinaten kann man in Polarkoordinaten umwandeln. Wie die Fig. 113 zeigt, ist nämlich:

$$x = r \cos \varphi \text{ und } y = r \sin \varphi.$$