Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Polarkoordinaten

Eingesetzt in die Gleichung der Hyperbel

$$x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2 \text{ gibt:}$$

$$(\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2)\,\frac{a^2 b^2}{e^2} - (\eta^2 - 2\,\xi\,\eta + \xi^2)\,\frac{a^2 b^2}{e^2} = a^2 b^2$$

$$\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2 - \eta^2 + 2\,\xi\,\eta - \xi^2 = e^2$$

$$4\,\xi\,\eta = e^2$$

$$\xi\,\eta = \frac{e^2}{4}.$$

Also ist auch hier das Produkt der Koordinaten eine Konstante. Für die gleichseitige Hyperbel ist $a = b$, also

$$e^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2.$$

Demnach $\xi\,\eta = \frac{a^2}{2}$, wie früher gefunden.

Polarkoordinaten.

Die Lage eines Punktes P in einer Ebene kann auch durch die Länge r der Verbindungslinie mit einem festen Punkte O und durch den Winkel φ bestimmt werden (Fig. 113), den diese Verbindungslinie mit einer festen Geraden OX bildet, die durch den Punkt O geht. Der Winkel wird wie beim Einheitskreis durch eine Drehung links herum, also von OX nach OP positiv gerechnet.

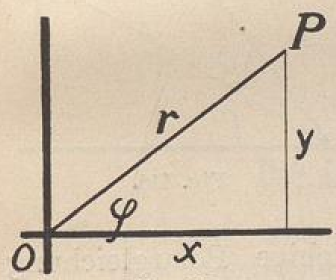

Fig. 113.

Die Länge r heißt Leitstrahl (Radius vector) und φ der Polarwinkel (Anomalie); beide heißen Polarkoordinaten. Der feste Punkt O heißt Pol und OX die Polarachse. Die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten hat also im allgemeinen die Form $r = f\,(\varphi)$ oder auch $\varphi = f\,(r)$. Die Polarkoordinaten werden unter anderem vorteilhaft verwendet bei der Aufstellung der Gleichungen von verschiedenen Spiralen.

Umwandlung: Die rechtwinkligen Koordinaten kann man in Polarkoordinaten umwandeln. Wie die Fig. 113 zeigt, ist nämlich:

$$x = r \cos \varphi \text{ und } y = r \sin \varphi.$$

Diese Formeln gelten, wenn der Anfangspunkt O beider Koordinatensysteme derselbe ist und die X-Achse des rechtwinkligen Systems mit OX zusammenfällt. Ist dies nicht der Fall, so muß das rechtwinklige Koordinatensystem entsprechend verschoben und gegebenenfalls auch gedreht werden.

Bei der Parabel z. B. sei der Brennpunkt F der Pol und die Achse der Parabel auch Achse des Systems. Dann ist (Fig. 114):

$$r = PM = LQ = LF + FQ = p + r \cos\varphi$$

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

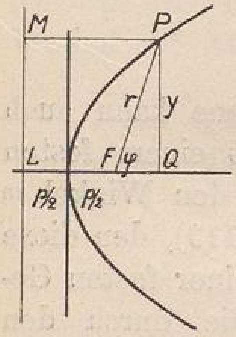

Fig. 114.

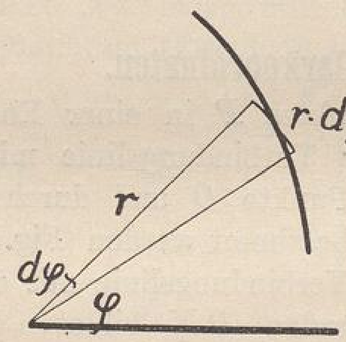

Fig. 115.

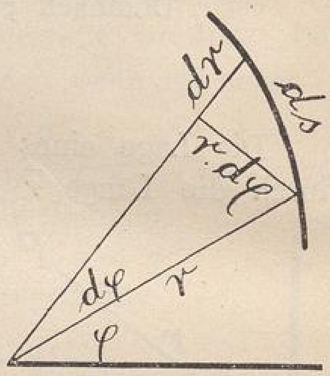

Fig. 116.

Rückwandlung: Soll eine beliebige Polargleichung wieder in eine Gleichung mit rechtwinkligen Koordinaten verwandelt werden (Fig. 113), so setzt man:

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die Fläche, die von einer Kurve und zwei Leitstrahlen eingeschlossen wird, läßt sich auf folgende Weise berechnen (Fig. 115). Man denkt sich die Fläche durch benachbarte Leitstrahlen in unendlich schmale Dreiecke zerlegt. Jedes hat die Fläche

$$dF = \frac{r}{2} \cdot \widehat{r \cdot d\varphi}$$

Die ganze Fläche von φ_1 bis φ_2 ist also

$$F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(f(x)\right)^2 \cdot d x$$

Die Bogenlänge. Man zerlegt in derselben Weise Für das Bogenteilchen ds gilt dann (Fig. 116):

$$(ds)^2 = (r \cdot d\varphi)^2 + (dr)^2$$

$$ds = \sqrt{r^2 \cdot (d\varphi)^2 + (dr)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi$$

Die ganze Länge zwischen φ_1 und φ_2 bzw. zwischen r_1 und r_2 ist also:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi. = \frac{dr}{d\varphi}\sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 1} \cdot d\varphi$$

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 1} \cdot dr$$

Die Logarithmische Spirale.

Man denkt sich von einem Punkte O aus Strahlen gezogen. Die logarithmische Spirale windet sich spiralig um den Punkt O und trifft jeden Strahl unter demselben Winkel (α) Ein Stück der Spirale hiervon ist in Fig. 117 gezeichnet.

In dieser Figur ist um O ein Kreis mit dem Radius 1 geschlagen. Auf seinem Umfang schneidet man einen Bogen AR ab, der so lang ist wie der Radius; es ist also $AR = 1$. Dann teile man AR in sehr viele gleiche Teile, z. B. n-Teile. Jeder Bogenteil ist also $= \frac{1}{n}$. Ferner legt man durch den Mittelpunkt O und jeden Teilpunkt einen Strahl. Endlich zieht man von A aus eine kurze Gerade, die den folgenden Strahl unter dem Winkel α trifft; auf diese Weise geht man geradlinig unter dem konstanten Winkel α von Strahl zu Strahl