Leitfaden der Kurvenlehre

Düsing, Karl

Hannover, 1911

Die logarithmische Spirale

urn:nbn:de:hbz:466:1-78413

Die ganze Fläche von φ_1 bis φ_2 ist also

$$F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cdot d\,\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Big(f\,(x)\Big)^2 \cdot d\,x$$

Die Bogenlänge. Man zerlegt in derselben Weise Für das Bogenteilchen $d\,s$ gilt dann (Fig. 116):

$$(d\,s)^2 = (r \cdot d\,\varphi)^2 + (d\,r)^2$$

$$d\,s = \sqrt{r^2 \cdot (d\,\varphi)^2 + (d\,r)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d\,r}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\,\varphi$$

Die ganze Länge zwischen φ_1 und φ_2 bzw. zwischen r_1 und r_2 ist also:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{d\,r}{d\,\varphi}\right)^2} \cdot d\,\varphi. = \frac{dr}{d\varphi}\sqrt{r^2\left(\frac{d\varphi}{d\,r}\right)^2 + 1} \cdot d\varphi$$

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2\left(\frac{d\,\varphi}{d\,r}\right)^2 + 1} \cdot dr$$

Die Logarithmische Spirale.

Man denkt sich von einem Punkte O aus Strahlen gezogen. Die logarithmische Spirale windet sich spiralig um den Punkt O und trifft jeden Strahl unter demselben Winkel (α) Ein Stück der Spirale hiervon ist in Fig. 117 gezeichnet.

In dieser Figur ist um O ein Kreis mit dem Radius 1 geschlagen. Auf seinem Umfang schneidet man einen Bogen $A\,R$ ab, der so lang ist wie der Radius; es ist also $A\,R = 1$. Dann teile man AR in sehr viele gleiche Teile, z. B. n-Teile. Jeder Bogenteil ist also $= \frac{1}{n}$. Ferner legt man durch den Mittelpunkt O und jeden Teilpunkt einen Strahl. Endlich zieht man von A aus eine kurze Gerade, die den folgenden Strahl unter dem Winkel α trifft; auf diese Weise geht man geradlinig unter dem konstanten Winkel α von Strahl zu Strahl

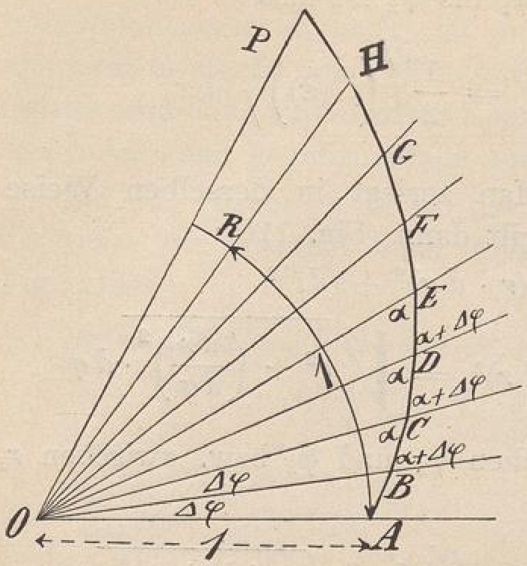

Fig. 117.

und trifft den Schenkel des Einheitswinkels $A\,O\,R$ in H und den Schenkel des beliebigen Winkels $A\,O\,P$ in P.

Die Teilwinkel haben alle die Größe:

$$\varDelta\,\varphi = \frac{1}{n}$$

Besteht der beliebige Winkel $A\,O\,P = \varphi$ aus p-Teilen, so beträgt er:

$$\varphi = \frac{p}{n}$$

Es soll untersucht werden, in welcher Weise die Strahlen r im Vergleich zu den Bogenlängen der Winkel φ wachsen [1]).

Die aufeinanderfolgenden Strahlen verhalten sich wie:

$$\frac{O\,B}{1} = \frac{O\,C}{O\,B} = \frac{O\,D}{O\,C} = \frac{O\,E}{O\,D} \,.\,. = \frac{\sin\,(\alpha + \varDelta\,\varphi)}{\sin\alpha} = c$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= O\,A = 1 \\
r_2 &= O\,B = 1 \cdot \frac{\sin\,(\alpha + \varDelta\,\varphi)}{\sin\alpha} = c \\
r_3 &= O\,C = O\,B \cdot c = c^2 \\
r_4 &= O\,D = O\,C \cdot c = c^3 \\
&\;\,.\,. \qquad\quad .\,. \qquad\quad .\,. \\
r_n &= O\,H \qquad\qquad\;\; = c^n \\
&\;\,.\,. \qquad\quad .\,. \qquad\quad .\,. \\
r &= O\,P \qquad\qquad\;\; = c^p
\end{aligned}$$

Setzt man nun den Strahl des Einheitswinkels:

$$O\,H = a$$

und demnach $\quad a = c^n$

und $\quad c = a^{\frac{1}{n}}$

[1]) Eine weitergehende Untersuchung findet sich: „Elemente der Differential- und Integralrechnung“ von Düsing, S. 67—71.

so erhält man: $r = OP = a^{\frac{}{n}}$

d. h. $r = a^{\varphi}$

oder $\varphi = \log_a r$

Dies ist die Gleichung der logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten, denn für $n = \infty$ wird die bisher betrachtete gebrochene Linie zur Kurve. Die Bogen φ auf dem Einheitskreis sind die Logarithmen zur Basis a der zugehörigen Strahlen r.

Für $\varphi = 0$ wird $r = 1$.

Für $\varphi = -\infty$ wird $r = 0$. Also nähert sich die Kurve dem Punkte O immer mehr, ohne ihn zu erreichen, d. h. O ist ein asymptotischer Punkt.

Anwendung: Man gibt den Zähnen von Fräsern die Form einer logarithmischen Spirale, damit auch nach dem Schleifen des stumpf gewordenen Fräsers der Winkel zwischen Radius und Rücken der Schneide derselbe bleibt wie vorher. Bei Scheren mit bogenförmig geführtem Scherblatt macht man das feststehende Blatt geradlinig und krümmt das andere nach einer logarithmischen Spirale. Man erreicht hierdurch, daß der Winkel zwischen den schneidenden Kanten bei jeder Stellung derselbe ist; dieser Winkel muß kleiner gemacht werden als der Reibungswinkel, damit das unter der Schere befindliche Werkstück nicht von den Schneiden herausgeschoben wird.