Gewichtete Fréchet- und (LB)-Räume holomorpher Funktionen

von

Elke Wolf
Universität Paderborn
D-33095 Paderborn

Paderborn, November 2004

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere

- bei Klaus Bierstedt für die sehr gute Betreuung, viele anregende Fragen und die geduldige Beantwortung all meiner Fragen sowie das sehr gute Arbeitsklima.
- bei José Bonet für seine trotz der räumlichen Entfernung andauernde sehr gute Betreuung und alles, was ich von ihm lernen durfte, sowie für die sehr fruchtbaren Diskussionen mit ihm und die nahezu unendliche Geduld, mit der er jede meiner vielen Fragen beantwortet hat.
- bei Wolfgang Lusky für die Beantwortung meiner Fragen.
- bei Alfredo Peris für die Angabe von Referenzen und die Beantwortung meiner Fragen.
- bei Simone Agethen für das sehr gute Arbeitsklima in unserem gemeinsamen Büro.
- bei meiner Mutter und meinem Bruder, die mich während meines gesamten Studiums stets unterstützt haben.
- bei meinem Ehemann Andrej Wolf dafür, daß er seine eigenen Wünsche häufig hinter meine gestellt hat und mich in den letzten Wochen so sehr unterstützt hat, daß ich fast meine gesamte Zeit dieser Arbeit widmen konnte.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gewichtete Räume stetiger Funktionen wurden von Nachbin (siehe dazu [56], [57], [58]) in seinen Arbeiten über Approximationstheorie, genauer gesagt in der Behandlung des gewichteten Approximationsproblems, eingeführt.
Gewichtete Räume holomorpher und stetiger Funktionen treten in verschiedenen Bereichen der Funktionalanalysis und ihrer Anwendungen auf, beispielsweise in der Distributionstheorie, bei partiellen Differentialgleichungen und Integraloperatoren, in der Spektraltheorie, in Fourier- und komplexer Analysis (siehe beispielsweise [30], [31], [32], [34], [36], [66]).
Frécheträume allgemein haben von Beginn an eine wichtige Rolle in der Funktionalanalysis gespielt. Der Begriff der Distinguiertheit stammt von Dieudonné und Schwartz. Eigenschaften wie nuklear, Schwartz und quasinormabel wurden von Grothendieck eingeführt. Die Dichtheitsbedingung definierte Heinrich im Zuge seiner Untersuchungen von Ultrapotenzen in [42]. Sie wurde dann von Bierstedt und Bonet in [10] im Rahmen von Frécheträumen eingehend studiert. Bierstedt und Bonet definierten in [8] die dualen Dichtheitsbedingungen und untersuchten sie im Rahmen von (DF)-Räumen.
All diese Eigenschaften konnten für Köthesche Folgenräume und gewichtete Frécheträume stetiger Funktionen bereits in Termen von Gewichten charakterisiert werden. In dieser Arbeit wird dies im Falle von holomorphen Funktionen vorgenommen. Dabei erweisen sich die in einem Spezialfall von Andersen und Duncan in [2] eingeführten und von Bierstedt, Bonet und Taskinen in [18] eingehend untersuchten sogenannten *assoziierten* Gewichte als das geeignete Hilfsmittel.
Für die Charakterisierung der Quasinormabilität und der Dichtheitsbedingung spielt die von Bierstedt und Bonet in [14] eingeführte Klasse $\mathcal{W}$ von radialen Gewichten auf dem Einheitskreis die entscheidende Rolle, da sie gewissermaßen eine Zerlegung holomorpher Funktionen ermöglicht.
Bierstedt, Bonet und Taskinen untersuchten in [18] induktive Limites und deren projektive Hüllen u.a. auf Eigenschaften wie Schwartz, semi-Montel und beschränkt-retraktiv. Dabei beeinflussen die einzelnen Gewichte einander nicht.
Bei der Betrachtung von Frécheträumen ist dies leider nicht gegeben. Daher erwies es sich als notwendig, durch Zusatzbedingungen sicherzustellen, daß die Störung der Gewichte untereinander minimiert wird. Dabei stellen sich die Bedingungen vom Typ der von Bierstedt, Bonet und Galbis in [12] und [17] gegebenen als sehr hilfreich heraus. Für Quasinormabilität und die Dichtheitsbedingung bietet die Klasse $\mathcal{W}$ von Gewichten einen geeigneten

Rahmen.

Gewichtete induktive Limites treten u.a. in [34] auf. Ehrenpreis' Frage nach der analytisch uniformen Struktur gewichteter induktiver Limites von Räumen holomorpher Funktionen warf das sogenannte Problem der projektiven Darstellung auf. Es stellt sich die Frage, wann $\mathcal{V}H(G)$ und $H\overline{V}(G)$ bzw. $\mathcal{V}_0H(G)$ und $H\overline{V}_0(G)$ algebraisch und topologisch gleich sind. Die topologische Frage bedeutet, anders ausgedrückt, die Frage nach einer Beschreibung der induktiven Limes-Topologie durch ein System von gewichteten Halbnormen. Für gewichtete induktive Limites von Räumen stetiger Funktionen und ihre projektiven Hüllen konnte eine Charakterisierung der dualen Dichtheitsbedingungen in Termen von Gewichten gegeben werden (siehe dazu [9]).
In dieser Arbeit wird im Rahmen der Klasse $\mathcal{W}$ auf dem offenen Einheitskreis sowohl eine Charakterisierung der dualen Dichtheitsbedingungen für die gewichteten induktiven Limites von Räumen holomorpher Funktionen ebenso wie für ihre projektiven Hüllen gegeben als auch ein Zusammenhang zwischen den dualen Dichtheitsbedingungen und der projektiven Darstellung hergestellt.

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 3 werden die gewichteten Fréchetträume holomorpher Funktionen auf Eigenschaften wie Montel, reflexiv, und Schwartz untersucht. Dabei kann für eine wachsende Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver stetiger Funktionen auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, gezeigt werden, daß die Gleichheit $HW(G) = HW_0(G)$ äquivalent ist zur Reflexivität von $HW_0(G)$ (Satz 3.3). Desweiteren wird eine Charakterisierung in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten für $HW(G) = HW_0(G)$ und die Monteleigenschaft von $HW(G)$ gegeben (Satz 3.6). Im Rahmen dieser recht allgemeinen Voraussetzungen werden notwendige Bedingungen für die Quasinormabilität (Proposition 3.22) und die Dichtheitsbedingung (Proposition 3.26) des Raumes $HW(G)$ gegeben. Es stellt sich später heraus, daß sie unter den in Kapitel 4 angenommenen Einschränkungen sogar hinreichend sind. Schließlich kann die Schwartz-Eigenschaft in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten charakterisiert werden (Korollar 3.34).

Kapitel 4 beschäftigt sich im wesentlichen mit der Quasinormabilität und der Dichtheitsbedingung für Räume $HW(\mathbb{D})$ und $HW_0(\mathbb{D})$ im Rahmen der Klasse $\mathcal{W}$. Zunächst wird in beiden Fällen eine Charakterisierung in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten gegeben (Satz 4.2 und Satz 4.19). Für den Raum $HW_0(\mathbb{D})$ kann sogar bewiesen werden, daß quasinormabel (bzw.

die Dichtheitsbedingung) äquivalent zu der von Peris eingeführten Bedingung (QNo) (bzw. zu der von Peris und Rivera definierten Bedingung (DCo)) ist (Proposition 4.7 und Proposition 4.24). Dies ermöglicht unter Benutzung eines Resultates von Bierstedt eine Charakterisierung der Quasinormabilität und die Angabe einer hinreichenden Bedingung für die Dichtheitsbedingung in Räumen $HW_0(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ in Termen von Gewichten (Korollar 4.15 und Korollar 4.26).

Kapitel 5 ist in zwei Teile unterteilt. Im ersten Teil wird unter relativ allgemeinen Voraussetzungen eine notwendige Bedingung in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten für die dualen Dichtheitsbedingungen in projektiven Hüllen gegeben (Proposition 5.3 und Proposition 5.4). Desweiteren wird die Metrisierbarkeit der beschränkten Teilmengen in projektiven Hüllen charakterisiert (Proposition 5.7 und Proposition 5.8).
Im zweiten Teil wird gezeigt, daß die notwendige Bedingung aus dem ersten Teil im Rahmen der Klasse $\mathcal{W}$ auf dem offenen Einheitskreis hinreichend ist (Satz 5.12 und Satz 5.13). Unter gewissen Voraussetzungen erhält man die Äquivalenz der topologischen Gleichheit $\mathcal{V}H(\mathbb{D}) = H\overline{V}(\mathbb{D})$ und der dualen Dichtheitsbedingung für $H\overline{V}(\mathbb{D})$ oder äquivalent für $\mathcal{V}H(\mathbb{D})$ (Korollar 5.19).

Ausblick

Die ersten Fragen, die sich im Zusammenhang mit dieser Arbeit stellen, ergeben sich in natürlicher Weise aufgrund der großen Einschränkungen bezüglich der Klasse $\mathcal{W}$ von Gewichten auf dem Einheitskreis:

(a) Inwieweit kann man die hier hergeleiteten Sätze auch für schwächere Bedingungen an die Gewichte beweisen?

(b) Kann man allgemeinere Gebiete in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}^N$ behandeln?

Diese Fragen sind nicht nur bezüglich der Charakterisierung von Eigenschaften wie quasinormabel und der Dichtheitsbedingung im Fall von Frécheträumen und den dualen Dichtheitsbedingungen im Fall gewichteter induktiver Limites von Bedeutung, sondern auch hinsichtlich des Problems der projektiven Darstellung.
In dieser Arbeit kann gezeigt werden, daß $HW(G) = HW_0(G)$ die Monteleigenschaft von $HW(G)$ für Gebiete G in $\mathbb{C}$ impliziert, die keine Einpunktkomponente in $\mathbb{C}^*$ haben. Von Interesse ist, ob diese Aussage für alle Gebiete G in $\mathbb{C}$, also insbesondere für die komplexe Ebene selbst, wahr bleibt.

2 Allgemeine Notationen und Definitionen

Zunächst werden die notwendigen Definitionen und Notationen gegeben. Die Bezeichnungen bezüglich der lokalkonvexen Räume sind die in der Fachliteratur gebräuchlichen. Siehe dazu Floret und Wloka [38], Horváth [47], Jarchow [48], Köthe [50], [51] und Schaefer [63].
Für einen lokalkonvexen Raum E bezeichne $\mathrm{cs}(E)$ das System aller stetigen Halbnormen auf E. Desweiteren sei

$$B_p(E) := \{e \in E; p(e) \leq 1\}$$

die abgeschlossene Einheitskugel von E bzgl. p für ein $p \in \mathrm{cs}(E)$, $\mathcal{U}_0(E)$ die Menge aller abgeschlossenen absolutkonvexen Nullumgebungen von E und

$$U^\circ := \{e' \in E';\ |e'(u)| \leq 1\ \forall u \in U\}$$

die Polare einer Teilmenge U von E. Hier ist E' der Dualraum von E, d.h. der Raum der stetigen Linearformen auf E.
Wenn der Dualraum E' von E mit der starken Topologie $\beta(E', E)$ versehen wird, schreibt man E'_b und spricht vom *starken Dual* von E. Die Topologie $\beta(E', E)$ wird durch das System $(p_B)_{B \in \mathcal{B}(E)}$ von Halbnormen mit

$$p_B(e') := \sup_{b \in B} |e'(b)| \text{ für } e' \in E'$$

gegeben, wobei $\mathcal{B}(E)$ die Menge aller absolutkonvexen beschränkten Teilmengen von E ist. Das Bidual E''_{bb} wird mit E'' bezeichnet.
Weitere Topologien, mit denen das Dual E' von E häufig versehen wird, sind die *schwache Topologie* (also die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den endlichen Teilmengen von E) ebenso wie die Topologie $\lambda(E', E)$ der gleichmäßigen Konvergenz auf den präkompakten Teilmengen von E und die Topologie $\kappa(E', E)$ der gleichmäßigen Konvergenz auf den absolutkonvexen kompakten Teilmengen von E. Die entsprechenden Dualräume werden mit $E'[\sigma(E', E)]$, E'_λ und E'_c bezeichnet. Ist E quasivollständig, so fallen $\lambda(E', E)$ und $\kappa(E', E)$ zusammen. Allgemein gilt

$$\sigma(E', E) \leq \kappa(E', E) \leq \lambda(E', E) \leq \beta(E', E).$$

Ist E ein Fréchetraum mit einer wachsenden Fundamentalfolge $(\|.\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Halbnormen, so daß $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $U_n = \{x \in E; \|x\|_n \leq 1\}$ für jedes

$n \in \mathbb{N}$ eine Nullumgebungsbasis bildet, so sind die dualen Halbnormen durch $\|u\|_n^* := \sup\{| < u, x > |;\ x \in U_n\}$ für $u \in E'$ definiert. Es bezeichne $E'_n := \{u \in E';\ \|u\|_n^* < \infty\}$ die lineare Hülle von U_n°, versehen mit der Norm $\|.\|_n^*$. Dann wird $E' = \cup_{n\in\mathbb{N}} E'_n$ mit der stärksten lokalkonvexen Topologie $i(E', E)$, die alle Einbettungen $i_n : E'_n \to \cup_{n\in\mathbb{N}} E'_n$ stetig macht, ausgestattet und *induktives Dual* E'_i von E genannt.

In den Kapiteln 3 und 4 dieser Arbeit werden verschiedene Klassen von Fréchetträumen untersucht, die an dieser Stelle kurz eingeführt werden.
Ein lokalkonvexer Raum E wird *Schwartzraum* genannt, falls es zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung U in E eine Nullumgebung V in E gibt, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ Punkte $x_1, ..., x_n \in V$ mit

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + \varepsilon U)$$

existieren. E heißt *semi-Montelraum*, falls jede beschränkte Menge in E relativkompakt ist. Einen quasitonnelierten semi-Montelraum nennt man *Montelraum*. E ist *semireflexiv*, wenn jede beschränkte Menge in E schwach relativkompakt ist. Ein quasitonnelierter semireflexiver Raum wird als *reflexiv* bezeichnet. Ist ein Fréchetraum E Montel, so ist er auch reflexiv. Die Umkehrung gilt i.a. nicht, wie Beispiele von Köthe und Grothendieck zeigen.
Ein lokalkonvexer Raum E ist *quasinormabel*, falls

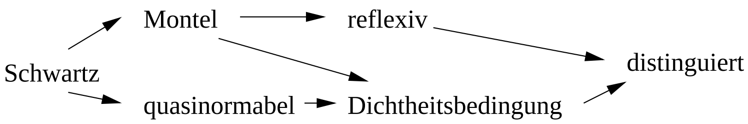
$$\forall U \in \mathcal{U}_0(E)\ \exists V \in \mathcal{U}_0(E)\ \forall \lambda > 0\ \exists B \in \mathcal{B}(E) \text{ mit } V \subset B + \lambda U.$$

Ein lokalkonvexer Raum ist genau dann Schwartz, wenn er Montel und quasinormabel ist. Jeder normierte Raum ist quasinormabel. Ferner ist ein normierter Raum genau dann semi-Montel, wenn er endlich dimensional ist.
Ein lokalkonvexer Raum E genügt der *Dichtheitsbedingung*, wenn es für jede Funktion $\lambda : \mathcal{U}_0(E) \to \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ und jedes $V \in \mathcal{U}_0(E)$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathcal{U}_0(E)$ und ein $B \in \mathcal{B}(E)$ mit

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \lambda(U)U \subset B + V$$

gibt. Die Dichtheitsbedingung wurde von Heinrich im Zuge seiner Untersuchungen von Ultrapotenzen lokalkonvexer Räume in [42] erstmals betrachtet und von Bierstedt und Bonet in [10] eingehend studiert. Sie zeigten, daß ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum E genau dann der Dichtheitsbedingung genügt, wenn jede beschränkte Teilmenge des starken Duals von E metrisierbar ist (siehe dazu [10] Theorem 1.4).

Ein lokalkonvexer Raum E heißt *distinguiert*, wenn das starke Dual E'_b tonneliert ist. Der Begriff der distinguierten Räume stammt von Dieudonné und Schwartz. Grothendieck zeigte, daß ein Fréchetraum E genau dann distinguiert ist, wenn $E'_b = E'_i$ gilt. Für Fréchetträume E sind folgende Implikationen bekannt (Pfeile bezeichnen Implikationen):



Für weitere Informationen wird u.a. auf [10], [11], [24] und [48] verwiesen.

Die Frage nach der Vererbung von Quasinormabilität und der Dichtheitsbedingung unter Bildung von injektiven Tensorprodukten führte auf die Eigenschaften *quasinormabel durch Operatoren* (QNo) und *Dichtheitsbedingung durch Operatoren* (DCo). Sie gehen auf Peris und Rivera zurück. Siehe [61] und [62]. Ein lokalkonvexer Raum E ist (QNo), wenn es eine Basis $\mathcal{U}$ absolutkonvexer abgeschlossener Nullumgebungen in E gibt, so daß gilt:
$\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \ \in \mathcal{U}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists P \in L(E, E)$:

(i) $P(V) \in \mathcal{B}(E)$,

(ii) $(I - P)(V) \in \varepsilon U$.

Ein Fréchetraum E genügt (DCo), falls es eine Nullumgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E gibt, so daß gilt: $\exists B \in \mathcal{B}(E)\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall B' \in \mathcal{B}(E)\ \exists \lambda > 0\ \exists P \in L(E, E)$:

(i) $P(B') \subset U_m$

(ii) $(I - P)(B') \subset \lambda B$.

Im fünften Kapitel werden induktive Limites holomorpher Funktionen und deren projektive Hüllen auf unterschiedliche Eigenschaften untersucht. Daher wird hier eine kurze Einführung gegeben.
Sei $(E_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge lokalkonvexer Räume E_n mit den Topologien τ_n, wobei jeder Raum E_n ein linearer Unterraum von $E := \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ und E_n für $n \leq m$ ein linearer Unterraum von E_m ist, so daß die kanonische Inklusionsabbildung $i_{n,m} : (E_n, \tau_n) \to (E_m, \tau_m)$ stetig ist. E wird mit der stärksten lokalkonvexen Topologie τ versehen, die alle Einbettungen

$$\tau_n : (E_n, \tau_n) \to E$$

stetig macht. (E, τ) wird *induktiver Limes der induktiven Folge* (E_n, τ_n) genannt und mit $(E, \tau) := \mathrm{ind}_n(E_n, \tau_n)$ bezeichnet. τ heißt *induktive Limestopologie.*

Jede beschränkte Teilmenge in E_n ist wegen der kanonischen Einbettung beschränkt in E, aber dies liefert i.a. nicht alle beschränkten Mengen in E. $(E, \tau) = \mathrm{ind}_n(E_n, \tau_n)$ heißt *regulärer* induktiver Limes, falls jede beschränkte Teilmenge von E in einem E_n enthalten und beschränkt ist. Ein induktiver Limes von Banachräumen heißt (LB)-Raum.
Ein lokalkonvexer Raum E ist ein (DF)-Raum, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

(a) E besitzt eine Fundamentalfolge der beschränkten Teilmengen.

(b) Für jede Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener, absolutkonvexer Nullumgebungen in E, so daß $U = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ jede beschränkte Teilmenge von E absorbiert, ist U eine Nullumgebung.

(DF)-Räume wurden von Grothendieck in [40] eingeführt. Jedes starke Dual eines Fréchetraumes und jeder (LB)-Raum ist ein (DF)-Raum. Umgekehrt ist das starke Dual eines (DF)-Raumes stets ein Fréchetraum.

Ein lokalkonvexer Raum heißt (gDF)-*Raum*, falls es eine Fundamentalfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Teilmengen von E gibt, so daß für jede Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Nullumgebungen in E ein $U \in \mathcal{U}_0(E)$ mit

$$U \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_n + B_n)$$

existiert. Jeder (DF)-Raum ist auch ein (gDF)-Raum, die Umkehrung hingegen gilt i.a. nicht. Siehe dazu [48].

Ein lokalkonvexer Raum E genügt der *abzählbaren Umgebungseigenschaft*, falls für eine gegebene Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Nullumgebungen in E Zahlen $a_n > 0$ existieren, so daß

$$U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} a_n U_n$$

eine Nullumgebung in E ist. Die abzählbare Umgebungseigenschaft wurde implizit zunächst von Schwartz in [64] auf S. 95 angegeben und von Floret in [37] mit ihrem Namen versehen. Wegen [59] Korollar 8.3.3 und Proposition 8.3.5 erfüllt jeder (DF)-Raum die abzählbare Umgebungseigenschaft.

Die Begriffe der dualen Dichtheitsbedingung und der starken dualen Dichtheitsbedingung wurden von Bierstedt und Bonet in [8] für lokalkonvexe Räume E definiert und für (DF)-Räume eingehend studiert.
Bezeichnet E einen (Hausdorffschen) lokalkonvexen Raum, $\mathcal{B}(E)$ das System aller abgeschlossenen, absolutkonvexen und beschränkten Teilmengen von E und $\mathcal{U}(E)$ das System aller abgeschlossenen, absolutkonvexen Nullumgebungen in E, so genügt E der *dualen Dichtheitsbedingung* (DDC) (bzw. der *starken dualen Dichtheitsbedingung* $(SDDC)$), wenn gilt:
zu jeder Funktion $\lambda : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ und jedem $A \in \mathcal{B}(E)$ gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{B}(E)$ und ein $U \in \mathcal{U}(E)$ mit

$$A \cap U \subset \overline{\Gamma}(\cup_{\mathcal{B} \in \mathcal{B}(E)} \lambda(B)B) \text{ (bzw. } A \cap U \subset \Gamma(\cup_{\mathcal{B} \in \mathcal{B}(E)} \lambda(B)B)),$$

wobei Γ (bzw. $\overline{\Gamma}$) die absolutkonvexe Hülle (bzw. die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle) bezeichnet.

Bierstedt und Bonet zeigten in [8], daß für das starke Dual E_b' eines Fréchetraumes die duale Dichtheitsbedingung äquivalent zur starken dualen Dichtheitsbedingung ist. Die duale Dichtheitsbedingung gilt in einem (DF)-Raum E genau dann, wenn die beschränkten Teilmengen von E metrisierbar sind (siehe dazu [8] 2.Remarks und 5.Theorem). Ein Fréchetraum E genügt genau dann der Dichtheitsbedingung, wenn sein starkes Dual (DDC) (bzw. äquivalent $(SDDC)$) hat.

3 Gewichtete Fréchetráume holomorpher Funktionen

3.1 Einführung in die gewichteten Fréchetráume holomorpher Funktionen

In diesem Kapitel werden, wenn nichts anderes gesagt wird, die folgenden Voraussetzungen angenommen.
Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver, stetiger Funktionen auf G. Diese Funktionen werden auch *Gewichte* genannt. Ferner bezeichne $H(G)$ den Raum aller holomorphen Funktionen auf G, der mit der Topologie *co* der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von G versehen wird.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind

$$\begin{aligned} Hw_n(G) &:= \{f \in H(G);\ \|f\|_n := \sup_{z\in G} w_n(z)|f(z)| < \infty\} \text{ und} \\ H(w_n)_0(G) &:= \{f \in H(G);\ w_n|f| \text{ verschwindet im Unendlichen auf } G\}, \end{aligned}$$

versehen mit der von $Hw_n(G)$ induzierten Norm, Banachräume. Die gewichteten Räume holomorpher Funktionen seien definiert durch

$$HW(G) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Hw_n(G) \text{ und } HW_0(G) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H(w_n)_0(G).$$

Unter der Topologie, die von der Folge $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Normen gegeben wird, ist $HW(G)$ ein Fréchetraum.
Als abgeschlossener topologischer Unterraum von $HW(G)$ ist $HW_0(G)$ ebenfalls ein Fréchetraum.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne B_n (bzw. $B_{n,0}$) die abgeschlossene Einheitskugel von $Hw_n(G)$ (bzw. $H(w_n)_0(G)$). Setze

$$C_n := B_n \cap HW(G) \text{ und } C_{n,0} := B_{n,0} \cap HW_0(G)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann wird durch $(\frac{1}{n}C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(\frac{1}{n}C_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$) eine Nullumgebungsbasis von $HW(G)$ (bzw. $HW_0(G)$) gegeben. O.B.d.A. genügt es allerdings, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(C_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$ zu betrachten.
Setze

$$\overline{W} := \{\overline{w} : G \to]0,\infty[;\ \overline{w} \text{ stetig},\ w_n\overline{w} \text{ beschränkt auf } G \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Mengen

$$C_{\overline{w}} := \{f \in HW(G);\ |f(z)| \leq \overline{w}(z) \text{ für jedes } z \in G\},\ \overline{w} \in \overline{W},$$

bilden ein Fundamentalsystem der beschränkten Teilmengen von $HW(G)$, die absolutkonvex und kompakt im Raum $(H(G), co)$ sind (siehe dazu [12] S. 123-125).
Sei v ein Gewicht auf der Menge G. Dann ist das *assoziierte Gewicht* definiert durch

$$\widetilde{v}(z) := \sup\{|g(z)|; g \in H(G),\ |g| \leq v\},\ z \in G$$

gegeben. Assoziierte Gewichte wurden von Andersen und Duncan in [2] eingeführt und von Bierstedt, Bonet und Taskinen in [18] eingehend untersucht.
Ein Gewicht v auf einem kreisförmigen Gebiet $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, heißt *radial*, falls $v(z) = v(\lambda z)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gilt.
Es bleibt zu erwähnen, daß $f \in H(G)$ für eine kreisförmige offene Teilmenge G von $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, die Taylorreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z)$$

um 0 für jedes $z \in G$ hat, wobei p_k ein k-homogenes Polynom ist, $k \in \mathbb{N}$. Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G gegen f. Die Cesàro-Mittel der Partialsummen der Taylorreihe von f werden durch

$$[S_n(f)](z) := \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{l} p_k(z)$$

für jedes $z \in G$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Also ist jedes $S_n(f)$ ein Polynom (vom Grad $\leq n$), und $S_n(f)$ konvergiert gegen f gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G. Diese Tatsache wird im Laufe der Arbeit häufig verwendet.
Völlig analog definiert man gewichtete Frécheträume stetiger Funktionen. Sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf einem vollständig regulären Hausdorff-Raum X. $C(X)$ bezeichne die Menge aller stetigen Funktionen auf X. Dann sind

$$\begin{aligned} Cw_n(X) &:= \{f \in C(X); \|f\|_n := \sup_{x\in X} w_n(x)|f(x)| < \infty\} \text{ und} \\ C(w_n)_0(X) &:= \{f \in C(X); w_n|f| \text{verschwindet im Unendlichen auf } X\}, \end{aligned}$$

versehen mit der von $Cw_n(X)$ induzierten Norm, Banachräume. Desweiteren erhält man die gewichteten Frécheträume stetiger Funktionen

$$CW(X) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Cw_n(X) \text{ ebenso wie } CW_0(X) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C(w_n)_0(X).$$

Gewichtete Fréchetträume stetiger Funktionen wurden von Bierstedt und Meise ([19]) ebenso wie von Bastin ([3]) auf Eigenschaften wie Schwartz, Montel, quasinormabel, Dichtheitsbedingung und Distinguiertheit untersucht.
In diesen Artikeln traten einige Bedingungen an die Gewichte auf, die auch in dieser Arbeit in abgeänderter Form eine Rolle spielen. So genügt $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Bedingung* (S'), falls

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n: \quad \frac{w_n}{w_m} \text{ verschwindet im Unendlichen auf } X.$$

Dies ist eine ziemlich starke Bedingung. Die folgenden schwächeren Bedingungen wurden ebenfalls eingehend untersucht.
$W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat *Bedingung* (QN'), falls

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \geq n, \text{ so daß } \forall Y \subset X \text{ mit } \inf_{y\in Y} \frac{w_n(y)}{w_m(y)} > 0 \text{ auch}$$
$$\inf_{y\in Y} \frac{w_n(y)}{w_k(y)} > 0, \quad \forall k = m+1, m+2, ... \quad \text{gilt.}$$

Bedingung (M') ist erfüllt, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall Y \text{ nicht relativkompakt in } X\ \exists m = m(n, Y) > n \text{ mit}$$
$$\inf_{y\in Y} \frac{w_n(y)}{w_m(y)} = 0.$$

Bedingung (S') impliziert nun sowohl (M') als auch (QN'). Bierstedt und Meise zeigten in [12], daß unter gewissen Voraussetzungen an den Raum X und die Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gewichten die Bedingung (M') für die Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent zu $CW(X) = CW_0(X)$ ist ebenso wie die Äquivalenz von (QN') und der Tatsache, daß $CW(X)$ (oder äquivalent $CW_0(X)$) quasinormabel ist. Bastin [3] schließlich konnte zeigen, daß $CW(X)$ bzw. $CW_0(X)$ genau dann distinguiert ist (oder äquivalent, der Dichtheitsbedingung genügt), wenn $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Bedingung* (D') erfüllt:
Es existiert eine wachsende Folge $J = (X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von X mit
(N, J') zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es $n_m \in \mathbb{N}$ mit $\inf_{x\in X_m} \frac{w_{n_m}(x)}{w_k(x)} > 0$,
$k = n_m + 1, n_m + 2, ...$ und
(M, J') für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Teilmenge Y von X mit $Y \cap (X\backslash X_m) \neq \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n' = n'(n, Y) > n$ mit $\inf_{y\in Y} \frac{w_n(y)}{w_{n'}(y)} = 0$.
Die inverse Form (D) der Bedingung (D') wurde von Bierstedt und Meise in [12] im Zuge ihrer Untersuchungen der sogenannten *projektiven Darstellung* eingeführt. Nähere Informationen zur projektiven Darstellung werden in Kapitel 5 gegeben.

Die Einführung der assoziierten Gewichte ermöglicht es nun, Eigenschaften wie Schwartz, Montel und Reflexivität auch für gewichtete Frécheträume holomorpher Funktionen zu charakterisieren.
Für die Charakterisierung von Quasinormabilität und der Dichtheitsbedingung wird zusätzlich noch die von Bierstedt und Bonet in [14] eingeführte Klasse $\mathcal{W}$ von Gewichten auf dem offenen Einheitskreis benötigt, die eine Zerlegung der holomorphen Funktionen ermöglicht.

Zuletzt seien einige Beispiele gewichteter Frécheträume holomorpher Funktionen erwähnt.

(I) Das folgende Beispiel wurde in [35] untersucht.
Betrachte ein beschränktes konvexes Gebiet G in $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, und eine fallende Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter nicht negativer konvexer Funktionen auf G. Dann definiere die Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$w_n(z) = e^{-\varphi_n(z)},\ z \in G,\ n \in \mathbb{N}.$$

Epifanov zeigte in [35], daß das starke Dual von $HW(G)$ unter bestimmten Voraussetzungen topologisch isomorph zu $\mathcal{V}H(\mathbb{C}^N)$ ist, wobei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$v_n(z) = e^{-\sup\{\mathrm{Re}<z,t>-\varphi_n(t);\ t\in G\}},\ z \in C^N,\ n \in \mathbb{N}$$

gegeben wird. (Zur Definition von $\mathcal{V}H(\mathbb{C}^N)$ siehe Kapitel 4.)

(II) Wähle $G = \mathbb{C}$ und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $w_n(z) = e^{-\frac{1}{n}|z|^\rho}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.
Dann ist $HW(\mathbb{C})$ der Fréchetraum der ganzen Funktionen der Ordnung ρ, $\rho > 0$, und vom Typ 0. Man kann leicht nachrechnen, daß die Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Bedingung (S') genügt. Wie man später noch sehen wird, ist $HW(\mathbb{C})$ ein Schwartzraum.
Es bleibt zu erwähnen, daß $HW(\mathbb{C})$ isomorph zu dem Raum der Differentialoperatoren unendlicher Ordnung ist.
(Siehe dazu [5] S. 178.)

(III) In [25] wurden (LF)-Räume im Zusammenhang mit Ultradistributionen vom Roumieu-Typ betrachtet. Dabei treten die folgenden gewichteten Frécheträume holomorpher Funktionen auf.
Es bezeichne dazu Ω eine nichtleere offene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ mit $0 \in \Omega$. Ferner sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge der konvexen kompakten Teilmengen von Ω mit $0 \in \overset{\circ}{K}_1$ und $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ für jedes

$n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $h_n(x) := \sup_{y \in K_n} < x, y >$, $x \in \mathbb{R}^N$. Betrachte jetzt die wachsende Folge $W_n = (w_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$w_{n,k}(z) := \exp\left(-h_n(\mathrm{Im}(z)) - \frac{1}{k}\omega(z)\right),\ z \in \mathbb{C}^N,\ n, k \in \mathbb{N},$$

wobei ω eine nicht-quasianalytische Funktion ist. Für Informationen üer nicht-quasianalytische Funktionen siehe [25]. Über die so entstandenen Fréchetäume $HW_n(\mathbb{C}^N)$ wird dann der induktive Limes gebildet.

3.2 Reflexivität und Monteleigenschaft

In diesem Abschnitt wird zunächst gezeigt, daß der Raum $HW_0(G)$ unter gewissen Voraussetzungen an die wachsende Folge $W = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strikt positiver stetiger Funktionen auf G genau dann reflexiv ist, wenn $HW(G) = HW_0(G)$ gilt. Ferner wird eine Bedingung in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten angegeben, die äquivalent zu $HW(G) = HW_0(G)$ und $HW(G)$ Montel ist. Eine Zusammensetzung dieser Ergebnisse liefert dann, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Monteleigenschaft von $HW(G)$ äquivalent zu der bereits erwähnten Bedingung in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten ist. Ferner kann für offene und zusammenhängende Teilmengen G von $\mathbb{C}$, die keine Einpunkt-Komponente in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ haben, bewiesen werden, daß besagte Bedingung auch äquivalent zu $HW(G) = HW_0(G)$ ist.
Nach einem kurzen Abschnitt, in dem Beispiele für die angenommenen Voraussetzungen gegeben werden, wird die Reflexivitätsfrage für Banachräume vom Typ $Hv_0(G)$ und $Hv(G)$ betrachtet. Es wird gezeigt, daß $Hv_0(G)$ isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von c_0 ist. Ist daher $Hv_0(G)$ unendlich dimensional, so sind $Hv_0(G)$ und $Hv(G)$ nicht reflexiv.

3.2.1 Reflexivität und Monteleigenschaft

Wie bereits gesagt, wird zunächst untersucht, unter welchen Bedingungen $HW_0(G)$ reflexiv ist. Dazu wird das folgende Lemma benötigt.

3.1 Lemma. *Für eine Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset HW_0(G)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $f_j \to 0$ bzgl. $\sigma(HW_0(G), HW_0(G)')$.

(b) $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, und es gilt $f_j \to 0$ bzgl. co.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b):
Es konvergiere $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen 0 bzgl. $\sigma(HW_0(G), HW_0(G)')$. Dies impliziert, daß $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ $\sigma(HW_0(G), HW_0(G)')$-beschränkt ist. Da die beschränkten und die schwach beschränkten Teilmengen identisch sind (siehe [50] 20.11.(7)), ist $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $HW_0(G)$.
Nach dem Satz von Montel fällt *co* auf den beschränkten und daher erst recht auf den *co*-beschränkten Teilmengen von $HW_0(G)$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz zusammen.
Offensichtlich gehört jedes δ_z aber zu $HW_0(G)'$, $z \in G$. Daher liefert
$f_j \to 0$ bzgl. $\sigma(HW_0(G), HW_0(G)')$ sofort $f_j(z) \to 0$ für jedes $z \in G$, also auch $f_j \to 0$ bzgl. *co*.

(b) $\Longrightarrow$ (a):
Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset HW_0(G)$ beschränkt, und es gelte $f_j \to 0$ bzgl. *co*. Nach dem Satz von Hahn-Banach und dem Rieszschen Darstellungssatz (siehe dazu [65]) gibt es zu jedem $l \in HW_0(G)'$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein beschränktes Radon-Maß μ auf G mit

$$l(f) = \int_G f w_n \, d\mu$$

für jedes $f \in HW_0(G)$.
Nun folgt wegen der inneren Regularität von μ, daß

$$l(f_j) = \int_G f_j w_n \, d\mu \to l(0) = \int_G 0 w_n \, d\mu = 0.$$

bzgl. *co*. (Siehe dazu [12] Ausführungen vor Proposition 10.) Dies impliziert $f_j \to 0$ bzgl. $\sigma(HW_0(G), HW_0(G)')$. □

3.2 Folgerung. *Auf einer beschränkten Teilmenge B von $HW_0(G)$ ist co stärker als die schwache Topologie.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß jede bzgl. *co* konvergente Folge in B auch schwach konvergiert. Fixiere dazu eine konvergente Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset B$, die bzgl. *co* gegen $f \in B$ konvergiert. Dann ist $(f_j - f)_{j\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $HW_0(G)$, die bzgl. *co* gegen 0 konvergiert. Eine Anwendung von Lemma 3.1 liefert dann, daß $(f_j - f)_{j\in\mathbb{N}}$ bzgl. der schwachen Topologie gegen 0 konvergiert. Also konvergiert $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bzgl. der schwachen Topologie gegen f. □

Beispiele für die im folgenden Satz angenommene Voraussetzung werden im Anschluß an diesen Abschnitt gegeben.

3.3 Satz. *Es gelte $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW(G) = HW_0(G)$.

(b) $HW_0(G)$ *ist reflexiv.*

Beweis. (b) $\Longrightarrow$ (a):
Fixiere ein $f \in HW(G)$. Dann gibt es ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit $f \in C_{\overline{w}}$. Wegen $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}$ existiert eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_{\overline{w},0} \subset HW_0(G)$ mit $f_j \to f$ bzgl. *co*. Also konvergiert $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ auch punktweise gegen f.
Weil mit $\overline{w} \in \overline{W}$ wie oben $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_{\overline{w},0}$ gilt, ist $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $HW_0(G)$. Daher liefert (b), daß $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ auch relativ schwach kompakt ist. Also gibt es eine Teilfolge $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, die bzgl. $\sigma(HW_0(G), HW_0(G)')$ gegen ein $g \in HW_0(G)$ konvergiert. Damit konvergiert $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auch punktweise gegen g. Es folgt $g = f \in HW_0(G)$ und damit $HW(G) = HW_0(G)$.

(a) $\Longrightarrow$ (b):
Sei dazu $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset HW_0(G)$ beschränkt. Es ist zu zeigen, daß $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge hat. Dann liefert ein Korollar des Satzes von Šmulian (siehe [48] Korollar 9.8.3), daß $HW_0(G)$ reflexiv ist. Nach Voraussetzung existiert ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_{\overline{w},0} \subset C_{\overline{w}}$. $C_{\overline{w}}$ is *co*-kompakt, und es gibt eine Teilfolge $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, die gegen ein Element $g \in HW(G) = HW_0(G)$ konvergiert. Man hat $f_{j_k} - g \to 0$ bzgl. *co*. Wegen Lemma 3.1 impliziert dies $f_{j_k} \to g$ bzgl. $\sigma(HW_0(G), HW_0(G)')$. □

Im folgenden soll eine andere Beweismöglichkeit für die Implikation (a) $\Longrightarrow$ (b) gegeben werden, die den Satz von Šmulian und damit die Fréchet-Eigenschaft nicht benötigt, so daß diese Beweismethode auch für beliebige Nachbin-Familien angewandt werden kann.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Es gelte $HW(G) = HW_0(G)$. Gemäß Definition ist zu zeigen, daß jede beschränkte Teilmenge von $HW_0(G)$ relativ schwach kompakt ist. Fixiere dazu eine beschränkte Teilmenge B von $HW_0(G)$. Dann existiert ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit $B \subset C_{\overline{w},0}$. Wegen $HW(G) = HW_0(G)$ gilt $C_{\overline{w}} = C_{\overline{w},0}$, und $C_{\overline{w},0}$ ist *co*-kompakt. Wie bereits erwähnt, ist *co* auf B stärker als die schwache Topologie. Wegen des Satzes von Montel fallen auf B die schwache Topologie und *co* zusammen. Daher ist B relativ schwach kompakt.

Im folgenden wenden wir uns der Frage nach der Monteleigenschaft von $HW(G)$ und dem Zusamenhang zwischen Monteleigenschaft und der Reflexivität zu. Dazu wird zunächst die folgende Hilfsaussage bewiesen.

3.4 Lemma. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) $HW(G)$ *ist ein Montelraum.*

(b) *Auf jeder beschränkten Teilmenge B von $HW(G)$ fallen die Topologie von $HW(G)$ und die Topologie co zusammen.*

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei dazu $HW(G)$ ein Montelraum. Dann ist nach Definition jede beschränkte Teilmenge B von $HW(G)$ relativkompakt. Wegen [50] 3.2.(6) fällt auf B die Topologie von $HW(G)$ mit jeder schwächeren Hausdorff Topologie - also insbesondere mit der Topologie *co* - zusammen. Es folgt demnach die Aussage (b).

(b) $\Longrightarrow$ (a): Fixiere dazu eine beschränkte Teilmenge A von $HW(G)$. Dann gibt es ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit $A \subset C_{\overline{w}}$, und $C_{\overline{w}}$ ist *co*-kompakt. Daher ist A *co*-relativkompakt und wegen (b) auch relativkompakt in $HW(G)$. Gemäß Definition ist $HW(G)$ damit ein Montelraum.

□

Es bezeichne $\mathcal{K}_+(G)$ die Menge aller stetigen Funktionen auf G, die einen kompakten Träger haben. Mit der Konvention $1/0 = +\infty$ ist die im folgenden auftretende Funktion $\min\left(\overline{w}, \frac{1}{\varphi}\right)$ definiert und stets eine positive und stetige Funktion auf G für $\overline{w} \in \overline{W}$ und $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$. Im folgenden Satz, dessen Beweisidee aus [18] stammt, wird eine Charakterisierung der Monteleigenschaft von $HW(G)$ gegeben. Diese hat allerdings den Nachteil, daß die Bedingung nicht nur von den Gewichten und assoziierten Gewichten, sondern auch von einer Funktion $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ abhängt.

3.5 Satz. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *$HW(G)$ ist ein Montelraum.*

(b) *Für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ mit*

$$\left(\min\left(\overline{w}, \frac{1}{\varphi}\right)\right)^{\sim} \leq \frac{1}{w_n} \text{ auf } G.$$

Beweis. Weil $HW(G)$ ein Fréchetraum ist, $(C_{\overline{w}})_{\overline{w} \in \overline{W}}$ ein Fundamentalsystem der beschränkten Teilmengen von $HW(G)$ bildet und jedes $C_{\overline{w}}$ kompakt in $(H(G), co)$ ist, ist $HW(G)$ genau dann Montel, wenn $HW(G)$ und *co* dieselbe Topologie auf $C_{\overline{w}}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$ induzieren (siehe dazu vorangegangenes Lemma). Dies ist äquivalent zu der Aussage

$(*)$ Für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ mit

$$C_{\overline{w}} \cap \{f \in H(G); \varphi|f| \leq 1 \text{ auf } G\} \subset C_n.$$

$(b) \Longrightarrow (*)$: Fixiere $g \in C_{\overline{w}} \cap \{f : \varphi|f| \leq 1 \text{ auf } G\}$. Dann ist $g \in HW(G)$ und $|g| \leq \min\left(\overline{w}, \frac{1}{\varphi}\right)$ auf G. Wegen (b) und [18] 1.2.(iii) hat man auch

$$|g| \leq \left(\min\left(\overline{w}, \frac{1}{\varphi}\right)\right)^{\sim} \leq \frac{1}{w_n} \text{ auf } G$$

und damit $g \in C_n$.

$(*) \Longrightarrow (b)$: Fixiere dazu ein $f \in H(G)$ mit $|f| \leq \left(\min\left(\overline{w}, \frac{1}{\varphi}\right)\right)^{\sim}$ auf G. Dann gilt auch $|f| \leq \left(\min\left(\overline{w}, \frac{1}{\varphi}\right)\right)$ auf G. Folglich ist f ein Element von $C_{\overline{w}} \cap \{f \in H(G);\ \varphi|f| \leq 1 \text{ auf } G\}$ und gehört nach $(*)$ damit auch zu C_n. Demnach ist $|f| \leq \frac{1}{w_n}$ auf G. Wählt man das Supremum über all diese Funktionen, so folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz bietet gegenüber dem Vorherigen den Vorteil, daß man eine Bedingung bekommt, die nur von Gewichten und assoziierten Gewichten bestimmt ist.

3.6 Satz. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) Es gilt $HW(G) = HW_0(G)$, und $HW(G)$ ist ein Montelraum.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\overline{w} \in \overline{W}$ verschwindet $w_n(\overline{w})^{\sim}$ im Unendlichen auf G.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Es sei $HW(G)$ ein Montelraum, und es gelte $HW(G) = HW_0(G)$.
Fixiere ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge $\mathcal{A} := \{w_n(z)\delta_z;\ z \in G\}$ gleichstetig in $HW(G)'$, weil $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von C_n° ist. Demnach hat man

$$\sigma(HW(G)', HW(G))|_{\mathcal{A}} = \lambda(HW(G)', HW(G))|_{\mathcal{A}},$$

wobei $\lambda(HW(G)', HW(G))$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den (prä-)kompakten Teilmengen von $HW(G)$ bezeichnet. Wegen $HW(G) = HW_0(G)$ existiert zu jedem $U \in \mathcal{U}(HW(G)', \sigma(HW(G)', HW(G)))$ ein $K \subset\subset G$ mit

$$w_n(z)\delta_z \in U \quad \forall z \in G \backslash K.$$

Weiterhin ist $C_{\overline{w}}$ wegen der Monteleigenschaft von $HW(G)$ kompakt in $HW(G)$. Deshalb gibt es zu der $\lambda(HW(G)', HW(G))$-Nullumgebung $\varepsilon C_{\overline{w}}^{\circ} \subset$

$HW(G)'$ ein $K \subset\subset G$ mit $w_n(z)\delta_z \in \varepsilon C^\circ_{\overline{w}}$ für jedes $z \in G\backslash K$, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \subset\subset G$ mit

$$\varepsilon \geq w_n(z) \sup\{|f(z)|;\ f \in C_{\overline{w}}\} = w_n(z)(\overline{w})^\sim(z)$$

für jedes $z \in G\backslash K$. Also folgt Bedingung (b).

(b) $\Longrightarrow$ (a):
<u>1. Schritt:</u> Zeige zunächst, daß $HW(G) = HW_0(G)$ gilt. Fixiere dazu ein $f \in HW(G)$. Dann existiert ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit $|f| \leq \overline{w}$ auf G. Natürlich gilt dann auch $|f| \leq (\overline{w})^\sim$ auf G. Fixiere nun ein $n \in \mathbb{N}$ und erhalte

$$w_n|f| \leq w_n(\overline{w})^\sim \text{ auf } G.$$

Eine Anwendung von Aussage (b) liefert, daß $w_n|f|$ im Unendlichen auf G verschwindet. Da n beliebig gewählt war, folgt $f \in HW_0(G)$.

<u>2. Schritt:</u> Damit bleibt zu beweisen, daß $HW(G)$ ein Montelraum ist.
Fixiere dazu zunächst ein $\overline{w} \in \overline{W}$. Es ist zu zeigen, daß $HW(G)$ und $(H(G), co)$ dieselbe Topologie auf $C_{\overline{w}}$ induzieren. Da $(C_{\overline{w}})_{\overline{w}\in\overline{W}}$ ein Fundamentalsystem der beschränkten Teilmengen von $HW(G)$ bildet, liefert Lemma 3.4 dann, daß $HW(G)$ ein Montelraum ist.
Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert eine Menge $K \subset\subset G$ mit

$$w_n(z)(\overline{w})^\sim(z) \leq \varepsilon$$

für jedes $z \in G\backslash K$.
Setze $U := \{g \in HW(G);\ w_n(z)|g(z)| \leq \varepsilon \text{ für jedes } z \in G\}$. Dann ist zu zeigen, daß es eine Nullumgebung V in $(H(G), co)$ gibt mit

$$V \cap C_{\overline{w}} \subset U \cap C_{\overline{w}}.$$

Definiere $V := \{g \in H(G);\ |g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{\max_{y\in K} w_n(y)} \text{ für jedes } z \in K\}$ und fixiere ein $f \in V \cap C_{\overline{w}}$. Dann hat man

* für $z \in K$:

$$w_n(z)|f(z)| \leq \max_{y\in K} w_n(y) \frac{\varepsilon}{\max_{y\in K} w_n(y)} = \varepsilon.$$

* für $z \in G\backslash K$:
  Falls $(\overline{w})^\sim(z) > 0$ ist, so erhält man wegen $w_n(z)(\overline{w})^\sim(z) \geq \varepsilon$ für jedes $z \in G\backslash K$ und $|f| \leq (\overline{w})^\sim$ auf G die Abschätzung

$$w_n(z)|f(z)| \leq w_n(z)(\overline{w})^\sim(z) \frac{|f(z)|}{(\overline{w})^\sim(z)} \leq \varepsilon.$$

Falls $(\overline{w})^{\sim}(z) = 0$ ist, so folgt auch $g(z) = 0$, da g nach Voraussetzung ein Element von $C_{\overline{w}}$ ist. Demnach gilt dann auch $w_n(z)|f(z)| = 0 < \varepsilon$.

Also gehört f zu $U \cap C_{\overline{w}}$. □

3.7 Korollar. *Es gelte $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w}}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW(G)$ ist Montel.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\overline{w} \in \overline{W}$ verschwindet $w_n(\overline{w})^{\sim}$ im Unendlichen auf G.

Beweis. Wegen Satz 3.6 ist offensichtlich, daß (b) Aussage (a) impliziert. Für die Umkehrung beachte, daß mit $HW(G)$ auch $HW_0(G)$ ein Montelraum ist. Dies liefert, daß $HW_0(G)$ reflexiv ist. Mit Satz 3.3 folgt dann $HW(G) = HW_0(G)$. Daher liefert der Beweis von Satz 3.6 die Behauptung. □

Interessant ist nun die Frage, ob die Gleichheit $HW(G) = HW_0(G)$ stets die Monteleigenschaft von $HW(G)$ nach sich zieht. Diese Frage kann leider nur für Folgen $W = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiv beantwortet werden, die auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definiert sind, so daß $\mathbb{C}^* \setminus G$ keine Einpunkt-Komponente hat. Für alle anderen Teilmengen von $\mathbb{C}$ einschließlich der komplexen Ebene selbst ist dieses Problem noch offen.

3.8 Proposition. *Sei G eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$, so daß $\mathbb{C}^* \setminus G$ keine Einpunkt-Komponente hat. Dann impliziert $HW(G) = HW_0(G)$ bereits die Bedingung (b) aus Satz 3.6.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt. Dazu sei angenommen, daß die Eigenschaft (b) nicht erfüllt ist. Dann gibt es ein $\overline{w} \in \overline{W}$, ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ sowie eine Folge von Punkten $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset G$, die gegen einen Punkt z_0 im Rand von G in $\mathbb{C}^*$ konvergiert, mit

$$w_n(z_k)(\overline{w})^{\sim}(z_k) \geq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Weiterhin existiert wegen [18] 1.2.(iv) zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $f_k \in H(G)$ mit $|f_k| \leq \overline{w}$ auf G und

$$|f_k(z_k)| = (\overline{w})^{\sim}(z_k).$$

Die Funktion f_k ist auch ein Element von $HW(G)$, denn die Ungleichung $|f_k| \leq \overline{w}$ auf G liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$w_n|f_k| \leq w_n\overline{w} < \infty \text{ auf } G.$$

O.B.d.A. kann angenommen werden, daß z_0 in einer abgeschlossenen, zusammenhängenden Menge $L \subset \mathbb{C}^* \backslash G$ von mehr als einem Punkt liegt. Dann ist $U := \mathbb{C}^* \backslash L$ konform äquivalent zu $\mathbb{D}$, wie nun per Fallunterscheidung gezeigt wird:
1. Fall: Der Punkt ∞ ist kein Element von U, d.h. ∞ muß in L liegen. In diesem Fall ist U eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, und L wird nicht auf den Punkt ∞ reduziert, weil L aus mehr als einem Punkt besteht. Daher ist U einfach zusammenhängend. Eine Anwendung des Riemannschen Abbildungssatzes liefert, daß U konform äquivalent zu $\mathbb{D}$ ist.
2. Fall: Der Punkt ∞ gehört zu U. Wähle nun ein $a \in L$ beliebig, aber fest, und definiere

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ z \to \frac{1}{z-a}.$$

Dann ist T biholomorph und bildet L auf eine zusammenhängende, abgeschlossene Menge L' in $\mathbb{C}^*$ ab, die ∞ enthält, und U auf eine offene zusammenhängende Menge U' mit $\infty \notin U'$. Außerdem ist $U' = \mathbb{C}^* \backslash L'$. Weil U' zusammenhängend und das Komplement L' ebenfalls zusammenhängend ist und aus mehr als einem Punkt besteht, ist U' einfach zusammenhängend und wegen des Riemannschen Abbildungssatzes konform äquivalent zu $\mathbb{D}$.

Durch Übergang zu einer Teilfolge von $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erhält man eine $H^\infty(U)$-interpolierende Folge (siehe dazu [44] S. 195). O.B.d.A. kann angenommen werden, daß die Teilfolge durch $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben wird. Dann liefert der Beweis von [69] III.E.4 die Existenz einer Folge von Funktionen $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^\infty(U)$ mit $\varphi_j(z_k) = \delta_{jk}$ und $\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j| \le M < \infty$. Setze $f := \sum_{k=1}^\infty \varphi_k f_k$. Dann ist f wegen $|f(z)| = |\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(z) f_k(z)| \le M\overline{w}(z)$ für jedes $z \in G$ und der daraus resultierenden gleichmäßigen Konvergenz auf den den kompakten Teilmengen von G ein Element von $H(G)$.
Zu zeigen bleibt $f \in HW(G)\backslash HW_0(G)$. Beweise zunächst, daß f zu $HW(G)$ gehört. Für jedes $z \in G$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ hat man

$$\begin{aligned} w_m(z)|f(z)| &\le w_m(z) \sum_{k=1}^\infty |\varphi_k(z)||f_k(z)| \\ &\le w_m(z) M \overline{w}(z) < \infty, \end{aligned}$$

weil nach Voraussetzung $w_m \overline{w}$ auf G beschränkt ist.
Es bleibt zu zeigen, daß f kein Element von $HW_0(G)$ ist. Zunächst gilt

$$|f(z_j)| = \left| \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(z_j) f_k(z_j) \right| = |f_j(z_j)| = (\overline{w})^\sim(z_j).$$

Wegen (3.1) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$w_n(z_k)|f(z_k)| = w_n(z_k)(\overline{w})^{\sim}(z_k) \geq \varepsilon$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$. Demnach gehört f nicht zu $H(w_n)_0(G)$ und damit auch nicht zu $HW_0(G)$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $HW(G) = HW_0(G)$. □

3.9 Korollar. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, so daß $\mathbb{C}^*\backslash G$ keine Einpunkt-Komponente hat. Ferner gelte $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW(G) = HW_0(G)$

(b) $HW_0(G)$ *ist reflexiv.*

(c) $HW(G)$ *ist reflexiv.*

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\overline{w} \in \overline{W}$ verschwindet $w_n(\overline{w})^{\sim}$ im Unendlichen auf G.

(e) $HW(G)$ *ist ein Montelraum.*

(f) $HW_0(G)$ *ist ein Montelraum.*

Beweis. Eine Anwendung von Satz 3.3 liefert die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b), während diejenige von (a) und (d) unmittelbar aus Proposition 3.8 und Satz 3.6 folgt.
Weil $HW_0(G)$ ein abgeschlossener topologischer Unterraum von $HW(G)$ ist, impliziert (c) die Aussage (b) gemäß [48] Proposition 11.4.5 ebenso wie (e) Bedingung (f) nach [48] Proposition 11.5.4.
Satz 3.6 liefert, daß (d) die Bedingung (e) nach sich zieht.
Weil schließlich $HW(G)$ und $HW_0(G)$ Fréchetràume sind, ergeben sich (e) $\Longrightarrow$ (c) ebenso wie (f) $\Longrightarrow$ (b). □

Im folgenden werden Beispiele für Folgen $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, die $HW(G) = HW_0(G)$ liefern.

3.10 Proposition. *Genügt die Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Bedingung (M'), so ist $HW_0(G) = HW(G)$.*

Beweis. Nach [19] Proposition 5.5 folgt aus Bedingung (M') sofort $CW_0(G) = CW(G)$. Dies liefert
$HW_0(G) = CW_0(G) \cap H(G) = CW(G) \cap H(G) = HW(G)$. □

In Anbetracht der Tatsache, daß Bedingung (M') bei der Untersuchung der gewichteten Frécheträume holomorpher Funktionen eine gewisse Rolle gespielt hat, ist es angebracht, einen Zusammenhang zwischen (M') und der Bedingung (b) aus Satz 3.6 herzustellen.

3.11 Bemerkung. Sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver, stetiger Funktionen auf G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $CW(G) = CW_0(G)$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\overline{w} \in \overline{W}$ verschwindet $w_n\overline{w}$ im Unendlichen auf G.

(c) W genügt der Bedingung (M').

Beweis. $(a) \Longrightarrow (b)$: Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und $\overline{w} \in \overline{W}$. Nach Definition gilt $\overline{w} \in CW(G)$, während man gemäß Voraussetzung $CW(G) = CW_0(G)$ hat. Also verschwindet $w_n\overline{w}$ im Unendlichen auf G.

$(b) \Longrightarrow (a)$: Wähle $f \in CW(G)$ beliebig, aber fest. Dann existiert ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit $|f| \leq \overline{w}$ auf G. Fixiere ein $n \in \mathbb{N}$ und erhalte

$$w_n|f| \leq w_n\overline{w} \text{ auf } G,$$

so daß $w_n|f|$ im Unendlichen auf G verschwindet. Da n beliebig gewählt war, folgt $f \in CW_0(G)$.

$(a) \Longleftrightarrow (c)$: Dies ist [19] Proposition 5.5. □

Die Bemerkung zeigt also deutlich, daß sich die beiden Bedingungen genau durch Verwendung der assoziierten Gewichte voneinander unterscheiden.

Aufgrund der vorhergehenden Untersuchungen ist eine weitere interessante Frage, ein Beispiel für die Gleichheit von $HW(G) = HW_0(G)$ zu finden, aber derart, daß $CW(G)$ und $CW_0(G)$ nicht gleich sind.

Die Idee zur Konstruktion dieses Beispieles stammt aus [18].

3.12 Lemma. *Sei G_1 eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und setze $G := G_1 \times \mathbb{C}$. Ferner seien $T = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsende Folgen von Gewichten auf G_1 bzw. $\mathbb{C}$. Sei $0 < p < 1$, und es sei angenommen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $z \in \mathbb{C}$*

$$1 \leq u_n(z) \leq (1 + |z|)^p$$

gilt. Wähle $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n(z) := \frac{u_n(z)}{(1+|z|)^p}$, $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für beliebiges $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{(1 + |z|)^p} \leq s_n(z) \leq 1. \tag{3.2}$$

Betrachte jetzt $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $w_n(z_1, z_2) = t_n(z_1)s_n(z_2)$ *für* $(z_1, z_2) \in G$, $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

(a) *Jedes* $f \in HW(G)$ *ist in der zweiten Koordinate konstant, d.h. es gilt* $f(z_1, z_2) = f(z_1, z_2')$ *für jedes* $z_2, z_2' \in \mathbb{C}$.

(b) $HW(G)$ *und* $HT(G_1)$ *sind kanonisch topologisch isomorph.*

Beweis. (a) Wähle $f \in HW(G)$ beliebig, aber fest. Dann existiert nach Definition ein $M > 0$ mit $w_n(z_1, z_2)|f(z_1, z_2)| = t_n(z_1)s_n(z_2)|f(z_1, z_2)| \leq M$ für jedes $(z_1, z_2) \in G$. Unter Benutzung von (3.2) folgt also $|f(z_1, z_2)| \leq \frac{M}{t_n(z_1)} \frac{1}{s_n(z_2)} \leq \frac{M}{t_n(z_1)}(1 + |z_2|)^p$. Dann liefert eine verallgemeinerte Version des Satzes von Liouville das Gewünschte.
(b) Definiere dazu zunächst die Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi &: HW(G) \to HT(G_1),\ f \to (z_1 \to f(z_1, 0)) \\ \psi^{-1} &: HT(G_1) \to HW(G),\ g \to ((z_1, z_2) \to g(z_1)). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß ψ und ψ^{-1} stetig sind.
<u>Stetigkeit von ψ:</u>

$$\begin{aligned} \sup_{z_1\in\mathbb{C}} t_n(z_1)|[\psi(f)](z_1) &= \sup_{z_1\in\mathbb{C}} t_n(z_1)|f(z_1, 0)| \\ &= \sup_{z_1\in\mathbb{C}} t_n(z_1)s_n(0)|f(z_1, 0)| \\ &\leq \sup_{(z_1,z_2)\in G} t_n(z_1)s_n(z_2)|f(z_1, z_2)| \\ &= \sup_{(z_1,z_2)\in G} w_n(z_1, z_2)|f(z_1, z_2)|; \end{aligned}$$

folglich ist ψ stetig.

<u>Stetigkeit von ψ^{-1}:</u>

$$w_n(z_1, z_2)|[\psi^{-1}(f)](z_1, z_2)| = t_n(z_1)s_n(z_2)|f(z_1, 0)| \leq t_n(z_1)|f(z_1, 0)|.$$

Daher hat man
$\sup_{(z_1,z_2)\in G} w_n(z_1, z_2)|[\psi^{-1}(f)](z_1, z_2)| \leq \sup_{z_1\in G} t_n(z_1)|f(z_1, 0)|$ und damit die Stetigkeit von ψ^{-1}.
Also sind $HW(G)$ und $HT(G_1)$ kanonisch topologisch isomorph.

3.13 Lemma. *Falls eine wachsende Folge* $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver stetiger Funktionen auf* G *der Bedingung* (M') *genügt, so hat sie auch* (D').

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaften (N, J') und (M, J') hat. Wähle dazu $J = (K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Fundamentalfolge der kompakten Teilmengen von G. Fixiere m. Wähle $n_m = m$. Dann gilt selbstverständlich $\inf_{z\in K_m} \frac{w_m(z)}{w_k(z)} > 0$ für jedes $k \geq m$. Um $(M, J)'$ zu zeigen, fixiere $n \in \mathbb{N}$ und $Y \subset G$ mit $Y \cap (G \backslash K_m) \neq \emptyset$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dies liefert, daß Y nicht relativkompakt ist. Daher existiert wegen (M') ein $n' > n$ mit $\inf_{z\in Y} \frac{w_n(z)}{w'_n(z)} = 0$. Also ist (N, J') und damit (D') erfüllt. □

Die zur obigen Bedingung gewissermaßen inverse Bedingung (ND) wurde von Bierstedt und Meise in [19] eingeführt.

3.14 Definition. Die Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genügt der Bedingung (ND'), falls ein $n \in \mathbb{N}$ und eine fallende Folge $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von G existieren, so daß für jedes $k \geq n$ gilt:

(i) $\inf_{z\in J_k} \frac{w_n(z)}{w_k(z)} > 0$, und

(ii) es gibt $l(k) > k$ mit $\inf_{z\in J_k} \frac{w_n(z)}{w_{l(k)}(z)} = 0$.

3.15 Lemma. *Falls $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Bedingung (ND') genügt, so hat sie nicht (D').*

Beweis. Dies verläuft völlig analog zum Fall mit einer fallenden Folge strikt positiver stetiger Funktionen. □

3.16 Beispiel. Sei nun $G_1 = \mathbb{C}$ und wähle eine wachsende Folge $T = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gewichten t_n auf $\mathbb{C}$ mit $t_n(0) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so daß T der Bedingung (S') genügt. Dann gilt $HT(\mathbb{C}) = HT_0(\mathbb{C})$. Für jede wachsende Folge $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to\infty} s_n(z) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, die den Voraussetzungen von Lemma 3.12 genügt, definiere jetzt $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ wie in Lemma 3.12. Dann gilt zunächst $HW(\mathbb{C}^2) = HW_0(\mathbb{C}^2)$, wie man durch Fallunterscheidung ($|z_1| \to \infty$ bzw. $|z_2| \to \infty$) zeigt. Für den Fall $|z_1| \to \infty$ ist aufgrund von Lemma 3.12 nichts zu zeigen. Daher genügt es, $|z_2| \to \infty$ zu betrachten. Wegen Lemma 3.12 gilt $HW(\mathbb{C}^2) \cong HT(\mathbb{C})$. Da $\lim_{z\to\infty} s_n(z) = 0$ ist, kann man $K \subset\subset \mathbb{C}^2$ und $m > 0$ finden, so daß

$$w_n(z_1, z_2)|f(z_1, z_2)| = t_n(z_1)s_n(z_2)|f(z_1, 0)| \leq m\varepsilon \text{ für jedes } z \in \mathbb{C}^2 \backslash K$$

gilt.

Konstruiere jetzt eine Folge $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht der Bedingung (D') und damit nach Lemma 3.13 nicht der Bedingung (M') genügt. Wegen [19] Proposition 5.5 gilt dann $CW(G) \neq CW_0(G)$.

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ und beliebige $k \in \mathbb{N}_0$ sei $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zunächst auf $[2k, 2k+2]$ gegeben durch

$$u_n(r) := \begin{cases} 1 & \text{für } r \in [2k, 2k+2^{-n}] \text{ und } r \in [2k+1, 2k+2] \\ (1+r)^{\frac{n-1}{2n}} & \text{für } r \in [2k+3\cdot 2^{-(n+1)}, 2k+1-2^{-(n+1)}] \end{cases}$$

mit u_n affin auf $[2k+2^{-n}, 2k+3\cdot 2^{-(n+1)}]$ und $[2k+1-2^{-(n+1)}, 2k+1]$. Unterscheidet man mehrere Fälle, so kann man leicht nachrechnen, daß $(u_n)_{n\in\mathbb{N}, n\geq 3}$ eine wachsende Folge ist.
Nun setze u_n radial fort, $u_n(z) = u_n(|z|)$ für $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, um eine wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{C}$ zu erhalten, für die die Bedingung in Lemma 3.12 mit $p = \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Setze jetzt

$$s_n(z) := \frac{u_n(z)}{(1+|z|)^{\frac{1}{2}}} \text{ für jedes } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

Wegen Lemma 3.15 genügt es nun zu zeigen, daß W die Bedingung (ND') hat.
Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ wähle $J_n := \{(0, 2k+2^{-m}),\ k, m \geq n\} \subset \mathbb{C}^2$. Für ein gegebenes $n \geq n_0 := 3$ und für jedes $(0, 2k+2^{-m}) \in J_n$ gilt

$$\begin{aligned} w_{n_0}(0, 2k+2^{-m}) &= t_{n_0}(0)s_{n_0}(2k+2^{-m}) = \frac{1}{(1+2k+2^{-m})^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \\ w_n(0, 2k+2^{-m}) &= t_n(0)s_n(2k+2^{-m}) = \frac{1}{(1+2k+2^{-m})^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

weil $m \geq n$ ist. Folglich gilt $\inf_{J_n} \frac{w_{n_0}}{w_n} = 1 > 0$. Aber für $l_n := n+1$, $k \geq n$

$$w_{n+1}(0, 2k+2^{-n}) = t_{n+1}(0)s_{n+1}(2k+2^{-n}) = \frac{(1+2k+2^{-n})^{\frac{n}{2n+2}}}{(1+2k+2^{-n})^{\frac{1}{2}}}$$

und daher

$$\frac{w_{n_0}(0, 2k+2^{-n})}{w_{l_n}(0, 2k+2^{-n})} = (1+2k+2^{-n})^{-\frac{n}{2n+2}}.$$

Somit gilt $\inf_{J_n} \frac{w_{n_0}}{w_{l_n}} \leq (1+2k+2^{-n})^{-\frac{n}{2n+2}} \to 0 \quad (k \to \infty)$. Also erfüllt W die Bedingung (ND').

□

3.2.2 Beispiele für die angenommenen Voraussetzungen

Es gibt viele Beispiele für Folgen $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver, stetiger Funktionen auf $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, so daß $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$ erfüllt ist. Im folgenden werden einige zusammengestellt.

3.17 Bemerkung. (Bierstedt, Bonet, Galbis, [17], Proposition 1.2.(c))
Sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver stetiger und radialer Funktionen auf einer kreisförmigen Menge $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$. Dann gilt für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$

$$C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w}} \cap HW_0(G)}^{co} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}.$$

3.18 Proposition. *(*Holtmanns, [45], Proposition 4.2.8*)*
Seien $G = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf G, derart daß $\lim_{\mathrm{Im}(z)\to 0} w_n(z) = 0$ und $w_n(z) \leq w_n(z + ip)$ für jedes $0 < p < 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind. Dann gilt $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$.

3.19 Proposition. *(*Holtmanns, [45], Proposition 4.2.9*)*
Seien G ein Streifen der Form $G := \{z \in \mathbb{C};\ |\mathrm{Im}(z)| < \delta\}$ für $\delta > 0$ und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf G, derart daß $\lim_{|\mathrm{Im}(z)|\to\delta} w_n(z) = 0$ und $w_n(z) \leq w_n(rz)$ für jedes $0 < r < 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann hat man $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$.

3.2.3 Reflexivität von $Hv_0(G)$

Wie bereits erwähnt, basiert dieser Abschnitt auf [29] und soll die Ergebnisse des vorigen Abschnittes ergänzen. Zum Beweis der folgenden Proposition wird eine Methode von Kalton und Werner benutzt (siehe dazu den Beweis von Korollar 4.9 in [49]).

3.20 Proposition. *Seien $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, offen und v eine strikt positive und stetige Funktion auf G. Dann ist $Hv_0(G)$ isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von c_0 (versehen mit der üblichen Norm).*
Tatsächlich ist $Hv_0(G)$ fast isometrisch eingebettet in c_0, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Isomorphismus T von $Hv_0(G)$ in c_0, so daß

$$(1 - \varepsilon)\|f\|_v \leq \|T(f)\|_{co} \leq \|f\|_v \tag{3.3}$$

für jedes $f \in Hv_0(G)$ gilt.

Beweis. Fixiere $\varepsilon \in (0,1)$. Zu zeigen ist, daß es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ mit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Punkt des Randes von G gibt, so daß der Operator $T : Hv_0(G) \to c_0$, definiert durch $T(f) = (v(z_n)f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, Ungleichung (3.3) für jedes $f \in Hv_0(G)$ erfüllt.
Wähle eine Fundamentalfolge $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der kompakten Teilmengen von G mit $K_k \subset \overset{\circ}{K}_{k+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und fixiere ein $k \in \mathbb{N}$. Bezeichne mit d die Metrik, die von der Supremumsnorm in $\mathbb{C}^N$ induziert wird, d.h. $d(z,w) := \max(|z_1 - w_1|, ..., |z_N - w_N|)$, $z, w \in \mathbb{C}^N$, und mit $D(z,r) := \{w \in \mathbb{C}^N;\ d(w,z) \leq r\}$ den Polydisk mit Mittelpunkt $z \in \mathbb{C}^N$ und Radius $r > 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiere $M_k := \sup_{z\in K_k} v(z)$, $a_k := \min\left(\frac{1}{2}d(K_k, \mathbb{C}^N \backslash K_{k+1}), 1\right)$ und wähle $z^{(k)} \in K_k$ mit $v(z^{(k)}) = \min_{z\in K_k} v(z)$. Für ein jedes $f \in Hv_0(G)$ mit $\| f \|_v = 1$ hat man

$$1 = \| f \|_v = \sup_{z\in G} v(z)|f(z)| \geq \sup_{z\in K_k} v(z)|f(z)| \geq v(z^{(k)}) \sup_{z\in K_k} |f(z)|.$$

Also ist $\sup_{z\in K_k} |f(z)| \leq \frac{1}{v(z^{(k)})}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann hat man für jedes $z \in K_k$ die folgende Abschätzung:

$$|f(\xi)| \leq \frac{1}{v(z^{(k+1)})}$$

für jedes $\xi \in D(z, a_k) \subset K_{k+1}$. Mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichungen (siehe dazu beispielsweise [46] Theorem 2.2.7) liefert dies

$$|D^\alpha f(z)| \leq \frac{1}{a_k v(z^{(k+1)})}$$

für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^N$ mit $|\alpha| = 1$ und jedes $z \in K_k$. Betrachte die Menge $A_k := K_k \backslash \overset{\circ}{K}_{k-1}$. Dann hat man natürlich

$$A_k \subset \bigcup_{z\in A_k} \{z' \in G;\ |z' - z| < \delta_k \text{ und } |v(z') - v(z)| < \delta_k\},$$

wobei δ_k so gewählt sei, daß

$$\left(\frac{1}{v(z^{(k)})} + \frac{M_{k+1}N}{a_{k+1}v(z^{(k+2)})}\right)\delta_k < \varepsilon \text{ und } \delta_k < a_k$$

gilt. Weil A_k kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge F_k von A_k mit

$$A_k \subset \bigcup_{z\in F_k} \{z' \in G;\ |z' - z| < \delta_k \text{ und } |v(z') - v(z)| < \delta_k\}.$$

Insbesondere existiert zu jedem $z \in A_k$ ein $w \in F_k$ mit

$$|w - z| < \delta_k \text{ und } |v(w) - v(z)| < \delta_k. \tag{3.4}$$

Falls w ein Element der Menge $D(z, \delta_k)$ ist, so liegen alle unten auftretenden Punkte ebenfalls in $D(z, \delta_k)$.
Wegen der Wahl von δ_k folgt $D(z, \delta_k) \subset D(z, a_k) \subset K_{k+1}$ für jedes $z \in A_k$.
Dies liefert dann für Punkte z, w wie in Relation (3.4)

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |f(z_1, ..., z_N)| \\
&\leq |f(z_1, ..., z_N) - f(w_1, z_2, ..., z_N)| \\
&+ |f(w_1, z_2, ..., z_N) - f(w_1, w_2, z_3, ..., z_N)| \\
&+ ... + |f(w_1, w_2, ..., w_{N-1}, z_N) - f(w_1, ..., w_N)| + |f(w_1, ..., w_N)| \\
&\leq \left| \int_{[z_1, w_1]} D^{\alpha_1} f(t, z_2, ..., z_N)\, dt \right| \\
&+ ... + \left| \int_{[z_N, w_N]} D^{\alpha_N} f(w_1, ..., w_{N-1}, t)\, dt \right| + |f(w)| \\
&\leq \sup_{\xi \in D(z, \delta_k)} |D^{\alpha_1} f(\xi)||z_1 - w_1| \\
&+ ... + \sup_{\xi \in D(z, \delta_k)} |D^{\alpha_N} f(\xi)||z_N - w_N| + |f(w)| \\
&\leq \frac{N \delta_k}{a_{k+1} v\big(z^{(k+2)}\big)} + |f(w)|
\end{aligned}$$

wobei $\alpha_i = (0, ..., 0, \underset{\text{i-te Koordinate}}{1}, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^N$ für jedes $1 \leq i \leq N$. Schließlich hat man für Punkte z, w wie in (3.4)

$$\begin{aligned}
v(z)|f(z)| &\leq |v(z) - v(w)||f(z)| + v(w)|f(z)| \\
&\leq |v(z) - v(w)||f(z)| + v(w) \left(\frac{N}{a_{k+1} v\big(z^{(k+2)}\big)} \delta_k + |f(w)| \right) \\
&\leq \delta_k \frac{1}{v\big(z^{(k)}\big)} + \frac{M_{k+1} N}{a_{k+1} v\big(z^{(k+2)}\big)} \delta_k + v(w)|f(w)| \\
&< \varepsilon + v(w)|f(w)|,
\end{aligned}$$

weil w zu K_{k+1} gehört. Dies impliziert

$$\sup_{z \in A_k} v(z)|f(z)| \leq \varepsilon + \max_{w \in F_k} v(w)|f(w)|.$$

Mit $F := \cup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ folgt daraus

$$1 \leq \varepsilon + \sup_{w \in F} v(w)|f(w)|.$$

Schreibe F als Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ und beachte, daß F nicht von der Funktion f abhängt und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Punkt des Randes von G konvergiert, d.h.

die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist diskret in G. Falls $f \in Hv_0(G)$, $f \neq 0$, hat man

$$\left\| \frac{f}{\| f \|_v} \right\|_v = 1 \leq \varepsilon + \left\| T\left(\frac{f}{\| f \|_v} \right) \right\|_{c_0} .$$

Also folgt

$$(1-\varepsilon) \parallel f \parallel_v \leq \parallel T(f) \parallel_{c_0} .$$

Weil $\|T(f)\|_{c_0} \leq \|f\|_v$ ebenfalls erfüllt ist, folgt die Behauptung. □

3.21 Korollar. *Sei $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, offen und v eine strikt positive und stetige Funktion auf G. Ist $Hv_0(G)$ unendlich dimensional, so sind $Hv_0(G)$ und $Hv(G)$ nicht reflexiv.*

Beweis. [52] Proposition 2.a.2 liefert, daß jeder unendlich dimensionale Unterraum von c_0 einen Unterraum enthält, der topologisch isomorph zu c_0 und komplementiert in c_0 ist. Daher kann $Hv_0(G)$ wegen Proposition 3.20 nicht reflexiv sein. Nach [48] Proposition 11.4.5 (a) ist dann auch $Hv(G)$ nicht reflexiv. □

3.3 Eine notwendige Bedingung für Quasinormabilität und die Dichtheitsbedingung

In diesem Abschnitt wird unter den in diesem Kapitel angenommenen allgemeinen Voraussetzungen jeweils eine notwendige Bedingung in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten dafür gegeben, wann $HW(G)$ bzw. $HW_0(G)$ quasinormabel ist. Dasselbe wird für die Dichtheitsbedingung durchgeführt. In Kapitel 4 wird unter stärkeren Einschränkungen gezeigt, daß die notwendige Bedingung in beiden Fällen auch hinreichend ist.

3.22 Proposition. *Falls $HW(G)$ quasinormabel ist, so ist die folgende Bedingung erfüllt:*
Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$, so daß für jedes $\alpha > 0$ ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit

$$\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \overline{w} + \frac{\alpha}{w_n} \text{ auf } G \tag{3.5}$$

existiert.

Beweis. Sei also $HW(G)$ quasinormabel. Nach Definition gibt es dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$, so daß es für jedes $\alpha > 0$ ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit

$$C_m \subset C_{\overline{w}} + \alpha C_n \tag{3.6}$$

gibt. Dann genügt es zu zeigen, daß (3.6) die Bedingung (3.5) impliziert. Wähle dazu $f \in HW(G)$ mit $|f| \leq \frac{1}{w_m}$ auf G beliebig, aber fest. Dann gehört f zu C_m und nach (3.6) auch zu $C_{\overline{w}} + \alpha C_n$, d.h. f kann in der Form $f = g_1 + g_2$ mit $g_1 \in C_{\overline{w}}$ und $g_2 \in \alpha C_n$ dargestellt werden. Es folgt

$$|f| \leq |g_1| + |g_2| \leq \overline{w} + \frac{\alpha}{w_n} \text{ auf } G.$$

Nimmt man das Supremum all dieser Funktionen, so folgt (3.5). □

3.23 Proposition. *Bedingung (3.5) aus Satz 3.22 impliziert die folgende Bedingung:*
Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$, so daß für jedes $k > n$ und jedes $\mu > 0$ ein $\xi > 0$ mit

$$\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \frac{\xi}{w_k} + \frac{\mu}{w_n} \text{ auf } G \tag{3.7}$$

existiert.

Beweis. Es sei also (3.5) erfüllt. Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und wähle $m > n$ gemäß (3.5). Wähle nun $k > n$ und $\mu > 0$ beliebig, aber fest. Eine Anwendung von (3.5) liefert dann $\overline{w} \in \overline{W}$ mit

$$\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \overline{w} + \frac{\mu}{w_n} \text{ auf } G.$$

Nach Definition gibt es $\xi > 0$, so daß $\overline{w} \leq \frac{\xi}{w_k}$ auf G gilt. Also folgt

$$\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \overline{w} + \frac{\mu}{w_n} \leq \frac{\xi}{w_k} + \frac{\mu}{w_n} \text{ auf } G$$

und damit (3.7). □

3.24 Proposition. *Es gelte $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w}}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW(G)$ ist quasinormabel.

(b) $HW_0(G)$ ist quasinormabel.

Beweis. Zunächst gilt nach [12] Proposition 10 die topologische Gleichheit $HW(G) = HW_0(G)''_{bb}$.
Desweiteren ist bekannt, daß ein Fréchetraum E genau quasinormabel ist, wenn das starke Dual E'' quasinormabel ist (siehe z.B. [15] Theorem 3).
Damit folgt das Gewünschte. □

3.25 Korollar. *Es gelte* $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w}}}^{co}$ *für jedes* $\overline{w} \in \overline{W}$. *Ist* $HW_0(\mathbb{D})$ *quasinormabel, so folgen die Bedingungen (3.5) und (3.7).*

3.26 Proposition. *Falls* $HW(G)$ *die Dichtheitsbedingung erfüllt, so genügt die Folge* $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *der folgenden Bedingung:*
Zu jeder Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver Zahlen und jedem* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m > n$ *und* $\overline{w} \in \overline{W}$ *mit*

$$\left(\min_{1\le k\le m} \frac{\lambda_k}{w_k}\right)^{\sim} \le \overline{w} + \frac{1}{w_n} \quad \textit{auf } G. \tag{3.8}$$

Beweis. Es habe $HW(G)$ die Dichtheitsbedingung. Dann existiert nach Definition zu jeder Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und $\overline{w} \in \overline{W}$ mit

$$\bigcap_{k=1}^{m} \lambda_k C_k \subset C_{\overline{w}} + C_n. \tag{3.9}$$

Es genügt zu zeigen, daß (3.9) die Bedingung (3.8) impliziert. Fixiere dazu $f \in H(G)$ mit $|f| \le \min_{1\le k\le m} \frac{\lambda_k}{w_k}$ auf G. Dann ist f Element von $\bigcap_{k=1}^{m} \lambda_k C_k$ und nach (3.9) auch von $C_{\overline{w}} + C_n$, d.h. f kann in der Form $f = g_1 + g_2$ mit $g_1 \in C_{\overline{w}}$ und $g_2 \in C_n$ dargestellt werden. Es folgt

$$|f| \le |g_1| + |g_2| \le \overline{w} + \frac{1}{w_n} \text{ auf } G.$$

Nimmt man nun das Supremum all dieser Funktionen, so folgt das Gewünschte. $\square$

3.27 Proposition. *(3.8) impliziert die folgende Bedingung:*
Zu jeder Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver Zahlen und jedem* $n \in \mathbb{N}$ *existiert* $m(n) > n$ *ebenso wie eine Folge* $(\mu_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver Zahlen mit*

$$\left(\min_{1\le k\le m(n)} \frac{\mu_k}{w_k}\right)^{\sim} \le \min_{1\le k\le s} \frac{\mu_k^{(n)}}{w_k} + \frac{1}{w_n} \quad \textit{auf } G \textit{ für jedes } s \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Beweis. Fixiere eine Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen ebenso wie ein $n \in \mathbb{N}$. Wähle dann $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ gemäß (3.8) und setze $m = m(n)$. Nach (3.8) gibt es $\overline{w} \in \overline{W}$ mit

$$\left(\min_{1\le k\le m(n)} \frac{\mu_k}{w_k}\right)^{\sim} \le \overline{w} + \frac{1}{w_n} \text{ auf } G.$$

Zu $\overline{w}$ gibt es eine Folge $(\mu_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen, so daß $\overline{w} \leq \min_{1\leq k\leq s} \frac{\mu_k^{(n)}}{w_k}$ auf G für jedes $s \in \mathbb{N}$. Damit folgt dann

$$\left(\min_{1\leq k\leq m(n)} \frac{\mu_k}{w_k}\right)^{\sim} \leq \overline{w} + \frac{1}{w_n} \leq \min_{1\leq k\leq s} \frac{\mu_k^{(n)}}{w_k} + \frac{1}{w_n} \text{ auf } G \text{ für jedes } s \in \mathbb{N}.$$

□

3.28 Lemma. *Falls E ein (DF)-Raum ist, der der dualen Dichtheitsbedingung genügt, so hat $F = E_b'$ die Dichtheitsbedingung.*

Beweis. Da E ein (DF)-Raum ist, hat E eine Fundamentalfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der abgeschlossenen absolutkonvexen beschränkten Teilmengen. Weil E nach Voraussetzung der dualen Dichtheitsbedingung genügt, so existiert nach Definition zu jeder Folge $(\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ und $U \in \mathcal{U}(E)$ mit

$$B_n \cap U \subset \overline{\Gamma}\left(\cup_{k=1}^m \lambda_k B_k\right).$$

Polarenbildung liefert nun

$$\bigcap_{k=1}^m \lambda_k B_k^\circ = \left(\bigcup_{k=1}^m \lambda_k B_k\right)^\circ = \left(\overline{\Gamma}\left(\cup_{k=1}^m \lambda_k B_k\right)\right)^\circ \subset (B_n \cap U)^\circ \subset B_n^\circ + U^\circ.$$

Dabei ist offenbar jedes B_l° eine Nullumgebung und U° gleichstetig und damit beschränkt in E_b'. Damit genügt E_b' der Dichtheitsbedingung. □

3.29 Proposition. *Es gelte $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w}}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW(G)$ hat die Dichtheitsbedingung.

(b) $HW_0(G)$ genügt der Dichtheitsbedingung.

Beweis. Wie zu Beginn des Beweises von Proposition 3.24 hat man $HW(G) = HW_0(G)_{bb}''$.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Dies folgt aus [60] Corollary 3.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Dies ergibt sich aus [8] Theorem 1.5. Falls $HW_0(G)$ nämlich die Dichtheitsbedingung hat, so folgt, daß $HW_0(G)_b'$ der dualen Dichtheitsbedingung genügt. Das vorhergehende Lemma impliziert dann, daß $HW(G) = HW_0(G)_{bb}''$ die Dichtheitsbedingung erfüllt. □

3.30 Korollar. *Es gelte $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w}}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$. Erfüllt $HW_0(G)$ die Dichtheitsbedingung, so genügt $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Bedingungen (3.8) und (3.10).*

3.4 Schwartz-Eigenschaft

3.4.1 Schwartz-Eigenschaft für $HW(G)$

Für diesen Abschnitt seien, wenn nichts anderes gesagt wird, v und w strikt positive, stetige Funktionen auf G. Sie werden als Wachstumsbedingungen im Sinne von [18] aufgefaßt. Es sei B_v (bzw. $B_{v,0}$) die abgeschlossene Einheitskugel von $Hv(G)$ (bzw. $Hv_0(G)$).
Hier wird zunächst eine Charakterisierung für die Kompaktheit der Abbildung $j : Hv(G) \hookrightarrow Hw(G)$ in Termen der Funktionen v und w gegeben, die dann im Anschluß eine Charakterisierung der Fréchet-Schwartz-Eigenschaft des Raumes $HW(G)$ ermöglicht.
Dazu wird zunächst das folgende Lemma benötigt, das in [33] in einer etwas anderen Form zu finden ist.

3.31 Lemma. *(*Cowen, MacCluer [33] Proposition 3.11*) Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) $j : Hv(G) \hookrightarrow Hw(G)$ *ist kompakt.*

(b) Für jede beschränkte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Hv(G)$ *mit* $f_n \overset{co}{\to} 0$ *folgt* $j(f_n) \to 0$ *in* $Hw(G)$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Der Beweis wird indirekt geführt. Dazu sei angenommen, daß es eine beschränkte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Hv(G)$ mit $f_n \overset{co}{\to} 0$ gibt, derart daß $(j(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $Hw(G)$ nicht gegen 0 konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)_n$ ebenso wie ein $\varepsilon > 0$ mit $j(f_{n_k}) \notin \varepsilon B_w$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da j jedoch kompakt ist und $(f_{n_k})_k$ in einem Vielfachen von B_v liegt, gibt es eine Teilfolge $(j(f_{n_{k_l}}))_l$, die in $Hw(G)$ gegen eine Funktion g konvergiert. Nun gilt aber $j(f_{n_{k_l}}) \overset{co}{\to} 0$ in $H(G)$. Daher muß $g \equiv 0$ sein und $j(f_{n_{k_l}}) \to 0$ in $Hw(G)$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Es sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige beschränkte Folge in $Hv(G)$. Weil $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine normale Familie ist, gibt es eine Teilfolge $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig auf den kompakten Mengen gegen eine Funktion $g \in H(G)$ konvergiert. Fixiere ein n_k. Dann existiert $M > 0$, so daß $|g_{n_k}(z)| < \frac{M}{v(z)}$ für jedes $z \in G$ gilt. Dies liefert $|g(z)| \leq \frac{M}{v(z)}$ für jedes $z \in G$. Also liegt g in $Hv(G)$, und $(g_{n_k} - g)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge in $Hv(G)$, die bzgl. *co* gegen 0 konvergiert. Die Voraussetzung liefert dann $j(g_{n_k}) \to j(g)$ in $Hw(G)$. Also ist j kompakt. □

Beispiele für die im folgenden angenommenen Voraussetzungen werden im Anschluß an diesen Abschnitt gegeben.

3.32 Satz. *Es gelte $Hv_0(G) \subset Hw_0(G)$ und $B_v = \overline{B_{v,0}}^{co}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $j : Hv(G) \hookrightarrow Hw(G)$ ist kompakt.

(b) $i : Hv_0(G) \hookrightarrow Hw_0(G)$ ist kompakt.

(c) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $K \subset\subset G$, so daß für jedes $z \in G\backslash K$ gilt:

$$w(z) < \varepsilon \tilde{v}(z).$$

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Hier ist nichts zu zeigen.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Wähle dazu eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_v$ mit $f_n \overset{co}{\to} 0$ auf G. Fixiere dann ein $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung (c) gibt es eine kompakte Menge $K \subset\subset G$ mit $w(z) \leq \varepsilon\tilde{v}(z)$ für jedes $z \in G\backslash K$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. *co* gegen 0 konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für jedes $n \geq n_0$ und jedes $\zeta \in K$

$$|f_n(\zeta)| \leq \frac{\varepsilon}{\max_{z\in K} w(z)} \tag{3.11}$$

gilt. Schließlich hat man für $n \geq n_0$

$$\| j(f_n) \|_w = \sup_{z\in G} w(z)|f_n(z)| \leq \max\left(\sup_{z\in G\backslash K} w(z)|f_n(z)|, \sup_{z\in K} w(z)|f_n(z)|\right) < \varepsilon,$$

weil (3.11) die Ungleichung $\sup_{z\in K} w(z)|f_n(z)| \leq \varepsilon$ liefert und für $z \in G\backslash K$ wegen (c) $w(z)|f_n(z)| \leq \varepsilon\tilde{v}(z)|f_n(z)| < \varepsilon$ gilt.
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Dann ist nach Voraussetzung $|f_n| \leq \frac{1}{v}$ auf G. Weil f_n holomorph ist, impliziert [18] 1.2.(iii), daß $|f_n| \leq \left(\frac{1}{v}\right)^{\sim} = \frac{1}{\tilde{v}}$ auf G und damit schließlich auch $\tilde{v}|f_n| \leq 1$.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Sei $i : Hv_0(G) \hookrightarrow Hw_0(G)$ kompakt. Dann ist die transponierte Abbildung $i^t : Hw_0(G)' \hookrightarrow Hv_0(G)'$ ebenfalls kompakt. Weiterhin gilt für $z \in G$ nach Definition

$$i^t(\delta_z)(f) = (\delta_z \circ i)(f) = \delta_z(i(f)) = f(z)$$

für jedes $f \in Hv_0(G)$.
Zeige nun, daß die Menge $\{w(z)\delta_z;\ z \in G\}$ beschränkt in $Hw_0(G)'$ ist: Nach Definition ist $\{w(z)\delta_z;\ z \in G\}$ in $B^\circ_{w,0}$ enthalten. Daher ist $\{w(z)\delta_z;\ z \in G\}$ gleichstetig und also auch beschränkt in $Hw_0(G)'$.
Weil $i^t : Hw_0(G)' \hookrightarrow Hv_0(G)'$ eine kompakte Abbildung ist, ist die Menge

$\{i^t(w(z)\delta_z);\ z \in G\} =: B$ relativkompakt in $Hv_0(G)'$, so daß auf ihr die Normtopologie mit $\sigma(Hv_0(G)', Hv_0(G))$ zusammenfällt.
Sei im folgenden $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann liefert Obiges die Existenz einer endlichen Menge $(f_1, ..., f_s) \subset Hv_0(G)$ mit

$$B \cap (f_1, ..., f_s)^\circ \subset \{y \in B;\ \| y \|_{Hv_0(G)'} < \varepsilon\}. \tag{3.12}$$

Setze jetzt $V := (f_1, ..., f_s)^\circ$. Da V zu $\mathcal{U}(Hv_0(G)', \sigma(Hv_0(G)', Hv_0(G)))$ gehört, gibt es nach Definition von $Hv_0(G)$ ein $K \subset\subset G$, so daß $w(z)\delta_z$ für jedes $z \in G\backslash K$ ein Element der Menge V ist.
Folglich ist $| < i^t(w(z)\delta_z), f_k > | \leq 1$ für jedes $1 \leq k \leq s$ und jedes $z \in G\backslash K$ und damit nach (3.12) $\| i^t(w(z)\delta_z) \|_{Hv_0(G)'} < \varepsilon$ für $z \in G\backslash K$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \subset\subset G$ mit $w(z) \| \delta_z \|_{Hv_0(G)'} < \varepsilon$ für jedes $z \in G\backslash K$.
Wegen der Voraussetzung $B_v = \overline{B_{v,0}}^{co}$ erhält man

$$\begin{aligned} \| \delta_z \|_{Hv_0(G)'} &= \sup\{|f(z)|; f \in B_{v,0}\} = \sup\{|f(z)|; f \in \overline{B_{v,0}}^{co}\} \\ &= \sup\{|f(z)|; f \in B_v\} = \| \delta_z \|_{Hv(G)'} = \frac{1}{\tilde{v}(z)}, \end{aligned}$$

und man kann schließen: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $K \subset\subset G$ mit $w(z) < \varepsilon\tilde{v}(z)$ für jedes $z \in G\backslash K$. □

3.33 Lemma. *Es gelte $\overline{C_n}^{co} = B_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW(G)$ ist ein (FS)-Raum.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, so daß $Hw_m(G) \hookrightarrow Hw_n(G)$ kompakt ist.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei dazu $HW(G)$ ein (FS)-Raum. Gemäß Definition existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, so daß es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F \subset HW(G)$ mit $C_m \subset F + \varepsilon C_n$ gibt. Dies impliziert aber

$$C_m \subset F + \varepsilon C_n \subset F + \varepsilon B_n.$$

Da εB_n *co*-kompakt und F *co*-abgeschlossen ist, liefert [47] Proposition 2.10.5, daß $F + \varepsilon B_n$ ebenfalls *co*-abgeschlossen ist. Es folgt

$$B_m = \overline{C_m}^{co} \subset F + \varepsilon B_n.$$

Damit erhält man (b).

(b) $\Longrightarrow$ (a): Dies ist [47] Proposition 3.15.9. □

3.34 Korollar. *Es gelte* $\overline{C_n}^{co} = B_n$ *ebenso wie* $B_n = \overline{B_{n,0}}^{co}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW(G)$ *ist ein* (FS)*-Raum.*

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *existiert* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m > n$*, so daß* $Hw_m(G) \hookrightarrow Hw_n(G)$ *kompakt ist.*

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *gibt es* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m > n$*, so daß* $H(w_m)_0(G) \hookrightarrow H(w_n)_0(G)$ *kompakt ist.*

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *gibt es* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m > n$*, so daß für jedes* $\varepsilon > 0$ $K \subset\subset G$ *mit*

$$w_n(z) < \varepsilon \tilde{w}_m(z)$$

für jedes $z \in G \backslash K$ *existiert.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b) folgt unmittelbar aus Lemma 3.33, während Satz 3.32 die Äquivalenz von (b), (c) und (d) liefert. □

Dieses Resultat ist in gewisser Weise invers zu dem Resultat [18] Theorem 2.1.(a). In diesem Theorem wird eine Charakterisierung der (DFS)-Eigenschaft gewichteter induktiver Limites holomorpher Funktionen gegeben. Allerdings hat das vorliegende Resultat den Vorteil, daß die Bedingung ausschließlich in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten gegeben wird, während das Ergebnis in [18] noch Funktionen $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ enthält. Wloka bewies in [68] Abschnitt I.4.2 Satz 2, daß Bedingung (c) aus Satz 3.32 ohne die assoziierten Gewichte bereits hinreichend für die Kompaktheit der Einbettung ist. Im Beweis der Umkehrung kann allerdings nicht auf das assoziierte Gewicht verzichtet werden, wie der Beweis des Satzes zeigt.

3.35 Bemerkung. Es gelte $\overline{C_n}^{co} = B_n$ ebenso wie $B_n = \overline{B_{n,0}}^{co}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist $HW(G)$ ein (FS)-Raum, so gilt $HW(G) = HW_0(G)$.

Beweis. Fixiere dazu $f \in HW(G)$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $m > n$, so daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \subset\subset G$ mit

$$w_n(z) < \varepsilon \tilde{w}_m(z) \leq \varepsilon w_m(z)$$

für jedes $z \in G \backslash K$ gibt. Nach Voraussetzung ist f Element von $Hw_m(G)$ und daher existiert ein $\alpha > 0$ mit $|f| \leq \frac{\alpha}{w_m}$ auf G. Es folgt $w_n|f| \leq \alpha \frac{w_n}{w_m}$ auf G, und $w_n|f|$ verschwindet mit $\frac{w_n}{w_m}$ im Unendlichen auf G. Da n beliebig gewählt war, folgt $f \in HW_0(G)$. □

Die Umkehrung gilt i.a. jedoch nicht. Wie bereits erwähnt, impliziert Bedingung (M') die Gleichheit $HW(G) = HW_0(G)$, nicht aber die Bedingung (S') oder die vorliegende Version mit den assoziierten Gewichten.

3.4.2 Beispiele für die angenommenen Voraussetzungen

Im folgenden werden zunächst Beispiele für die Bedingung $B_n = \overline{B_{n,0}}^{co}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

3.36 Lemma. *(*Bierstedt, Bonet, Galbis [17] Lemma1*) Sei G eine offene und kreisförmige Teilmenge von $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$. Für $f \in H(G)$ und $z \in G$ hat man stets*

$$|[S_n(f)](z)| \leq \max_{|\lambda|=1} |f(\lambda z)|$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, wobei mit $S_n(f)$ die Cesàro-Mittel der Partialsummen der Taylorreihe von f um 0 bezeichnet werden.

Die folgende Proposition und ihr Beweis sind ebenfalls [17] entnommen. Der Beweis wird hier notiert, da er im folgenden benötigt wird.

3.37 Proposition. *(*Bierstedt, Bonet, Galbis [17]*) Seien G eine offene und kreisförmige Teilmenge von $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge nicht negativer stetiger und radialer Funktionen auf G. Es sei angenommen, daß $HW_0(G)$ alle Polynome enthält. Dann gilt $B_n \subset \overline{B_{n,0}}^{co}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Fixiere zunächst $n \in \mathbb{N}$ und wähle dann ein beliebiges, aber festes $f \in B_n$. Wie bereits erwähnt, konvergiert $(S_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen f gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G. Lemma 3.36 und die Tatsache, daß w_n radial ist, liefern nun die Abschätzung

$$w_n(z)|[S_k(f)](z)| \leq w_n(z) \left(\max_{|\lambda|=1} |f(\lambda z)| \right) = \max_{|\lambda|=1} w_n(\lambda z)|f(\lambda z)| \leq 1,$$

da f nach Voraussetzung ein Element von B_n ist. Schließlich folgt $S_k(f) \in B_n \cap HW_0(G)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und damit auch $f \in \overline{B_n \cap HW_0(G)}^{co} \subset \overline{B_{n,0}}^{co}$. □

Bei der folgenden Proposition handelt es sich um einen Spezialfall des eben Betrachteten.

3.38 Proposition. *(*Bierstedt, Bonet, [12] Proposition 11*) Sei w eine strikt positive stetige radiale und schnell fallende Funktion auf $\mathbb{C}$. Dann ist B_w eine Teilmenge von $\overline{B_{w,0}}^{co}$.*

Im folgenden werden Beispiele für $B_n = \overline{C_n}^{co}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

3.39 Proposition. *(*Bierstedt, Bonet, Galbis [17]*) Seien G eine offene und kreisförmige Teilmenge von $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge nicht negativer stetiger und radialer Funktionen auf G. Es sei angenommen, daß $HW(G)$ alle Polynome enthält. Dann gilt $B_n \subset \overline{C_n}^{co}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Fixiere zunächst $n \in \mathbb{N}$ und wähle dann ein beliebiges, aber festes $f \in B_n$. Mit Hilfe derselben Argumentation wie im Beweis des vorhergehenden Satzes erhält man schließlich $S_k(f) \in B_n \cap HW(G)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und damit auch $f \in \overline{B_n \cap HW(G)}^{co} = \overline{C_n}^{co}$. □

Die Ideen zu den folgenden beiden Propositionen stammen aus [45] (siehe dort Theorem 4.2.1 und 4.2.3).

3.40 Proposition. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ die obere Halbebene. Ferner sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge stetiger strikt positiver und beschränkter Funktionen auf G, die zusätzlich noch die folgenden Bedingungen erfüllen:*

(i) Jedes w_n verschwindet auf der reellen Achse.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\delta > 0$ ist $\inf_{\mathrm{Im}(z)>\delta} w_n(z) > 0$.

(iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $0 < r_0 = r_0(n) < 1$ mit $w_n(z) \leq w_n(z + ir)$ für jedes $z \in G$ und jedes $0 < r \leq r_0$.

Dann gilt $B_n = \overline{B_n \cap HW(G)}^{co} = \overline{C_n}^{co}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Fixiere dazu $n \in \mathbb{N}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k_0} \leq r_0$ und $f \in B_n$. Definiere

$$f_k(z) := f\left(z + \frac{i}{k}\right)$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann ist jedes f_k mit f holomorph auf G und wegen $\frac{i}{k} \to 0$ für $k \to \infty$ konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G gegen f. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ beliebig, aber fest, und beweise, daß f_k zu $HW(G)$ gehört.
Dazu ist zu zeigen, daß f_k für jedes $m \in \mathbb{N}$ in $Hw_m(G)$ liegt. Fixiere also $m \in \mathbb{N}$. Da w_m nach Voraussetzung auf G beschränkt ist, gibt es $M > 0$ mit $w_m(z) \leq M$ für jedes $z \in G$. Ferner existiert wegen (ii) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n > 0$ mit $w_n(z) \geq \xi_n$ für jedes $z \in G$. Damit hat man

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in G} w_m(z)|f_k(z)| &= \sup_{z\in G} w_m(z)\left|f\left(z+\frac{i}{k}\right)\right| \\
&\leq \sup_{z\in G} \frac{w_m(z)}{w_n\left(z+\frac{i}{k}\right)} w_n\left(z+\frac{i}{k}\right)\left|f\left(z+\frac{i}{k}\right)\right| \\
&\leq \sup_{z\in G} \frac{w_m(z)}{w_n(z+\frac{i}{k})} \leq \frac{M}{\xi_n} < \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist f_k ein Element von $Hw_m(G)$ und damit auch von $HW(G)$.
Es bleibt zu zeigen, daß f_k zu B_n gehört. Es gilt wegen (iii)

$$\begin{aligned}\sup_{z\in G} w_n(z)|f_k(z)| &= \sup_{z\in G} w_n(z)\left|f\left(z+\frac{i}{k}\right)\right| \\ &\leq \sup_{z\in G} w_n\left(z+\frac{i}{k}\right)\left|f\left(z+\frac{i}{k}\right)\right| \\ &\leq \sup_{z\in G} w_n(z)|f(z)| \leq 1,\end{aligned}$$

weil f nach Voraussetzung ein Element von B_n ist. Also gilt $f_k \in B_n \cap HW(G)$ und damit $f \in \overline{B_n \cap HW(G)}^{co}$. □

3.41 Beispiel. Sei $G = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$w_n : G \to \mathbb{C};\ z \to \begin{cases} f(\mathrm{Im}(z))e^{n\,\mathrm{Im}(z)}, & \mathrm{Im}(z) \leq 1 \\ f(1)e^n, & \mathrm{Im}(z) > 1 \end{cases},$$

wobei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige strikt positive monoton wachsende Funkton mit $f(0) = 0$ ist.
Dann ist $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Definition eine wachsende Folge strikt positiver, stetiger Funktionen auf G, so daß jedes w_n auf der reellen Achse verschwindet.
Fixiere jetzt $n \in \mathbb{N}$. Dann hat man für beliebiges $\delta > 0$ die Abschätzung $\inf_{\mathrm{Im}(z)>\delta} w_n(z) = |f(\delta)|e^{n\delta} > 0$. Es bleibt zu prüfen, ob Bedingung (iii) aus Proposition 3.40 erfüllt ist. Wähle $r_0 := \frac{2}{3}$ und $0 < r < r_0$ beliebig, aber fest.
1. Fall: Sei $\mathrm{Im}(z) \leq 1$ und damit $w_n(z) = f(\mathrm{Im}(z))e^{n\,\mathrm{Im}(z)}$.
Falls $\mathrm{Im}(z+ir) \leq 1$ und $w_n(z+ir) = f(\mathrm{Im}(z+ir))e^{n\,\mathrm{Im}(z+ir)}$ gilt, so hat man $w_n(z+ir) = f(\mathrm{Im}(z)+r)e^{n(\mathrm{Im}(z)+r)} \geq f(\mathrm{Im}(z))e^{n\,\mathrm{Im}(z)} = w_n(z)$. Wenn aber $\mathrm{Im}(z+ir) > 1$ und daher $w_n(z+ir) = f(1)e^n$ erfüllt ist, so folgt $w_n(z+ir) = f(1)e^n \geq f(\mathrm{Im}(z))e^{n\,\mathrm{Im}(z)} = w_n(z)$.
2. Fall: Es gelte $\mathrm{Im}(z) > 1$ und damit $w_n(z) = f(1)e^n$.
Dies impliziert $w_n(z+ir) = f(1)e^n = w_n(z)$.
Damit sind alle Voraussetzungen zur Anwendung der Proposition erfüllt.

3.42 Proposition. *Sei G ein Streifen der Form $G = \{z \in \mathbb{C};\ |\mathrm{Im}(z)| < \delta\}$ für $\delta > 0$, und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge stetiger strikt positiver beschränkter Funktionen auf G, die zusätzlich die folgenden Eigenschaften hat:*

(i) Jedes w_n verschwindet auf dem Rand von G.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $0 < \varepsilon < \delta$ ist $\inf_{\delta-\varepsilon>\mathrm{Im}(z)>-\delta+\varepsilon} w_n(z) > 0$.

(iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $0 < r_0 = r_0(n) < 1$ mit $w_n(z) \leq w_n(rz)$ für jedes $r_0 \leq r \leq 1$ und jedes $z \in G$.

Dann ist $B_n = \overline{B_n \cap HW(G)}^{co} = \overline{C_n}^{co}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Fixiere $n \in \mathbb{N}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $1 - \frac{1}{k_0} \geq r_0$ und $f \in B_n$. Definiere

$$f_k(z) := f\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) z\right)$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $z \in G$. Dann ist jedes f_k mit f holomorph auf G, und wegen $(1 - \frac{1}{k}) \to 1$ für $k \to \infty$ konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf jeder kompakten Teilmenge von G gegen f. Fixiere jetzt $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ und zeige, daß f_k zu $HW(G)$ gehört. Wähle dazu ein beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}$. Da w_m nach Voraussetzung auf G beschränkt ist, gibt es $M > 0$ mit $w_m(z) \leq M$ für jedes $z \in G$. Ferner existiert wegen (ii) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n > 0$, so daß $w_n(z) \geq \xi_n$ für jedes $z \in G$. Es gilt demnach:

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in G} w_m(z)|f_k(z)| &= \sup_{z\in G} w_m(z) \left| f\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) z\right)\right| \\
&= \sup_{z\in G} \frac{w_m(z)}{w_n\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) z\right)} w_n\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) z\right) \left| f\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) z\right)\right| \\
&\leq \sup_{z\in G} \frac{w_m(z)}{w_n((1 - \frac{1}{k})z)} \leq \frac{M}{\xi_n} < \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist f_k ein Element von $HW(G)$. Es bleibt zu zeigen, daß f_k zu B_n gehört. Es gilt wegen (iii)

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in G} w_n(z)|f_k(z)| &\leq \sup_{z\in G} w\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) z\right) \left| f\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) z\right)\right| \\
&\leq \sup_{z\in G} w_n(z)|f(z)| \leq 1,
\end{aligned}$$

weil $f \in B_n$ nach Voraussetzung ist. Damit folgt die Behauptung. $\square$

3.43 Beispiel. Sei G ein Streifen der Form $G = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| < \delta\}$, $\delta > 0$, und $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $w_n : G \to \mathbb{C}, z \to (f(\delta) - f(|\operatorname{Im}(z)|))e^{n(\delta - |\operatorname{Im}(z)|)}$, wobei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine beliebige, aber feste, strikt positive stetige und streng monoton wachsende Funktion ist.
Dann ist $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Definition eine wachsende Folge strikt positiver stetiger und beschränkter Funktionen auf G.
Desweiteren erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
w_n(z) &= (f(\delta) - f(|\operatorname{Im}(z)|))e^{n(\delta - |\operatorname{Im}(z)|)} \\
&\leq (f(\delta) - f(r|\operatorname{Im}(z)|))e^{n(\delta - r|\operatorname{Im}(z)|)} = w_n(rz)
\end{aligned}$$

für jedes $0 < r < 1$ und jedes $z \in G$. Ferner ist $\lim_{|\operatorname{Im}(z)| \to \delta} w_n(z) = 0$. Außerdem gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung
$\inf_{-\delta+\varepsilon<\operatorname{Im}(z)<\delta-\varepsilon} w_n(z) = (f(\delta) - f(|\delta - \varepsilon|))e^{n\varepsilon} > 0$. Eine Anwendung von Proposition 3.42 liefert dann $B_n = \overline{B_n \cap HW(G)}^{co}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

3.5 Beispiele nicht-distinguierter gewichteter Fréchetträume holomorpher Funktionen

Die Idee zur Konstruktion des folgenden Beispiels wurde [28] entnommen.

Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$, die der Abschluß ihres Inneren ist, bezeichne $A(K)$ die (sup-Norm-)Banachalgebra aller auf K stetigen Funktionen, die auf dem Inneren von K holomorph sind.
Desweiteren wird in diesem Abschnitt angenommen, daß die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind.

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit Abschluß K und Rand ∂G.

(b) Es gibt eine diskrete Folge $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \partial G$ verschiedener Peak-Punkte von $A(K)$ in ∂G, die gegen ein Element z_∞ von ∂G konvergiert.

(c) Es sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf G, derart daß jedes w_n eine stetige Fortsetzung u_n auf $K\backslash\{z_\infty\}$ hat und daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $b_n > 0$ mit $|u_n| \leq b_n$ auf $K\backslash\{z_\infty\}$ existiert.

(d) Die Köthematrix $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch $a_n(j) := u_n(z_j)$ für jedes $j, n \in \mathbb{N}$. O.B.d.A. wird $a_1(j) \leq 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ angenommen.

Es bezeichne

$$\lambda_\infty(A) := \left\{ x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}};\ p_n(x) := \sup_{j\in\mathbb{N}} a_n(x_j)|x_j| < \infty \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Unter der Topologie, die durch die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen gegeben wird, ist $\lambda_\infty(A)$ ein Fréchetraum. Eine Nullumgebungsbasis ist bestimmt durch $(\frac{1}{n}E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$E_n := \{x \in \lambda_\infty(A); p_n(x) \leq 1\},\ n \in \mathbb{N}.$$

O.B.d.A. genügt es allerdings, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu betrachten.

Der folgende Satz stammt von Garnir, de Wilde und Schmets (siehe dazu [39]). In der hier angeführten Form ist er allerdings in [23] Theorem 2.10 zu finden.

3.44 Satz. *(*Garnir, de Wilde, Schmets*)*
Sei E ein vollständiger lokalkonvexer Raum. Sei $T \in L(E)$ ein Operator derart, daß es ein $U \in \mathcal{U}_0(E)$ gibt, so daß $(T - Id)(U)$ beschränkt in E ist und $(T - Id)(U) \subset \alpha U$ für ein $0 < \alpha < 1$ gilt. Dann ist T ein Isomorphismus auf.

Die im Anschluß angegebene Proposition wurde [47] entnommen und entspricht dort Proposition 2.7.3.

3.45 Proposition. *Seien E und F topologische Vektorräume und f eine stetige Abbildung von E in F. Dann gibt es genau dann eine Abbildung g von F in E, so daß $g \circ f$ die Identität Id_E von E auf sich selbst ist, wenn f ein injektiver strikter Morphismus ist und $f(E)$ ein topologisches Supplement in F hat.*

3.46 Satz. *Der Raum $\lambda_\infty(A)$ ist isomorph zu einem komplementierten Unterraum von $HW(G)$.*

Beweis. Aufgrund der Stetigkeit der Gewichte kann man für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Umgebung U_j von z_j in K wählen, so daß $U_j \cap U_i = \emptyset$ für $i \neq j$, $\lim_{j\to\infty} \operatorname{diam} U_j = 0$ und

$$\frac{1}{2} u_n(z_j) \leq w_n(z) \leq 2u_n(z_j) \text{ für jedes } 1 \leq n \leq j \text{ und jedes } z \in U_j \cap G. \tag{3.13}$$

Wähle jetzt eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$0 < \varepsilon_j < a_1(j) 2^{-j-1} \text{ für jedes } j \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j =: \varepsilon < \infty. \tag{3.14}$$

Wegen (b) gibt es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $g_j \in A(K)$ mit $g_j(z_j) = 1$ und $|g_j(z)| < 1$ für jedes $z \in K$ mit $z \neq z_j$. Bezeichnet man mit C_j den Abschluß von $K \backslash U_j$, so ist g_j eine stetige Funktion auf der kompakten Menge C_j, und die Folge der Potenzen $(|g_j|^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine fallende Folge stetiger Funktionen auf C_j, so daß $\lim_{k\to\infty} g_j^k(z) = 0$ für jedes $z \in C_j$.
Nach dem Satz von Dini existiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $k(j) \in \mathbb{N}$ mit

$$|g_j^{k(j)}(z)| \leq \varepsilon_j \text{ für jedes } z \in C_j.$$

Setze für jedes $j \in \mathbb{N}$ jetzt $e_j := g_j^{k(j)}$. Dann gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$e_j \in A(K), e_j(z_j) = 1 \text{ und } |e_j(z)| \leq \varepsilon_j \text{ für jedes } z \in K \backslash U_j. \tag{3.15}$$

Wegen $\lim_{z\to z_j} e_j(z) = e_j(z_j) = 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ kann man eine offene Teilmenge V_j von $U_j \cap G$ mit

$$\left| \frac{1}{\mu(V_j)} \int_{V_j} e_j(z)\, d\mu(z) - 1 \right| \leq \varepsilon_j \text{ und } \inf_{z\in V_j} w_k(z) > 0 \tag{3.16}$$

finden. Hier bezeichnet μ das Lebesgue-Maß. Aus den Voraussetzungen zusammen mit Ungleichung (3.13) erhält man die folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $k, j \in \mathbb{N}$ gilt: $\sup_{z\in U_j\cap G} w_k(z) \leq 2a_k(j)$.

(ii) Für jedes $k, j \in \mathbb{N}$ gilt: $a_k(j) \leq 2\inf_{z\in V_j} w_k(z)$.

Definiere jetzt die offenbar linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi &: \lambda_\infty(A) \to HW(G),\ \psi(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j e_j, \\ \phi &: HW(G) \to \lambda_\infty,\ \phi(f) := \left(\frac{1}{\mu(V_j)} \int_{V_j} f(z)\, d\mu(z) \right)_{j\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Beide Abbildungen sind wohldefiniert und stetig. Dies wird zunächst für ψ gezeigt. Fixiere $x \in \lambda_\infty(A)$. Dann gibt es $C > 0$ mit $|x_j| \leq Ca_1(j)^{-1}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Für jedes $z_0 \in K$, $z_0 \neq z_\infty$, gibt es j_0 und eine Umgebung W von z_0 mit $W \cap U_j = \emptyset$ für $j \geq j_0$. Falls z zu W gehört, so hat man

$$\sum_{j\geq j_0} |x_j e_j(z)| \leq C \sum_{j\geq j_0} a_1(j)^{-1}\varepsilon_j \leq C \sum_{j\geq j_0} 2^{-j-1},$$

und die Reihe, die $\psi(x)$ definiert, konvergiert (absolut und) gleichmäßig auf W. Dies impliziert $\psi(x) \in H(G)$, und $\psi(x)$ ist stetig auf $K\backslash\{z_\infty\}$ für jedes $x \in \lambda_\infty(A)$. Um $\psi(x) \in HW(G)$ ebenso wie die Stetigkeit von ψ nachzuweisen, fixiere ein $n \in \mathbb{N}$. Es gelte für $x \in \lambda_\infty(A)$ die Ungleichung $\sup_{j\in\mathbb{N}} a_n(j)|x_j| \leq 1$. Für $z \in G$ sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

(a) z gehört zu keiner der Umgebungen U_j. Dies liefert die Abschätzung:

$$\begin{aligned} w_n(z) \left| \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j e_j(z) \right| &\leq w_n(z) \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j||e_j(z)| \leq b_n \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\varepsilon_j \\ &\leq b_n \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j| a_1(j) 2^{-j-1} \leq b_n \sup_{j\in\mathbb{N}} a_1(j)|x_j| \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j-1} \\ &\leq b_n \sup_{j\in\mathbb{N}} a_1(j)|x_j|. \end{aligned}$$

(b) Es gibt ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $z \in U_{j_0}$. Dann gilt mit einer ähnlichen Abschätzung wie im ersten Fall wegen (i):

$$\begin{aligned} w_n(z)\left|\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j e_j(z)\right| &\leq w_n(z)|x_{j_0}e_{j_0}(z)| + w_n(z)\sum_{j\neq j_0}|x_j e_j(z)| \\ &\leq 2a_n(j_0)|x_{j_0}| + b_n \sum_{j\neq j_0}|x_j|\varepsilon_j \\ &\leq 2Ca_1(j_0)|x_{j_0}| + b_n \sup_{j\neq j_0} a_1(j)|x_j| \\ &\leq (2+b_n)\sup_{j\in\mathbb{N}} a_1(j)|x_j|. \end{aligned}$$

Zeige nun, daß ϕ ebenfalls wohldefiniert und stetig ist. Für ein gegebenes $f \in HW(G)$ zeige $\phi(f) \in \lambda_\infty(A)$ (die Abschätzungen liefern auch die Stetigkeit). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $j \in \mathbb{N}$ hat man

$$\begin{aligned} a_k(j)\frac{1}{\mu(V_j)}\left|\int_{V_j} f(z)\,d\mu(z)\right| &\underset{(ii)}{\leq} 2\frac{1}{\mu(V_j)}\int_{V_j} w_k(z)|f(z)|\,d\mu(z) \\ &\leq 2\sup_{z\in G} w_k(z)|f(z)| < \infty. \end{aligned}$$

Im folgenden soll Satz 3.44 auf $T = \phi\psi$ angewandt werden. Dazu ist nachzurechnen, daß T die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Für $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \lambda_\infty(A)$ gilt $(\phi\psi - \mathrm{Id})(x) =: (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$y_j = \left(\frac{1}{\mu(V_j)}\int_{V_j} e_j(z)\,d\mu(z) - 1\right)x_j + \sum_{k\neq j}\frac{x_k}{\mu(V_j)}\int_{V_j} e_k(z)\,d\mu(z)$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$. Mit (3.15) und (3.16) erhält man

$$\begin{aligned} |y_j| &\leq \left|\frac{1}{\mu(V_j)}\int_{V_j} e_j(z)\,d\mu(z) - 1\right||x_j| + \sum_{k\neq j}\frac{|x_j|}{\mu(V_j)}\left|\int_{V_j} e_k(z)\,d\mu(z)\right| \\ &\leq \varepsilon_j|x_j| + \sum_{k\neq j}|x_k|\sup_{z\in V_j}|e_k(z)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\varepsilon_k|x_k|, \end{aligned}$$

und die letzte Reihe konvergiert wegen (3.14) und $x \in \lambda_\infty(A)$:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\varepsilon_k|x_k| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k-1}|x_k|a_1(k) \leq \frac{1}{2}p_1(x).$$

Zeige zunächst, daß $(\phi\psi - \mathrm{Id})(E_1)$ beschränkt in $\lambda_\infty(A)$ ist.
Fixiere dazu ein $x \in E_1$ ebenso wie ein $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} a_k(j)|y_j| \leq b_k \sup_{j\in\mathbb{N}} |y_j| \leq \frac{b_k}{2} p_1(x) \leq \frac{b_k}{2}.$$

Also folgt $(\phi\psi - Id)(E_1) \subset \frac{2}{b_k} E_k$, und damit ist $(\phi\psi - Id)(E_1)$ in $\lambda_\infty(A)$ beschränkt.
Zeige jetzt $(\phi\psi - Id)(E_1) \subset \frac{1}{2}E_1$. Wähle ein $x \in E_1$ beliebig, aber fest. Dann folgt

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} a_1(j)|y_j| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |y_j| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k |x_k| \leq \frac{1}{2} p_1(x).$$

Damit ergibt sich $(\phi\psi - Id)(E_1) \subset \frac{1}{2}E_1$. Wegen $Id|_{\lambda_\infty(A)} = (\phi\psi)(\phi\psi)^{-1} = \phi(\psi(\phi\psi)^{-1})$ und Proposition 3.45 folgt dann das Gewünschte. □

3.47 Satz. *Zu jedem Raum $\lambda_\infty(A)$ existiert eine Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$, so daß $\lambda_\infty(A)$ ein komplementierter Unterraum von $HW(\mathbb{D})$ ist.*

Beweis. Es sei eine Köthematrix $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (a_n(j))_{j\in\mathbb{N}}$ gegeben und setze $a := (a_n(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Definiere nun eine Köthematrix $A' = (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a'_n := \frac{a_n}{a} = \left(\frac{a_n(j)}{a_j(j)}\right)_j$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\frac{a_n(j)}{a_j(j)} \leq 1$ für jedes $j \geq n$. Daher ist jedes a'_n beschränkt durch

$$\lambda_n := \max\left(1, \frac{a_n(1)}{a_1(1)}, ..., \frac{a_n(n-1)}{a_{n-1}(n-1)}\right) \text{ und } a'_1(j) \leq 1 \text{ für jedes } j \in \mathbb{N}.$$

Natürlich gilt $\lambda_\infty(A) \cong \lambda_\infty(A')$. Da die Köthematrix $A' = (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alle am Anfang dieses Abschnitts geforderten Voraussetzungen erfüllt und $\mathbb{D}$ den an G gestellten Anforderungen genügt, kann nun eine Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver, stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$ konstruiert werden, derart daß jedes w_n eine stetige Fortsetzung u_n auf $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{z_\infty\}$ mit $u_n(z_j) = a'_n(j)$ hat und daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $b_n > 0$ mit $|u_n| \leq b_n$ auf $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{z_\infty\}$ existiert. Eine Anwendung von Satz 3.46 liefert dann das Gewünschte. □

3.48 Satz. *Sei $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Köthematrix auf einem diskreten Raum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\lambda_\infty(A)$ ist distinguiert.

(b) $\lambda_1(A)$ *ist distinguiert.*

(c) $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *genügt der Bedingung* (D).

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) folgt unmittelbar aus [4] Korollar 5, während [19] Theorem 2.3 die Implikation $(c) \implies (b)$ liefert. $(b) \implies (c)$ ergibt sich aus [10] Theorem 2.6. □

Ein Beispiel ist das Köthe-Grothendieck-Beispiel (siehe dazu z.B. [50]).

3.49 Satz. *Sei die Köthematrix* $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auf* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *durch* $a_n = (a_n(k,j))_{k,j\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$a_n(k,j) := \begin{cases} j^k, & \textit{für } n \leq k \\ j^n, & \textit{für } n > k. \end{cases}$$

gegeben. Dann ist $\lambda_\infty(A)$ *nicht distinguiert.*

3.50 Bemerkung. Der Vollständigkeit halber sei gesagt, daß die Bidualität $HW(G) = HW_0(G)''_{bb}$ für eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, nach [12] Proposition 10 die Distinguiertheit des Raumes $HW_0(G)$ nach sich zieht.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß man mit Hilfe einer Methode von Mattila, Saksman und Taskinen (siehe [54]) zeigen kann, daß unter gewissen Voraussetzungen an die Gewichte gewichtete Fréchetrüume holomorpher und harmonischer Funktionen komplementierte Unterräume von Kötheschen Folgenräumen sind. Dies wird hier allerdings nicht ausgeführt.

4 Quasinormabilität und die Dichtheitsbedingung

4.1 Notationen und Definitionen

Die folgende Konstruktion stammt aus [14]. Sei $\mathcal{W}$ eine Klasse strikt positiver, stetiger und radialer Gewichte v auf dem Einheitskreis $\mathbb{D}$, so daß $\lim_{r\to 1-} v(r) = 0$ erfüllt ist und die Einschränkung von v auf $[0,1)$ nicht wachsend ist. Es sei angenommen, daß endliche Minima und Multiplikation von Funktionen aus der Klasse $\mathcal{W}$ mit Skalaren ebenfalls in $\mathcal{W}$ liegen. Wir nehmen weiter an, daß eine Folge $R_n : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$, $n \in \mathbb{N}$, linearer Operatoren existiert, die stetig bzgl. der kompakt-offenen Topologie sind und derart, daß das Bild jedes R_n ein endlichdimensionaler Unterraum der Polynome ist. Es sei auch angenommen, daß $R_n R_m = R_{\min(n,m)}$ für n, m mit $n \neq m$ gilt und daß für jedes Polynom p ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n p = p$ existiert. Dann folgt $R_m p = p$ für jedes $m \geq n$. Außerdem sei vorausgesetzt, daß es ein $c > 0$ mit $\sup_{|z|=r} |R_n p(z)| \leq c \sup_{|z|=r} |p(z)|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, jedes $r \in (0,1)$ und jedes Polynom p gibt.
Setze schließlich $R_0 := 0$ und $r_n := 1 - 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann sei angenommen, daß die Klasse $\mathcal{W}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(P1) Es gibt $C \geq 1$ mit

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{C} \sup_n \left(\sup_{|z|=r_n} |(R_{n+2} - R_{n-1})p(z)| \right) v(r_n) \leq \|p\|_v \\ \leq\; & C \sup_n \left(\sup_{|z|=r_n} |(R_{n+1} - R_n)p(z)| \right) v(r_n) \end{aligned}$$

für jedes $v \in \mathcal{W}$ und jedes Polynom p.

(P2) Für jedes $v \in \mathcal{W}$ existiert $D(v) \geq 1$, so daß man für jede Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, von denen nur endlich viele ungleich null sind, die Ungleichung

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (R_{n+1} - R_n) p_n(z) \right| v(z) \leq D(v) \sup_k \left(\sup_{|z|=r_k} |p_k(z)| \right) v(r_k)$$

erhält.

Ein Beispiel für die obige Konstruktion findet sich in [14] Abschnitt 4:

Dort bezeichnet für gegebenes $\varepsilon_0 > 0$ und $k(0) \in \mathbb{N}$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\varepsilon_0, k(0))$ die Menge aller strikt positiven, stetigen und radialen Gewichte auf $\mathbb{D}$, die $\lim_{r\to 1-} v(r) = 0$ erfüllen, nicht wachsend auf [0,1) sind und den folgenden Bedingungen genügen:

(L1) $\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{v(r_{k+1})}{v(r_k)} \geq \varepsilon_0$,

(L2) $\limsup_{k\to\infty} \frac{v(r_{k+k(0)})}{v(r_k)} < 1 - \varepsilon_0$.

Wie in [53] S. 310 wird der Operator R_n, $n \in \mathbb{N}$, für eine holomorphe Funktion f auf $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, als Faltung mit dem de la Vallée-Poussin-Kern definiert, d. h.

$$R_n(f) := \sum_{k=0}^{2^n} a_k z^k + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{2^{n+1}-k}{2^n} a_k z^k.$$

Dabei ist R_n nichts anderes als das arithmetische Mittel der Partialsummen der Indizes $2^n, ..., 2^{n+1}-1$ der Taylorreihe von f. Für einen Beweis, daß diese Wahl tatsächlich alle verlangten Eigenschaften hat, siehe [14] Abschnitt 4.

Im folgenden bezeichne $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$, derart daß jedes w_n ein Element von $\mathcal{W}$ ist.
Wie in Kapitel 3 werden nun die gewichteten Fréchetträume holomorpher Funktionen

$$\begin{aligned} HW(\mathbb{D}) &= \{f \in H(\mathbb{D}); \|f\|_n := \sup_{z\in\mathbb{D}} w_n(z)|f(z)| < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}\}, \\ HW_0(\mathbb{D}) &= \{f \in H(\mathbb{D});\ w_n|f| \text{ verschwindet in } \infty \text{ auf } \mathbb{D} \ \forall n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

betrachtet.

Betrachte nun die folgenden Beispiele. Man kann leicht nachrechnen, daß jedes dieser Beispiele alle oben verlangten Eigenschaften hat. Sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

(a) $w_n(z) = (1-|z|)^\alpha e^{(1-|z|)^{\frac{1}{n}}}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{D}$, $\alpha > 0$.
Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und $m > n$. Wegen $\frac{w_n(z)}{w_m(z)} = \frac{e^{(1-|z|)^{\frac{1}{n}}}}{e^{(1-|z|)^{\frac{1}{m}}}} = e^{(1-|z|)^{\frac{1}{n}} - (1-|z|)^{\frac{1}{m}}}$ gilt $\lim_{|z|\to 1} \frac{w_n(z)}{w_m(z)} = e^0 = 1$, d.h. $\frac{w_n}{w_m}$ verschwindet nicht im Unendlichen auf $\mathbb{D}$. Daher ist Bedingung (S') nicht erfüllt.

(b) $w_n(z) = (1-|z|)^{\beta+\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{D}$, $\beta > 0$.
Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ und $m > n$ gilt $\frac{w_n(z)}{w_m(z)} = (1-|z|)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = (1-|z|)^{\frac{m-n}{mn}}$. Daher verschwindet $\frac{w_n}{w_m}$ im Unendlichen auf $\mathbb{D}$, und W hat (S'). Der zugehörige Fréchetraum ist also Schwartz.

(c) $w_n(z) = (1-|z|)^{\delta}|\ln(1-|z|)^n|$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{D}$, $\delta > 0$.
Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und $m > n$. Dann ergibt sich $\frac{w_n(z)}{w_m(z)} = \frac{|\ln(1-|z|)^n|}{|\ln(1-|z|)^m|} = \frac{n}{m}$, und dies verschwindet nicht im Unendlichen auf $\mathbb{D}$. Daher ist (S') in diesem Fall nicht erfüllt.

4.2 Quasinormabilität

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die in Abschnitt 1.3 angegebenen notwendigen Bedingungen für die Quasinormabilität unter den in diesem Kapitel angenommenen Voraussetzungen auch hinreichend (und damit äquivalent zueinander) sind. Desweiteren kann unter gewissen Zusatzvoraussetzungen gezeigt werden, daß Quasinormabilität und (QNo) für $HW_0(G)$ äquivalente Bedingungen sind.

4.1 Lemma. *Seien E ein lokalkonvexer Raum und F ein dichter Unterraum von E. Ist F quasinormabel, so hat auch E diese Eigenschaft.*

Beweis. Fixiere eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$ in F. Dann ist durch

$$\overline{\mathcal{U}} := \{\overline{U};\ U \in \mathcal{U}\}$$

eine Nullumgebungsbasis in E definiert, da nach Voraussetzung F dicht in E liegt.
Weil F quasinormabel ist, gibt es nach [48] Proposition 10.7.1 zu jedem $U \in \mathcal{U}$ ein $V \subset U$, $V \in \mathcal{U}$, so daß für jedes $\lambda > 0$ eine beschränkte Menge $B \subset F$ mit $V \subset B + \lambda U$ existiert. Dann folgt $\overline{V} \subset \overline{B + \lambda U} \subset \overline{B} + \lambda\overline{U}$. Da $\overline{B}$ in E beschränkt ist, ist E quasinormabel. □

Die Umkehrung der Aussage der Proposition 4.1 ist nicht richtig. In [24] Abschnitt 5 (siehe dazu S. 207) konstruierten Bonet und Dierolf, ausgehend von einem klassischen Beispiel von Amemiya (siehe [1]), Beispiele reflexiver quasinormabler Frécheträume mit einem dichten Unterraum, der nicht distinguiert ist, also auch nicht quasinormabel sein kann.

Im folgenden wird Lemma 4.1 ebenso wie die von Bierstedt und Bonet in [14] entwickelte Methode zur Zerlegung holomorpher Funktionen dazu benutzt, eine Charakterisierung der Quasinormabilität des Raumes $HW(\mathbb{D})$ zu geben.

4.2 Satz. *Sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$, so daß die Polynome $\mathcal{P}$ in $HW_0(\mathbb{D})$ enthalten sind. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW_0(\mathbb{D})$ ist quasinormabel.

(b) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$, so daß für jedes $k > n$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\lambda > 0$ mit
$$C_{m,0} \subset \lambda C_{k,0} + \varepsilon C_{n,0} \text{ existiert.}$$

(c) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$, so daß für jedes $k > n$ und jedes $\mu > 0$ ein $\xi > 0$ mit
$$\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \frac{\xi}{w_k} + \frac{\mu}{w_n} \text{ auf } \mathbb{D} \text{ existiert.}$$

(d) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$, so daß für jedes $\alpha > 0$ ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit
$$\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \overline{w} + \frac{\alpha}{w_n} \text{ auf } \mathbb{D} \text{ existiert.}$$

Beweis. (a) $\Longleftrightarrow$ (b): Dies ist [22] Theorem.

(a) $\Longrightarrow$ (d): Dies wurde bereits unter allgemeineren Voraussetzungen gezeigt. Siehe dazu Proposition 3.22.

(d) $\Longrightarrow$ (c): Siehe dazu Proposition 3.23.

(c) $\Longrightarrow$ (b): Wegen [17] liegen die Polynome nach Voraussetzung dicht in $HW_0(\mathbb{D})$. Es sei Aussage (c) erfüllt. Fixiere $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es wegen (c) $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Wähle außerdem $k \in \mathbb{N}$, $k > n$, und $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Setze $\mu := \frac{\varepsilon}{(2c^2+D_2)2C}$, wobei c und C die Konstanten aus Abschnitt 4.1 sind und $D_2 = D(w_n)$ wie in Bedingung $(P2)$ gewählt ist. (c) liefert zu dem so gewählten μ dann ξ. Da $\mathcal{P}$ dicht in $HW_0(\mathbb{D})$ liegt, genügt es wegen Lemma 4.1, die Polynome zu betrachten. Fixiere $p \in \mathcal{P} \cap C_{m,0}$. Dann ist $|p| \leq \frac{1}{w_m}$ und damit auch $|p| \leq \left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim}$ auf $\mathbb{D}$. (c) impliziert daher $\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \frac{\xi}{w_k} + \frac{\mu}{w_n} \leq \max\left(\frac{2\xi}{w_k}, \frac{2\mu}{w_n}\right)$ auf $\mathbb{D}$.
Setze jetzt $u = \min\left(\frac{w_k}{2\xi}, \frac{w_n}{2\mu}\right)$. Gemäß der Voraussetzung an $\mathcal{W}$ ist u ein Element der Klasse $\mathcal{W}$, und es gilt $|p| \leq \left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \max\left(\frac{2\xi}{w_k}, \frac{2\mu}{w_n}\right) = \frac{1}{u}$ und damit $u|p| \leq 1$ auf $\mathbb{D}$.

Zur Vereinfachung der Notation schreibe $\kappa_1 := \frac{1}{2\xi},\ \kappa_2 := \frac{1}{2\mu},\ u_1 := w_k,\ u_2 := w_n$. Also $u = \min(\kappa_1 u_1, \kappa_2 u_2)$.
Man hat $p = \sum_{n=0}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)p = R_1 p + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)p$, und die Summe ist endlich.
Wegen der Bedingung vor (P1) und der Abschätzung von $u|p|$ erhält man

$$u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |R_1 p(z)| \leq c u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |p(z)| \leq c.$$

Wähle jetzt $i \in \{1,2\}$ mit $u(r_1) = \kappa_i u_i(r_1)$. Mit der zweiten Ungleichung in (P1), angewandt auf das Polynom $R_1 p$ und w_i und noch einmal mit der Bedingung vor (P1) schließt man

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|R_1 p(z)| &\leq C \sup_n u_i(r_n) \left(\sup_{|z|=r_n} |(R_{n+1}-R_n)R_1 p(z)| \right) \\
&= C u_i(r_1) \sup_{|z|=r_1} |(R_2 - R_1)R_1 p(z)| \\
&= C(\kappa_i)^{-1} u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |(R_2 - R_1)R_1 p(z)| \\
&\leq 2cC(\kappa_i)^{-1} u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |R_1 p(z)| \\
&\leq 2c^2 C(\kappa_i)^{-1}.
\end{aligned}$$

Also ist $R_1 p \in 2Cc^2(\kappa_i)^{-1} C_{i,0}$, d.h. $R_1 p \in 4Cc^2 \xi C_{k,0}$ bzw. $R_1 p \in 4Cc^2 \mu C_{n,0}$.

Betrachte jetzt den anderen Term $p - R_1 p = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)p$. Wende die erste Ungleichung in (P1) für u an ebenso wie die Abschätzung für $u|p|$, um die Abschätzung

$$u(r_n) \left(\sup_{|z|=r_n} |(R_{n+2} - R_{n-1})p(z)| \right) \leq C \tag{4.1}$$

zu erhalten. $\mathbb{N}$ kann als disjunkte Vereinigung $J_1 \cup J_2$ mit

$$u(r_j) = \kappa_1 u_1(r_j) \text{ für } j \in J_1 \text{ und } u(r_j) = \kappa_2 u_2(r_j) \text{ für } j \in J_2$$

dargestellt werden. Setze jetzt $g_i = \sum_{n\in J_i}(R_{n+1}-R_n)p$ für $i = 1,2$. Dann ist jedes g_i ein Polynom und $p - R_1 p = g_1 + g_2$. Fixiere $i \in \{1,2\}$. Sei $p_n^i := (R_{n+2} - R_{n-1})p$ für $n \in J_i$ und $p_n^i := 0$ sonst. Die Eigenschaften der Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implizieren

$$g_i = \sum_{n\in J_i}(R_{n+1}-R_n)(R_{n+2}-R_{n-1})p = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)p_n^i,$$

und alle Summen sind endlich. Daher ist

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|g_i(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)\left|\sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)p_n^i\right|.$$

Da nur endlich viele p_n^i ungleich null sind und alle Gewichte zur Klasse $\mathcal{W}$ gehören, liefert eine Anwendung von (P2) und (4.1)

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|g_i(z)| &\leq D_i \sup_n \left(\sup_{|z|=r_n}|p_n^i(z)|\right) u_i(r_n)\\
&\leq D_i \sup_{n\in J_i}\left(\sup_{|z|=r_n}|p_n^i(z)|\right) u_i(r_n)\\
&= D_i \sup_{n\in J_i}\left(\sup_{|z|=r_n}|(R_{n+2}-R_{n-1})p(z)|\right) u_i(r_n)\\
&\leq D_i(\kappa_i)^{-1} \sup_{n\in J_i}\left(\sup_{|z|=r_n}|(R_{n+2}-R_{n-1})p(z)|\right) u_i(r_n)\\
&\leq D_i(\kappa_i)^{-1}C.
\end{aligned}$$

Folglich geört g_1 zu $2\xi D_1 C C_{k,0}$ und g_2 zu $2\mu D_1 C C_{n,0}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
p &= R_1 p + g_1 + g_2 \in (2c^2+D_1)2\xi C C_{k,0} + 2D_2\mu C C_{n,0}\\
&\subset (2c^2+D_1)2\xi C C_{k,0} + (2c^2+D_2)2\mu C C_{n,0}\\
&= (2c^2+D_1)2\xi C C_{k,0} + \varepsilon C_{n,0} \quad \text{bzw.}\\
p &= R_1 p + g_1 + g_2 \in 2D_1\xi C C_{k,0} + (2c^2+D_2)2\mu C C_{n,0}\\
&\subset (2c^2+D_1)2\xi C C_{k,0} + \varepsilon C_{n,0}.
\end{aligned}$$

Setze $\lambda := (2c^2+D_1)2\xi C$. Dies impliziert die Behauptung. □

4.3 Korollar. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.2 gegeben. Ferner sei* $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}$ *für jedes* $\overline{w} \in \overline{W}$. *Dann sind die äquivalenten Aussagen* $(a), (b), (c), (d)$ *aus Satz 4.2 genau dann erfüllt, wenn* $HW(\mathbb{D})$ *quasinormabel ist.*

Beweis. Nach Proposition 3.24 ist $HW(\mathbb{D})$ genau dann quasinormabel, wenn $HW_0(\mathbb{D})$ quasinormabel ist. □

4.4 Beispiel. Die Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $w_n(z) = (1-|z|)^{\alpha} e^{(1-|z|)^{\frac{1}{n}}}$,$n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{D}$, erfüllt zwar -wie bereits gezeigt wurde- nicht die Bedingung (S') (vgl. Beispiel (a)), aber sie genügt der Bedingung (d) aus dem obigen Korollar.

Fixiere dazu $n \in \mathbb{N}$ und wähle $m = n + 1$. Für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$, $k > n$, und $\mu > 0$ wähle $\xi = e$. Dann gilt

$$\frac{1}{e^{(1-|z|)^{\frac{1}{n+1}}}} \leq 1 \leq \frac{e}{e^{(1-|z|)^{\frac{1}{k}}}} + \frac{\mu}{e^{(1-|z|)^{\frac{1}{n}}}}.$$

Damit ist (d) erfüllt.

4.5 Beispiel. Betrachte $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $w_n(z) = (1 - |z|)|\ln(1 - |z|)^n|$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{D}$ (vgl. Beispiel (c)). Wähle dazu $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest und setze $m := n + 1$. Fixiere dann $k \in \mathbb{N}$, $k > n$, ebenso wie $\mu > 0$ und wähle $\xi = k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\ln(1-|z|)^{n+1}|} \leq \frac{1}{|\ln(1-|z|)|} &= \frac{1}{|\ln(1-|z|)^{\frac{k}{k}}|} = \frac{1}{\frac{1}{k}|\ln(1-|z|)^{k}|} \\ &\leq \frac{k}{|\ln(1-|z|)^{k}|} + \frac{\mu}{|\ln(1-|z|)^{n}|} \end{aligned}$$

Das folgende Lemma stammt aus [61] und ist dort unter Proposition 3.3.(5) zu finden:

4.6 Lemma. (Peris) *Falls E ein lokal vollständiger lokalkonvexer Raum und F ein dichter Unterraum von E ist, der (QNo) ist, so ist auch E (QNo).*

Im folgenden wird mit Hilfe der Methode, die bereits zum Beweis des vorhergehenden Satzes verwandt wurde, gezeigt, daß unter gewissen Zusatzvoraussetzungen die Eigenschaften (QNo) und quasinormabel äquivalent sind. Letztendlich ermöglicht es diese Äquivalenz, dann eine Aussage für die Quasinormabilität von Räumen $HW_0(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ zu beweisen.

4.7 Proposition. *Sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$, so daß die Polynome $\mathcal{P}$ in $HW_0(\mathbb{D})$ liegen und $\overline{V} := \{\frac{1}{\overline{w}};\ \overline{w} \in \overline{W}\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{W}$ ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $HW_0(\mathbb{D})$ ist quasinormabel.

(b) $HW_0(\mathbb{D})$ ist (QNo).

Beweis. $(b) \Longrightarrow (a)$: Dies folgt aus der Definition (siehe dazu auch [61] Bemerkungen nach Definition 3.2).

$(a) \Longrightarrow (b)$: Gemäß [17] liegen die Polynome dicht in $HW_0(\mathbb{D})$. Nach Proposition 4.2 folgt aus (a) die Bedingung:
$(*)$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$, so daß für jedes $\lambda > 0$ ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit

$$\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \overline{w} + \frac{\lambda}{w_n} \text{ auf } \mathbb{D}$$

existiert. Fixiere also zunächst $n \in \mathbb{N}$. Dann liefert $(*)$ ein $m > n$. Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Setze $\lambda := \frac{\varepsilon}{(2c^2+D_2)2C}$, wobei $D_2 = D(w_n)$ ist, und erhalte gemäß $(*)$ ein $\overline{w} \in \overline{W}$. Da $\mathcal{P}$ dicht in $HW_0(\mathbb{D})$ liegt, genügt es nach Lemma 4.6, die Polynome zu betrachten. Fixiere $p \in \mathcal{P} \cap C_{m,0}$. Dann ist $|p| \leq \frac{1}{w_m}$ und damit auch $|p| \leq \left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim}$ auf $\mathbb{D}$. $(*)$ impliziert daher $\left(\frac{1}{w_m}\right)^{\sim} \leq \overline{w} + \frac{\lambda}{w_n} \leq \max\left(2\overline{w}, \frac{2\lambda}{w_n}\right)$ auf $\mathbb{D}$.
Setze $u := \min\left(\frac{1}{2\overline{w}}, \frac{w_n}{2\lambda}\right)$. Gemäß Voraussetzung ist u ein Element der Klasse $\mathcal{W}$, und es gilt $u|p| \leq 1$ auf $\mathbb{D}$. Zur Vereinfachung der Notation schreibe $\kappa_1 := \frac{1}{2}$, $\kappa_2 := \frac{1}{2\lambda}$, $u_1 := \frac{1}{\overline{w}}$, $u_2 := w_n$. Also $u := \min(\kappa_1 u_1, \kappa_2 u_2)$.
Man hat $p = \sum_{n=0}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p = R_1 p + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p$, und die Summe ist endlich.
Betrachte zunächst den Term $R_1 p$. Wegen der Bedingung vor $(P1)$ und der Abschätzung von $u|p|$ erhält man

$$u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |R_1 p(z)| \leq c u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |p(z)| \leq c.$$

Wähle jetzt $i \in \{1, 2\}$ mit $u(r_1) = \kappa_i u_i(r_1)$. Mit der zweiten Ungleichung in $(P1)$, angewandt auf das Polynom $R_1 p$ und u_i, und noch einmal mit der Bedingung vor $(P1)$ schließt man wie zuvor

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} u_i(z)|R_1 p(z)| \leq 2c^2 C(\kappa_i)^{-1}.$$

Demnach ist $R_1 p \in 4c^2 C C_{\overline{w},0}$ oder $R_1 p \in 4c^2 C \lambda C_{n,0}$.

Betrachte jetzt den anderen Term $p - R_1 p = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p$. Wende die erste Ungleichung in $(P1)$ für u an ebenso wie die Abschätzung für $u|p|$, um

$$u(r_n)\left(\sup_{|z|=r_n} |(R_{n+2} - R_{n-1})p(z)|\right) \leq C \tag{4.2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu erhalten. $\mathbb{N}$ kann als disjunkte Vereinigung $J_1 \cup J_2$ mit

$$u(r_j) = \kappa_1 u_1(r_j) \text{ für } j \in J_1 \text{ und } u(r_j) = \kappa_2 u_2(r_j) \text{ für } j \in J_2$$

dargestellt werden. Setze jetzt $T_i p := \sum_{n\in J_i}(R_{n+1}-R_n)p$ für $i \in \{1,2\}$. Dann ist jedes $T_i p$ ein Polynom mit $p - R_1 p = T_1 p + T_2 p$. Fixiere $i \in \{1,2\}$. Sei $p_n^i := (R_{n+2} - R_{n-1})p$ für $n \in J_i$ und $p_n^i := 0$ sonst. Die Eigenschaften der Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implizieren

$$T_i p = \sum_{n\in J_i}(R_{n+1} - R_n)(R_{n+2} - R_{n-1})p = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p_n^i,$$

und alle Summen sind endlich. Daher ist

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|T_i p(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)\left|\sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p_n^i\right|.$$

Da nur endlich viele p_n^i ungleich null sind, und alle Gewichte zur Klasse $\mathcal{W}$ gehören, liefert eine Anwendung von (4.5) und (P2) wie zuvor

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|T_i p(z)| &\leq D_i \sup_n \left(\sup_{|z|=r_n} |p_n^i(z)|\right) u_i(r_n)\\ &\leq D_i(\kappa_i)^{-1}C.\end{aligned}$$

Folglich ist $T_1 p$ Element von $2D_1 C_{\overline{w},0}$, während $T_2 p$ zu $2\lambda C C_{n,0}$ gehört. Also folgt

$$\begin{aligned} p &\in (2c^2 + D_1)2CC_{\overline{w},0} + 2D_2 C\lambda C_{n,0} \quad \text{oder}\\ p &\in 2D_1 CC_{\overline{w},0} + (2c^2 + D_2)2\lambda CC_{n,0}\end{aligned}$$

Führe nun eine Fallunterscheidung durch:

<u>1. Fall:</u> Es gilt $u(r_1) = \kappa_1 u_1(r_1)$. Definiere dann $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ durch $T(p) = R_1 p + T_1 p$. Dann gilt wegen obiger Rechnungen

$$\begin{aligned} T(C_{m,0}\cap\mathcal{P}) &\subset (2c^2 + D_1)2C(C_{\overline{w},0}\cap\mathcal{P}) \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \quad \text{und}\\ (\mathrm{Id} - T)(C_{m,0}\cap\mathcal{P}) &\subset 2D_2 C\lambda(C_{n,0}\cap\mathcal{P}) \subset \varepsilon(C_{n,0}\cap\mathcal{P}).\end{aligned}$$

<u>2. Fall:</u> Man hat $u(r_1) = \kappa_2 u_2(r_1)$. Definiere dann $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ durch $T(p) = T_1 p$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} T(C_{m,0}\cap\mathcal{P}) &\subset 2D_1 C(C_{\overline{w},0}\cap\mathcal{P}) \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \quad \text{und}\\ (\mathrm{Id} - T)(C_{m,0}\cap\mathcal{P}) &\subset (2c^2 + D_2)2C\lambda(C_{n,0}\cap\mathcal{P}) \subset \varepsilon(C_{n,0}\cap\mathcal{P}).\end{aligned}$$

Folglich ist $\mathcal{P}$ und damit auch $HW_0(\mathbb{D})$ (QNo). □

Zunächst wird mit Hilfe des folgenden Lemmas die Frage beantwortet, wann die „Zusatzvoraussetzung“ des vorhergehenden Satzes erfüllt ist.

4.8 Lemma. *Sei $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge strikt positiver, stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$. Ferner gebe es Zahlen $\varepsilon_0 > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(L1) $\inf_k \frac{w_n(r_{k+1})}{w_n(r_k)} \geq \varepsilon_0$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

($\overline{L2}$) Es gibt $k_1 \in \mathbb{N}$ *mit*

$$w_n(r_{k+k_0}) < (1-\varepsilon_0)w_n(r_k)$$

für jedes $k \geq k_1$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}$.

Dann existiert zu jedem $\overline{v} \in \overline{W}$ ein $\overline{w} \in \overline{W}$ mit $\overline{v} \leq \overline{w}$ und der folgenden Eigenschaft:
Es gibt eine Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen, so daß für jedes $r > 0$ ein $k(r) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)(z) = \frac{1}{\min_{1\leq n\leq k(r)} \frac{\beta_n}{w_n(z)}} = \max_{1\leq n\leq k(r)} \frac{1}{\beta_n} w_n(z) \tag{4.3}$$

für jedes $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| \leq r$ existiert. Ferner gibt es $\varepsilon_2 > 0$ und $k_2 \in \mathbb{N}$ mit

(L1) $\inf_k \frac{\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)(r_{k+1})}{\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)(r_k)} \geq \varepsilon_2$.

(L2) $\limsup_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)(r_{k+k_2})}{\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)(r_k)} < 1 - \varepsilon_2$.

Dies bedeutet also, daß für eine Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(L1)$ und $(\overline{L2})$ auch $\overline{W} \subset \mathcal{W}$ gilt.

Beweis. Fixiere $\overline{v} \in \overline{W}$ mit $\overline{v} \leq \overline{w}$ und (4.3). Zeige nun, daß $\frac{1}{\overline{w}}$ die Eigenschaften $(L1)$ und $(L2)$ hat. Wähle $\varepsilon_2 := \varepsilon_0$ und $k_2 := k_0$. Um $(L1)$ zu zeigen, wähle $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest und beweise

$$\varepsilon_2 \left(\frac{1}{\overline{w}}\right)(r_k) \leq \left(\frac{1}{\overline{w}}\right)(r_{k+1}).$$

Wähle nun $0 < r_{k+1} < s < 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{\overline{w}(z)} = \max_{1\leq n\leq k(s)} \frac{1}{\beta_n} w_k(z) \text{ für } z \in \mathbb{D} \text{ mit } |z| \leq s.$$

Führe eine Fallunterscheidung durch:

(i) Es gelte $\left(\frac{1}{w}\right)(r_k) = \frac{1}{\beta_j} w_j(r_k)$ und $\left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+1}) = \frac{1}{\beta_j} w_j(r_{k+1})$. Dann erhält man $\varepsilon_2 \left(\frac{1}{w}\right)(r_k) = \frac{\varepsilon_2}{\beta_j} w_j(r_k) \leq \frac{1}{\beta_j} w_j(r_{k+1}) = \left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+1})$.

(ii) Man habe $\left(\frac{1}{w}\right)(r_k) = \frac{1}{\beta_j} w_j(r_k)$ und $\left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+1}) = \frac{1}{\beta_l} w_l(r_{k+1})$.
Es folgt $\varepsilon_2 \left(\frac{1}{w}\right)(r_k) = \frac{\varepsilon_2}{\beta_j} w_j(r_k) \leq \frac{1}{\beta_j} w_j(r_{k+1}) \leq \frac{1}{\beta_l} w_l(r_{k+1}) = \left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+1})$.

Damit ist $\inf_k \frac{\left(\frac{1}{w}\right)(r_k)}{\left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+k_1})} \geq \varepsilon_2$, so daß $(L1)$ erfüllt ist. Es bleibt $(L2)$ zu zeigen. Dazu ist zu beweisen, daß es $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für jedes $k \geq N_0$ die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+k_2}) < (1-\varepsilon_0)\left(\frac{1}{w}\right)(r_k)$$

erfüllt ist. Nach Voraussetzung existiert $k_1 \in \mathbb{N}$, so daß für jedes $k \geq k_1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$w_n(r_{k+k_2}) < (1-\varepsilon_2) w_n(r_k)$$

gilt. Fixiere nun $k \geq k_1$ und wähle $0 < k + k_2 < s < 1$. Dann gilt

$$\left(\frac{1}{w}\right)(z) = \max_{1 \leq n \leq k(s)} \frac{1}{\beta_n} w_n(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| \leq s$.
Setze jetzt $N_0 := k_1$ und unterscheide die folgenden beiden Fälle:

(i) Man habe $\left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+k_2}) = \frac{1}{\beta_j} w_j(r_{k+k_2})$ und $\left(\frac{1}{w}\right)(r_k) = \frac{1}{\beta_j} w_j(r_k)$. Dies impliziert $\left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+k_2}) = \frac{1}{\beta_j} w_j(r_{k+k_2}) \leq (1-\varepsilon_2)\frac{1}{\beta_j} w_j(r_k) = (1-\varepsilon_2)\left(\frac{1}{w}\right)(r_k)$.

(ii) Es gelte $\left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+k_2})$ und $\left(\frac{1}{w}\right)(r_k) = \frac{1}{\beta_l} w_l(r_k)$. Dann folgt $\left(\frac{1}{w}\right)(r_{k+k_2}) = \frac{1}{\beta_j} w_j(r_{k+k_2}) \leq (1-\varepsilon_2)\frac{1}{\beta_j} w_j(r_k) \leq (1-\varepsilon_2)\frac{1}{\beta_l} w_l(r_k) = (1-\varepsilon_2)\left(\frac{1}{w}\right)(r_k)$.

Daher ist Bedingung (L2) erfüllt. Es folgt die Behauptung. □

4.9 Beispiel. Betrachte die Folge $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$w_n(z) := (1-|z|)|\ln(1-|z|)^n|, \; z \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}.$$

Wähle $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ und $k_0 = 4$. Dann gelten

$$\frac{w_n(r_{k+1})}{w_n(r_k)} = \frac{2^{-k-1}\ln(2^{-n(k+1)})}{2^{-k}\ln(2^{-nk})} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k} \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$$

und

$$\frac{w_n(r_{k+4})}{w_n(r_k)} = \frac{2^{-k-4}\ln(2^{-n(k+4)})}{2^{-k}\ln(2^{-nk})} = \frac{1}{2^4}\frac{k+4}{k} \leq \frac{5}{16} < \frac{3}{4}.$$

Damit sind (L1) und $(\overline{L2})$ erfüllt.

4.10 Definition. Seien $U > 0$ und $V > 0$ Nachbin-Familien auf den vollständig regulären Räumen X_1 bzw. X_2. Bezeichne mit $u \otimes v$ für $u \in U$ und $v \in V$ die Funktion $(x_1, x_2) \to u(x_1)v(x_2)$ auf dem topologischen Produkt $X_1 \times X_2$ und

$$W := U \otimes V = \{u \otimes v;\ u \in U, v \in V\}.$$

Dann ist W ebenfalls eine Nachbin-Familie auf $X_1 \times X_2$ mit $W > 0$.

4.11 Definition. Sei X ein vollständig regulärer Hausdorffraum. Dann setze

$$W(X) := \{\lambda \chi_K;\ \lambda > 0, K \text{ kompakt in } X\}.$$

Der folgende Satz stammt aus [6] (siehe dort Satz 3.5.(1)).

4.12 Satz. *(*Bierstedt*) Seien $X_1 \subset \mathbb{C}^n$ und $X_2 \subset \mathbb{C}^m$ offen $(n, m \geq 1)$, U bzw. V Nachbin-Familien auf X_1 bzw. X_2 mit $W(X_1) \leq U$ und $W(X_2) \leq V$. Mit $W = U \otimes V$ gilt dann*

$$HW_0(X_1 \times X_2) = HU_0(X_1) \,\tilde{\otimes}_\varepsilon\, HV_0(X_2),$$

falls $HU_0(X_1)$ oder $HV_0(X_2)$ die Approximationseigenschaft hat.

4.13 Korollar. *Seien $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ und $V = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ wachsende Folgen strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$, derart daß die Polynome in $HU_0(\mathbb{D})$ bzw. $HV_0(\mathbb{D})$ liegen. Dann gilt*

$$HW_0(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) = HU_0(\mathbb{D}) \,\tilde{\otimes}_\varepsilon\, HV_0(\mathbb{D}).$$

Beweis. Nach [17] Theorem 1.5 haben $HU_0(\mathbb{D})$ und $HV_0(\mathbb{D})$ unter den gegebenen Voraussetzungen die beschränkte Approximationseigenschaft. Eine Anwendung von Satz 4.12 liefert dann das Gewünschte. □

Die folgenden Aussagen stammen aus [61] und sind dort unter Proposition 3.3.(1) und 3.4.(1) zu finden.

4.14 Proposition. *(*Peris [61]*)*

(i) Die komplementierten Unterräume eines lokalkonvexen Raumes E mit (QNo) sind ebenfalls (QNo).

(ii) Sei α eine Tensornorm. Falls die lokalkonvexen Räume E und F (QNo) sind, so ist auch $E \otimes_\alpha F$ (QNo).

4.15 Korollar. *Seien $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ und $V = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ wachsende Folgen strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$, so daß die Polynome in $HU_0(\mathbb{D})$ und $HV_0(\mathbb{D})$ liegen. $HU_0(\mathbb{D})$ und $HV_0(\mathbb{D})$ sind genau dann (QNo), wenn $HW_0(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) = HU_0(\mathbb{D}) \,\tilde{\otimes}_\varepsilon\, HV_0(\mathbb{D})$ (QNo) ist.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 4.14. □

4.3 Dichtheitsbedingung

Hier wird gezeigt, daß die in Abschnitt 3.3 angegebenen notwendigen Bedingungen auch hinreichend (und damit äquivalent) sind. Ferner wird bewiesen, daß unter bestimmten Voraussetzungen Dichtheitsbedingung und (Dco) äquivalente Eigenschaften für $HW_0(\mathbb{D})$ sind.

4.16 Lemma. *Seien E ein lokalkonvexer Raum und F ein dichter Unterraum von E. Hat F die Dichtheitsbedingung, so genügt E ebenfalls der Dichtheitsbedingung.*

Beweis. Fixiere eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$ in F. Dann ist durch $\overline{\mathcal{U}} := \{\overline{U};\ U \in \mathcal{U}\}$ eine Nullumgebungsbasis in E definiert, da nach Voraussetzung F dicht in E liegt.
Weil F die Dichtheitsbedingung hat, gibt es für jede Funktion $\lambda : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ und für jedes $V \in \mathcal{U}$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{U}_0$ von $\overline{\mathcal{U}}$ und eine beschränkte absolutkonvexe und o.B.d.A. abgeschlossene Teilmenge B von F mit $\bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} \lambda(U)U \subset B + \frac{1}{2}V$.
Dann folgt $\overline{\bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} \lambda(U)U} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} \lambda(U)\overline{U} \subset \overline{B + \frac{1}{2}V} \subset \overline{B} + V$. Da $\overline{B}$ in E beschränkt ist, erfüllt E die Dichtheitsbedingung. □

Die Umkehrung der Aussage der vorangehenden Proposition ist nicht richtig. Die von Bonet und Dierolf in [24] konstruierten Beispiele decken auch diesen Fall ab.
Mit Hilfe des Lemmas und der von Bierstedt und Bonet in [14] entwickelten Methode zur Zerlegung holomorpher Funktionen wird im folgenden eine Charakterisierung der Dichtheitsbedingung in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten für $HW_0(\mathbb{D})$ gegeben. Zunachst werden jedoch einige Hilfsaussagen benötigt.

4.17 Proposition. *(*Peris [60] Proposition 1*) Seien E ein Fréchetraum und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Fundamentalfolge von Nullumgebungen in E. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) E hat die Dichtheitsbedingung.

(b) Für jede Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m(n) > n$ und eine Folge $(\lambda_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen mit

$$\bigcap_{k=1}^{m(n)} \lambda_k U_k \subset \bigcap_{k=1}^{s} \lambda_k^{(n)} U_k + U_n \text{ für jedes } s \in \mathbb{N}.$$

4.18 Lemma. *Betrachte zunächst die folgende Bedingung:*
$(*)$ *zu jeder Folge* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver Zahlen und zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *existieren* $m(n) > n$ *und eine Folge* $(\xi_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver Zahlen mit*

$$\bigcap_{k=1}^{m(n)} \xi_k C_{k,0} \subset \bigcap_{k=1}^{s} \xi_k^{(n)} C_{k,0} + (2c^2 + D_2)2CC_{n,0} \text{ für jedes } s \in \mathbb{N}.$$

Dabei seien c *die Konstante aus der Ungleichung vor* $(P1)$, C *die Konstante aus* $(P1)$ *und* $D_2 = D(w_n)$ *wie in* $(P2)$.
Falls $(*)$ *erfüllt ist, hat* $HW_0(\mathbb{D})$ *die Dichtheitsbedingung.*

Beweis. Fixiere dazu eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen ebenso wie $n \in \mathbb{N}$. Setze $\xi_k := (2c^2+D_2)2C\lambda_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann liefert $(*)$ $m(n) > n$ und eine Folge $(\xi_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen mit

$$\begin{aligned}
\bigcap_{k=1}^{m(n)} (2c^2 + D_2)2C\lambda_k C_{k,0} &= \bigcap_{k=1}^{m(n)} \xi_k C_{k,0} \\
&\subset \bigcap_{k=1}^{s} \xi_k^{(n)} C_{k,0} + (2c^2 + D_2)2CC_{n,0} \\
&\subset \bigcap_{k=1}^{s} (2c^2 + D_2)2C\xi_k^{(n)} C_{k,0} + (2c^2 + D_2)2CC_{n,0}
\end{aligned}$$

für jedes $s \in \mathbb{N}$ wegen $(2c^2 + D_2)2C \geq 1$. Setze $\lambda_k^{(n)} := \xi_k^{(n)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Weil $((2c^2 + D_2)2CC_{k,0})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullumgebungsbasis in $HW_0(\mathbb{D})$ ist, liefert Proposition 4.17 das Gewünschte. □

O.B.d.A. kann im Folgenden angenommen werden, daß endliche Maxima von Elementen aus $\mathcal{W}$ ebenfalls zu $\mathcal{W}$ gehören.

4.19 Satz. *Sei* $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ *eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf* $\mathbb{D}$, *so daß die Polynome in* $HW_0(\mathbb{D})$ *liegen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $HW_0(\mathbb{D})$ *hat die Dichtheitsbedingung.*

(b) Zu jeder Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver Zahlen und zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es* $m(n) > n$ *und eine Folge* $(\lambda_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver Zahlen mit*

$$\bigcap_{k=1}^{m(n)} \lambda_k C_{k,0} \subset \bigcap_{k=1}^{s} \lambda_k^{(n)} C_{k,0} + C_{n,0} \text{ für jedes } s \in \mathbb{N}.$$

(c) *Für jede Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\mu_k > 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m(n) > n$ und eine Folge $(\mu_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen mit*

$$\left(\min_{1\le k\le m(n)} \frac{\mu_k}{w_k}\right)^{\sim} \le \min_{1\le k\le s} \frac{\mu_k^{(n)}}{w_k} + \frac{1}{w_n} \text{ auf } \mathbb{D} \text{ für jedes } s \in \mathbb{N}.$$

(d) *Zu jeder Folge $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und $\overline{w} \in \overline{W}$ mit*

$$\left(\min_{1\le k\le m} \frac{\xi_k}{w_k}\right)^{\sim} \le \overline{w} + \frac{1}{w_n} \text{ auf } \mathbb{D}.$$

Beweis. (a) $\Longleftrightarrow$ (b): Dies ist Proposition 4.17.

(a) $\Longrightarrow$ (d): Siehe dazu Proposition 3.26.

(d) $\Longrightarrow$ (c): Dies ist Proposition 3.27.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Gemäß [17] liegen die Polynome dicht in $HW_0(\mathbb{D})$. Wegen Lemma 4.18 genügt es zu zeigen, daß (c) die Aussage ($*$) dort impliziert.

Es sei Aussage (c) erfüllt. Wähle dazu eine beliebige, aber feste Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und setze $\mu_k := \lambda_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Fixiere jetzt gemäß (c) n, $m(n)$, $(\mu_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und s. Da $\mathcal{P}$ dicht in $HW_0(\mathbb{D})$ liegt, genügt es, die Polynome zu betrachten. Wähle also ein beliebiges, aber festes, $p \in \mathcal{P} \bigcap \left(\cap_{k=1}^{m(n)} \mu_k C_{k,0}\right)$.
Dann ist $|p| \le \min_{1\le k\le m(n)} \frac{\mu_k}{w_k}$ und damit auch
$|p| \le (\min_{1\le k\le m(n)} \frac{\mu_k}{w_k})^{\sim}$ auf $\mathbb{D}$. (c) liefert
$\left(\min_{1\le k\le m(n)} \frac{\mu_k}{w_k}\right)^{\sim} \le \min_{1\le k\le s} \frac{\mu_k^{(n)}}{w_k} + \frac{1}{w_n} \le \max\left(\min_{1\le k\le s} \frac{2\mu_k^{(n)}}{w_k}, \frac{2}{w_n}\right)$ auf $\mathbb{D}$.
Setze jetzt $u := \min\left(\max_{1\le k\le s} \frac{w_k}{2\mu_k^{(n)}}, \frac{w_n}{2}\right)$. Gemäß Definition ist u Element der Klasse $\mathcal{W}$, und es gilt
$|p| \le \min_{1\le k\le m(n)} \frac{\mu_k}{w_k})^{\sim} \le \max\left(\min_{1\le k\le s} \frac{2\mu_k^{(n)}}{w_k}, \frac{2}{w_n}\right) = \frac{1}{u}$ und damit $u|p| \le 1$ auf $\mathbb{D}$.
Zur Vereinfachung der Notation schreibe $u_1 := \max_{1\le k\le s} \frac{w_k}{\mu_k^{(n)}}$, $u_2 := w_n$, $\kappa_1 := \frac{1}{2}$ und $\kappa_2 := \frac{1}{2}$. Also $u = \min(\kappa_1 u_1, \kappa_2 u_2)$.
Man hat $p = \sum_{n=0}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p = R_1 p + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p$, und die Summe ist endlich.

Betrachte zunächst den Term R_1p. Wegen der Bedingung vor (P1) und der Abschätzung von $u|p|$ erhält man

$$u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |R_1p(z)| \leq cu(r_1) \sup_{|z|=r_1} |p(z)| \leq c.$$

Wähle jetzt $i \in \{1,2\}$ mit $u(r_1) = \kappa_i u_i(r_1)$. Mit der zweiten Ungleichung in (P1), angewandt auf das Polynom R_1p und u_i und noch einmal mit der Bedingung vor (P1) schließt man wie zuvor

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|R_1p(z)| \leq 2c^2C(\kappa_i)^{-1}.$$

Demnach ist $R_1p \in 4Cc^2 \bigcap_{k=1}^s \mu_k^{(n)} C_{k,0}$ bzw. $R_1p \in 4c^2CC_{n,0}$.

Betrachte jetzt den anderen Term $p - R_1p = \sum_{n=1}^\infty (R_{n+1} - R_n)p$. Wende die erste Ungleichung in (P1) für u an ebenso wie die Abschätzung für $u|p|$, um Folgendes zu erhalten:

$$u(r_n)\left(\sup_{|z|=r_n} |(R_{n+2} - R_{n-1})p(z)|\right) \leq C. \tag{4.4}$$

$\mathbb{N}$ kann als disjunkte Vereinigung $J_1 \cup J_2$ mit

$$u(r_j) = \kappa_1 u_1(r_j) \text{ für } j \in J_1 \text{ und } u(r_j) = \kappa_2 u_2(r_j) \text{ für } j \in J_2$$

dargestellt werden. Setze jetzt $g_i := \sum_{n\in J_i}(R_{n+1} - R_n)p$ für $i = 1, 2$. Dann ist jedes g_i ein Polynom und $p - R_1p = g_1 + g_2$. Fixiere $i \in \{1,2\}$. Sei $p_n^i := (R_{n+2} - R_{n-1})p$ für $n \in J_i$ und $p_n^i := 0$ sonst. Die Eigenschaften der Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implizieren

$$g_i = \sum_{n\in J_i}(R_{n+1} - R_n)(R_{n+2} - R_{n-1})p = \sum_{n=1}^\infty (R_{n+1} - R_n)p_n^i,$$

und alle Summen sind endlich. Daher ist

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|g_i(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)\left|\sum_{n=1}^\infty (R_{n+1} - R_n)p_n^i\right|.$$

Da nur endlich viele p_n^i ungleich null sind und alle Gewichte zur Klasse $\mathcal{W}$ gehören, liefert eine Anwendung von (P2) und (4.4) wie zuvor

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|g_i(z)| \quad \leq \quad D_i \sup_n \left(\sup_{|z|=r_n} |p_n^i(z)|\right) u_i(r_n) \leq D_i(\kappa_i)^{-1}C.$$

Also ist g_1 Element von $2D_1C \cap_{k=1}^s \mu_k^{(n)} C_{k,0}$, während g_2 zu $2D_2CC_{\overline{w},0}$ gehört. Zusammen mit den vorigen Ergebnissen liefert dies

$$\begin{array}{rcl} p = R_1p + g_1 + g_2 & \in & (4c^2C + 2D_1C) \cap_{k=1}^s \mu_k^{(n)} C_{k,0} + 2D_2CC_{n,0} \\ & \subset & \cap_{k=1}^s (4c^2C + 2D_1C)\mu_k^{(n)} C_{k,0} + 2C(2c^2 + D_2)C_{n,0} \\ \text{oder} & & \\ p = R_1p + g_1 + g_2 & \in & 2D_1C \cap_{k=1}^s \mu_k^{(n)} C_{k,0} + (4c^2C + 2D_2C)C_{n,0} \\ & = & \cap_{k=1}^s 2D_1C\mu_k^{(n)} C_{k,0} + (4c^2C + 2D_2C)C_{n,0} \end{array}$$

Setze jetzt $\lambda_k^{(n)} := (4c^2C + 2D_1C)\mu_k^{(n)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Behauptung.

□

4.20 Korollar. *Es gelte $C_{\overline{w}} = \overline{C_{\overline{w},0}}^{co}$ für jedes $\overline{w} \in \overline{W}$. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.19 sind die äquivalenten Aussagen $(a), (b), (c), (d)$ aus Satz 4.19 genau dann erfüllt, wenn $HW(\mathbb{D})$ die Dichtheitsbedingung hat.*

Beweis. Proposition 3.29 liefert, daß $HW(\mathbb{D})$ genau dann die Dichtheitsbedingung, wenn $HW_0(\mathbb{D})$ sie erfüllt. □

4.21 Bemerkung. Sei F ein metrisierbarer Raum und $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis absolutkonvexer Nullumgebungen in F. Heinrichs zeigte in [43], daß die folgende Bedingung äquivalent zur von Peris und Rivera in [62] eingeführten Bedingung (DCO) ist.

(DCo) Zu jeder Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ und einen beschränkten Operator $T \in L(F)$ mit

$$(\mathrm{Id} - T)\left(\bigcap_{k=1}^{m} \lambda_k U_k\right) \subset U_n.$$

Aus den Vererbungseigenschaften der Dichtheitsbedingung folgt das folgende Lemma.

4.22 Lemma. *(*Peris*) Falls E ein separabler Fréchetraum mit einem dichten Unterraum F ist, der (DCo) genügt, so hat E ebenfalls (DCo).*

Mit Hilfe derselben Beweismethode wie in Satz 4.19 kann nun unter Zusatzvoraussetzungen die Äquivalenz von Dichtheitsbedingung und (DCo) für $HW_0(\mathbb{D})$ gezeigt werden.

4.23 Lemma. *Betrachte die folgende Bedingung:*
$(**)$ *zu jeder Folge* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *strikt positiver Zahlen und zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *existieren* $m \in \mathbb{N}$ *und ein beschränktes* $T \in L(HW_0(\mathbb{D}))$*, so daß*

$$(Id - T)\left(\cap_{k=1}^m \xi_k C_{k,0}\right) \subset (2c^2 + D_2)2CC_{n,0}.$$

Dabei sind c *die Konstante aus der Ungleichung vor* $(P1)$*,* C *die Konstante aus* $(P1)$ *und* $D_2 = D(w_n)$ *wie in* $(P2)$*. Falls* $(**)$ *erfüllt ist, so hat* $HW_0(\mathbb{D})$ (DCo)*.*

Beweis. Fixiere eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen ebenso wie $n \in \mathbb{N}$. Setze $\xi_k := (2c^2 + D_2)2C\lambda_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann liefert $(**)$ ein $m \in \mathbb{N}$ und ein beschränktes $T \in L(HW_0(\mathbb{D}))$ mit

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} - T)\left(\cap_{k=1}^m \xi_k C_{k,0}\right) &= (\mathrm{Id} - T)\left(\cap_{k=1}^m (2c^2 + D_2)2C\lambda_k C_{k,0}\right)\\ &\subset (2c^2 + D_2)2CC_{n,0}.\end{aligned}$$

Da $((2c^2 + D_2)2CC_{k,0})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullumgebungsbasis in $HW_0(\mathbb{D})$ ist, folgt das Gewünschte. □

4.24 Proposition. *Sei* $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ *eine wachsende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf* $\mathbb{D}$*, so daß die Polynome* $\mathcal{P}$ *in* $HW_0(\mathbb{D})$ *liegen und* $\overline{V} := \left\{\frac{1}{\overline{w}}; \overline{w} \in \overline{W}\right\}$ *eine Teilmenge von* $\mathcal{W}$ *ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $HW_0(\mathbb{D})$ *hat die Dichtheitsbedingung.*

(b) $HW_0(\mathbb{D})$ *genügt* (DCo)*.*

Beweis. $(b) \Longrightarrow (a)$: Dies folgt aus der Definition (siehe auch [62] Bemerkung nach Definition 8).

$(a) \Longrightarrow (b)$: Nach [17] liegen die Polynome unter den gegebenen Voraussetzungen dicht in $HW_0(\mathbb{D})$.

Sei nun also angenommen, daß $HW_0(\mathbb{D})$ die Dichtheitsbedingung erfüllt. Es ist zu zeigen, daß Bedingung $(**)$ aus Lemma 4.23 erfüllt ist. Nach Proposition 3.26 gilt:
$(***)$ zu jeder Folge $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren $m \in \mathbb{N}$ und $\overline{w} \in \overline{W}$ mit

$$\min_{1\le k\le m} \frac{\xi_k}{w_k} \le \overline{w} + \frac{1}{w_n} \text{ auf } \mathbb{D}.$$

Fixiere also $n \in \mathbb{N}$ ebenso wie $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann liefert $(***)$ ein $m > n$ und ein $\overline{w} \in \overline{W}$. Da $\mathcal{P}$ dicht in $HW_0(\mathbb{D})$ liegt, genügt es nach Lemma 4.22, die

Polynome zu betrachten.
Fixiere $p \in \mathcal{P} \bigcap (\cap_{k=1}^m \xi_k C_{k,0})$. Dann ist $|p| \leq \min_{1\leq k\leq m} \frac{\xi_k}{w_k}$ und damit auch $|p| \leq (\min_{1\leq k\leq m} \frac{\xi_k}{w_k})^{\sim}$ auf $\mathbb{D}$. $(***)$ impliziert
$\left(\min_{1\leq k\leq m} \frac{\xi_k}{w_k}\right)^{\sim} \leq \overline{w} + \frac{1}{w_n} \leq \max\left(2\overline{w}, \frac{2}{w_n}\right)$ auf $\mathbb{D}$.
Setze $u := \min\left(\frac{1}{2\overline{w}}, \frac{w_n}{2}\right)$. Gemäß Voraussetzung ist u ein Element der Klasse $\mathcal{W}$, und es gilt $u|p| \leq 1$ auf $\mathbb{D}$. Zur Vereinfachung der Notation schreibe $\kappa_1 := \frac{1}{2}$, $\kappa_2 := \frac{1}{2}$, $u_1 := \frac{1}{\overline{w}}$, $u_2 := w_n$. Also $u = \min(\kappa_1 u_1, \kappa_2 u_2)$.
Man hat $p = \sum_{n=0}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p = R_1 p + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p$, und die Summe ist endlich.
Betrachte zunächst den Term $R_1 p$. Wegen der Bedingung vor $(P1)$ und der Abschätzung von $u|p|$ erhält man

$$u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |R_1 p(z)| \leq c u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |p(z)| \leq c.$$

Wähle jetzt $i \in \{1, 2\}$ mit $u(r_1) = \kappa_i u_i(r_1)$. Mit der zweiten Ungleichung in $(P1)$, angewandt auf das Polynom $R_1 p$ und u_i, und noch einmal mit der Bedingung vor $(P1)$ schließt man wie zuvor

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|R_1 p(z)| \leq 2c^2 C(\kappa_i)^{-1}.$$

Demnach ist $R_1 p \in 4c^2 C C_{\overline{w},0}$ oder $R_1 p \in 4c^2 C C_{n,0}$.

Betrachte jetzt den anderen Term $p - R_1 p = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p$. Wende die erste Ungleichung in $(P1)$ für u an ebenso wie die Abschätzung für $u|p|$, um

$$u(r_n)\left(\sup_{|z|=r_n} |(R_{n+2} - R_{n-1})p(z)|\right) \leq C \tag{4.5}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu erhalten. $\mathbb{N}$ kann als disjunkte Vereinigung $J_1 \cup J_2$ mit

$$u(r_j) = \kappa_1 u_1(r_j) \text{ für } j \in J_1 \text{ und } u(r_j) = \kappa_2 u_2(r_j) \text{ für } j \in J_2$$

dargestellt werden. Setze jetzt $T_i p := \sum_{n\in J_i}(R_{n+1} - R_n)p$ für $i \in \{1, 2\}$. Dann ist jedes $T_i p$ ein Polynom mit $p - R_1 p = T_1 p + T_2 p$. Fixiere ein $i \in \{1, 2\}$. Sei $p_n^i := (R_{n+2} - R_{n-1})p$ für $n \in J_i$ und $p_n^i := 0$ sonst. Die Eigenschaften der Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implizieren

$$T_i p = \sum_{n\in J_i}(R_{n+1} - R_n)(R_{n+2} - R_{n-1})p = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p_n^i,$$

und alle Summen sind endlich. Daher ist

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|T_ip(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)\left|\sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)p_n^i\right|.$$

Da nur endlich viele p_n^i ungleich null sind, und alle Gewichte zur Klasse $\mathcal{W}$ gehören, liefert eine Anwendung von (4.5) und (P2) wie zuvor

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|T_ip(z)| \quad\leq\quad D_i \sup_n \left(\sup_{|z|=r_n}|p_n^i(z)|\right) u_i(r_n) \leq D_i(\kappa_i)^{-1}C.$$

Daher ist $g_1 \in 2D_1CC_{\overline{w},0}$ und $g_2 \in 2D_2CC_{n,0}$. Dies liefert

$$\begin{aligned} p &\in (2c^2+D_1)2CC_{\overline{w},0} + 2D_2CC_{n,0} \quad \text{oder} \\ p &\in 2D_1CC_{\overline{w},0} + (2c^2+D_2)2CC_{n,0} \end{aligned}$$

Führe nun eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: Es gilt $u(r_1) = \kappa_1 u_1(r_1)$.
Definiere dann $T: \mathcal{P}\to\mathcal{P}$ durch $T(p) = R_1p + T_1p$. Dann gilt wegen obiger Rechnungen
$(\mathrm{Id}-T)(\cap_{k=1}^m \xi_k C_{k,0}\cap\mathcal{P}) \subset 2D_2C(C_{n,0}\cap\mathcal{P})$ und
$T(\cap_{k=1}^m \xi_k C_{k,0}\cap\mathcal{P}) \subset (2c^2+D_1)2C(C_{\overline{w},0}\cap\mathcal{P})$ ist beschränkt.
2. Fall: Man hat $u(r_1) = \kappa_2 u_2(r_1)$.
Definiere dann $T: \mathcal{P}\to\mathcal{P}$ durch $T(p) = T_1p$. Dann erhält man
$(\mathrm{Id}-T)(\cap_{k=1}^m \xi_k C_{k,0}\bigcap\mathcal{P}) \subset (2c^2+D_2)2C(C_{n,0}\cap\mathcal{P}) \subset \varepsilon(C_{n,0}\cap\mathcal{P})$ und
$T(\cap_{k=1}^m \xi_k C_{k,0}\bigcap\mathcal{P}) \subset 2D_1C(C_{\overline{w},0}\cap\mathcal{P})$ ist beschränkt.
Folglich hat $\mathcal{P}$ und damit auch $HW_0(\mathbb{D})$ (DCo). □

Um eine Aussage für injektive Tensorprodukte zu erhalten, betrachte zunächst die aus [62] stammende Proposition.

4.25 Proposition. *(*Peris, Rivera [62] Proposition 11*) Seien α eine Tensornorm und E und F Frécheträume mit (DCo). Ferner seien die beschränkten Teilmengen von $E\,\tilde{\otimes}_\alpha F$ lokalisierbar (d.h. zu jeder beschränkten Teilmenge B von $E\,\tilde{\otimes}_\alpha F$ existieren $C\in\mathcal{B}(E)$ und $D\in\mathcal{B}(F)$ mit $B\subset\overline{\alpha(C,D)}$). Dann genügt $E\,\tilde{\otimes}_\alpha F$ ebenfalls (DCo).*

4.26 Korollar. *Seien $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{W}$ und $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{W}$ wachsende Folgen strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$, so daß die Polynome in $HU_0(\mathbb{D})$ und $HV_0(\mathbb{D})$ liegen. Falls $HU_0(\mathbb{D})$ und $HV_0(\mathbb{D})$ (DCo) haben, so hat $HW_0(\mathbb{D}\times\mathbb{D}) = HU_0(\mathbb{D})\,\tilde{\otimes}_\varepsilon HV_0(\mathbb{D})$ ebenfalls (DCo).*

Beweis. Nach [51] Abschnitt 44.3 sind die beschränkten Teilmengen von $HU_0(\mathbb{D}) \,\widetilde{\otimes}_\varepsilon\, HV_0(\mathbb{D})$ stets lokalisierbar. Daher liefert eine Anwendung von Proposition 4.25 das Gewünschte. $\square$

5 Gewichtete (LB)-Räume holomorpher Funktionen

5.1 Notationen und Definitionen

Zunächst werden die notwendigen Definitionen und Bezeichnungen ebenso wie ein kurzer Überblick über die Geschichte der projektiven Darstellung gewichteter induktiver Limites von Räumen holomorpher Funktionen gegeben.
Für eine fallende Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver stetiger Funktionen (*Gewichte*) auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$ definiere

$$\begin{aligned} Hv_n(G) &:= \{f \in H(G);\ \|f\|_n := \sup_{z\in G} v_n(z)|f(z)| < \infty\}, \\ H(v_n)_0(G) &:= \{f \in H(G);\ v_n|f| \text{ verschwindet in } \infty \text{ auf } G\}, \\ \mathcal{V}H(G) &:= \operatorname{ind}_n Hv_n(G) \text{ und } \mathcal{V}_0H(G) := \operatorname{ind}_n H(v_n)_0(G). \end{aligned}$$

Es bezeichne B_n (bzw. $B_{n,0}$) die abgeschlossene Einheitskugel von $Hv_n(G)$ (bzw. $H(v_n)_0(G)$). Das System von Gewichten $\overline{V}$ wurde eingeführt als

$$\overline{V} := \{\overline{v} : G \to]0,\infty[\text{ stetig auf } G;\ \forall k\ \exists r_k > 0 :\ \overline{v} \leq \inf_k r_k v_k \text{ auf } G\}.$$

Die entsprechenden gewichteten Räume für $\overline{V}$ sind

$$\begin{aligned} H\overline{V}(G) &:= \{f \in H(G);\ \|.\|_{\overline{v}} := \sup_{z\in G} \overline{v}(z)|f(z)| < \infty\ \forall \overline{v} \in \overline{V}\}, \\ H\overline{V}_0(G) &:= \{f \in H(G);\ \overline{v}|f| \text{ verschwindet in } \infty \text{ auf } G\ \forall \overline{v} \in \overline{V}\}. \end{aligned}$$

Setze

$$C_{\overline{v}} := \{f \in H\overline{V}(G);\ \|f\|_{\overline{v}} \leq 1\} \text{ und } C_{\overline{v},0} := \{f \in H\overline{V}_0(G);\ \|f\|_{\overline{v}} \leq 1\}$$

für jedes $\overline{v} \in \overline{V}$.

Das Problem der *projektiven Darstellung* für gewichtete (LB)-Räume holomorpher Funktionen auf G ist herauszufinden, wann

(1) $\mathcal{V}_0H(G) = H\overline{V}_0(G)$ algebraisch und topologisch bzw.

(2) $\mathcal{V}H(G) = H\overline{V}(G)$ algebraisch und topologisch gilt.

Eine positive Antwort auf die Frage nach der topologischen Gleichheit ist von besonderer Bedeutung, weil es in diesem Fall möglich ist, die Topologie des jeweiligen gewichteten (LB)-Raumes holomorpher Funktionen durch das System $(\|.\|_{\overline{v}})_{\overline{v}\in\overline{V}}$ gewichteter sup-Halbnormen zu beschreiben.
Das Hauptresultat von Bierstedt, Meise, Summers [20] liefert, daß die projektive Darstellung algebraisch und topologisch gilt, falls $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Bedingung

$$(S) \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n \text{ mit } \frac{v_m}{v_n} \text{ verschwindet im Unendlichen auf } G$$

genügt. (S) ist die invertierte Form der in den vorigen Kapiteln vorkommenden Bedingung (S'). Analog sind (M) und (D) als invertierte Darstellungen von (M') und (D') definiert.
Positive Ergebnisse für gewichtete (LB)-Räume holomorpher Funktionen auf $\mathbb{D}$ können auch in [54] gefunden werden. Dort wird die Bedingung (S) nicht benötigt, aber jedes Gewicht muß normal sein.
I.a. hat das Problem der projektiven Darstellung für gewichtete induktive Limites von (B)-Räumen holomorpher Funktionen eine negative Antwort, siehe [26], [27], [28].
Taylor ebenso wie Bierstedt, Meise und Summers ([66] oder [67] Proposition 2 bzw. [20]) zeigten, daß $H\overline{V}(G)$ und $\mathcal{V}H(G)$ stets algebraisch zusammenfallen und dieselben beschränkten Teilmengen haben. $\mathcal{V}H(G)$ ist stets ein regulärer induktiver Limes.

Induktive Limites gewichteter Räume holomorpher Funktionen treten beispielsweise im Zusammenhang mit Distributionen und den Paley-Wiener-Schwartz-Theoremen auf. Im folgenden werden einige Beispiele herausgegriffen, die hier näher erläutert werden.

(I) Dieses Beispiel wurde [20] entnommen und ist dort unter Abschnitt 4.1 zu finden.
Betrachte $W = \mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^N$, unter seiner üblichen (F)-Raum-Topologie. Eine geeignete Version des Paley-Wiener-Schwartz-Theorems liefert, daß die Fourier-Transformation ein topologischer Isomorphismus von $W' = \mathcal{E}'$, dem Raum der Distributionen mit kompaktem Träger, versehen mit der starken Topologie $\beta(\mathcal{E}', \mathcal{E})$, auf $\hat{W}' = \mathcal{V}H(\mathbb{C}^N)$ ist, wobei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$v_n(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\exp(-n|\operatorname{Im}(z_j)|)}{(1+|z_j|)^n},\ z = (z_1, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Hier hat man $\mathcal{V}H(\mathbb{C}^N) = \mathcal{V}_0H(\mathbb{C}^N) = H\overline{V}_0(\mathbb{C}^N) = H\overline{V}(\mathbb{C}^N)$.

(II) Betrachte nun die Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver stetiger Funktionen auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$, definiert durch

$$v_n(z) = (1 - |z|^2)^n, \ z \in \mathbb{D}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Der induktive Limes $\mathcal{V}H(G)$ wird oftmals auch mit $\mathcal{A}^{-\infty}$ bezeichnet und ist ein Raum vom Bergman-Typ. Für nähere Informationen zu diesem Raum wird auf [41] Abschnitt 4.3 verwiesen.

(III) Das folgende Beispiel wurde in [55] eingehend untersucht.
Betrachte ein beschränktes konvexes Gebiet G in $\mathbb{C}$ ebenso wie $d_G(z) = \inf_{t\in\partial G} |z - t|, \ z \in G$. Dann definiere die fallende Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$v_n(z) := (\min(1, (d_G(z))^n)), \ z \in G, \ n \in \mathbb{N}.$$

In [55] wird der induktive Limes $\mathcal{V}H(G)$ mit $\mathcal{A}^{-\infty}(G)$ bezeichnet.

In dieser Arbeit werden -wie bereits erwähnt- Charakterisierungen in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten für die dualen Dichtheitsbedingungen gegeben. Andere Eigenschaften wie semi-Montel wurden bereits von Bierstedt und Bonet untersucht (siehe [16]).

5.2 Die dualen Dichtheitsbedingungen in projektiven Hüllen

In diesem Abschnitt wird untersucht, wann die projektiven Hüllen $H\overline{V}(G)$ und $H\overline{V}_0(G)$ (DDC) (bzw. $(SDDC)$) erfüllen. Es werden Bedingungen in Termen von Gewichten und assoziierten Gewichten gegeben.
Wie bereits erwähnt, gilt $\mathcal{V}H(G) = H\overline{V}(G)$ algebraisch, beide Räume haben dieselben beschränkten Mengen, und o.B.d.A. ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge der beschränkten Teilmengen von $H\overline{V}(G)$ (siehe dazu z.B. [7] Proposition 1). Offensichtlich ist jedes B_n kompakt bzgl. der kompakt-offenen Topologie *co*.
Zunächst werden einige Hilfsaussagen bewiesen.

5.1 Lemma. *Sei E ein lokalkonvexer Raum mit der Fundamentalfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Teilmengen. E hat genau dann (DDC) (bzw. $(SDDC)$), wenn gilt:
zu jeder Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$ und $U \in \mathcal{U}(E)$ mit*

$$B_n \cap U \subset \overline{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j B_j} \quad \left(\text{bzw. } B_n \cap U \subset \sum_{j=1}^{m} \lambda_j B_j\right). \tag{5.1}$$

Beweis. E erfülle (DDC). Dann gibt es nach Definition zu jeder Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$ und $U \in \mathcal{U}(E)$ mit $B_n \cap U \subset \overline{\Gamma}\left(\bigcup_{j=1}^m \lambda_j B_j\right) \subset \overline{\sum_{j=1}^m \lambda_j B_j}$.
Umgekehrt fixiere eine Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Setze $\lambda_j := \frac{\mu_j}{2^j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und wende (5.1) an. Dann existieren $m > n$ und $U \in \mathcal{U}(E)$ mit

$$B_n \cap U \subset \overline{\sum_{j=1}^m \lambda_j B_j} = \overline{\sum_{j=1}^m \frac{\mu_j}{2^j} B_j} \subset \overline{\Gamma}\left(\bigcup_{j=1}^m \mu_j B_j\right).$$

Folglich genügt E der dualen Dichtheitsbedingung. Der Beweis wird für die starke duale Dichtheitsbedingung völlig analog geführt. □

5.2 Lemma. *Unter den in diesem Abschnitt angenommenen Voraussetzungen erfüllt der Raum $H\overline{V}(G)$ genau dann (DDC), wenn er $(SDDC)$ genügt.*

Beweis. Das vorhergehende Lemma und die Tatsache, daß $H\overline{V}(G)$ dieselben beschränkten Teilmengen wie der reguläre induktive Limes $\mathcal{V}H(G)$ hat, impliziert, daß $H\overline{V}(G)$ genau dann die duale Dichtheitsbedingung hat, wenn zu jeder Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$ mit $B_n \cap C_{\overline{v}} \subset \overline{\sum_{j=1}^m \lambda_j B_j}$ existieren. $\sum_{j=1}^m \lambda_j B_j$ ist aber *co*-kompakt und daher auch abgeschlossen in $H\overline{V}(G)$. Folglich hat man $\overline{\sum_{j=1}^m \lambda_j B_j} = \sum_{j=1}^m \lambda_j B_j$. Eine erneute Anwendung von Lemma 5.1 liefert das Gewünschte. □

Mit Hilfe der zuvor bewiesenen Lemmata gelangt man nun zu der folgenden Proposition.

5.3 Proposition. *Falls $H\overline{V}(G)$ (DDC)(oder äquivalent $(SDDC)$) hat, so ist die folgende Bedingung erfüllt:*
$(*)$ *zu jeder Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$ derart, daß*

$$\left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim} \leq \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{v_j} \qquad \textit{auf } G.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jeder Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$ mit

$$(**) \quad B_n \cap C_{\overline{v}} \subset \sum_{j=1}^m \lambda_j B_j.$$

Es genügt zu zeigen, daß $(**)$ die Bedingung $(*)$ impliziert. Wähle dazu ein $f \in H\overline{V}(G)$ mit $|f| \leq \left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim}$ auf G.
Nach [18] 1.2.(iii) gilt auch $|f| \leq \min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)$, d.h. $|f| \leq \frac{1}{v_n}$ und $|f| \leq \frac{1}{\overline{v}}$ auf G. Damit gehört f zu $B_n \cap C_{\overline{v}}$. Wegen $(**)$ ist f dann Element der Menge $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j B_j$ und kann in der Form $f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j$ mit $g_j \in B_j$ für jedes $j \in \{1, ..., m\}$, dargestellt werden. Es gilt also

$$|f| = \left|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j |g_j| \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{v_j} \text{ auf } G.$$

Nimmt man nun das Supremum über all diese Funktionen f, so ergibt sich $(*)$. □

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Menge G und die Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Gewichte kommt man für den Fall der o-Gewichtsbedingungen zu einem ähnlichen Ergebnis.

5.4 Proposition. *Sei G eine kreisförmige Teilmenge von $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$. Ferner sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver stetiger und radialer Funktionen auf G, so daß $H(v_1)_0(G)$ die Polynome enthält.*
Falls nun $H\overline{V}_0(G)$ der dualen Dichtheitsbedingung genügt, so ist $(*)$ erfüllt.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jeder Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$ mit

$$(***) \quad B_{n,0} \cap C_{\overline{v},0} \subset \overline{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j B_{j,0}}.$$

Es genügt zu zeigen, daß $(***)$ die Bedingung $(*)$ impliziert. Fixiere dazu $f \in H(G)$ mit $|f| \leq \left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim}$ auf G. Dann gilt $|f| \leq \frac{1}{v_n}$ und $|f| \leq \frac{1}{\overline{v}}$ auf G. O.B.d.A. kann $\overline{v} \in \overline{V}$ strikt positiv, stetig und radial gewählt werden. (Siehe dazu [17].)
Betrachte jetzt die Folge $(S_k f)_{k\in\mathbb{N}}$ der Cesàro-Mittel (der Partialsummen) der Taylorreihe von f um 0. Wie zuvor erhält man $|S_k f| \leq \frac{1}{v_n}$ und $|S_k f| \leq \frac{1}{\overline{v}}$ auf G. Außerdem ist jedes $S_k f$ als Polynom ein Element von $H\overline{V}_0(G)$ und daher von $B_{n,0} \cap C_{\overline{v},0}$. Dann impliziert $(***)$, daß $S_k f \in \overline{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j B_{j,0}} \subset \sum_{j=1}^{m} \lambda_j B_j$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Folglich kann jedes $S_k f$ in der Form $S_k f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j$ dargestellt werden, wobei $g_j \in B_j$ für jedes $j \in \{1, ..., m\}$. Man erhält

$$|S_k f| \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{v_j} \quad \text{auf } G \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Weil $S_k f$ für $k \to \infty$ punktweise gegen f konvergiert, ergibt sich $|f| \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{v_j}$ auf G. Nimmt man schließlich das Supremum über alle Funktionen f, so folgt $(*)$. □

Es gibt Beispiele für Folgen $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver stetiger Funktionen auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, mit Bedingung $(*)$, derart daß die Räume $H\overline{V}(G)$ und $\mathcal{V}H(G)$ topologisch nicht zusammenfallen:
Bonet und Taskinen konstruierten in [27] Abschnitt 3 eine Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver stetiger Funktionen auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}^2$ mit Bedingung (M), derart daß die Räume $H\overline{V}(G)$ und $\mathcal{V}H(G)$ topologisch nicht zusammenfallen. Es ist bekannt, daß (M) die Bedingung (D) impliziert, welche nach [3] Proposition I.2.4 zu
(V_2) zu jeder Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$ mit

$$\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{v_j} \quad \text{auf } G$$

äquivalent ist. Nun folgt $(*)$ unmittelbar aus (V_2).
Beachte, daß der einzige Unterschied zwischen $(*)$ und (V_2) die Verwendung des assoziierten Gewichtes auf der linken Seite ist.

Nach [8] Theorem 1.5 genügt ein (DF)-Raum genau dann der dualen Dichtheitsbedingung, wenn er metrisierbare beschränkte Mengen hat. Letztere Eigenschaft kann für $H\overline{V}(G)$ charakterisiert werden. Dazu sind jedoch einige Vorbereitungen notwendig.

5.5 Proposition. *Sei E ein lokalkonvexer Raum mit der abzählbaren Umgebungseigenschaft und einer Fundamentalfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der beschränkten Mengen. Dann hat E genau dann metrisierbare beschränkte Mengen, wenn es $U \in \mathcal{U}(E)$ gibt, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $V \in \mathcal{U}(E)$ ein $a > 0$ mit*

$$B_n \cap aU \subset V \tag{5.2}$$

existiert.

Beweis. Es sei zunächst Aussage (5.2) erfüllt. Da dann $\left(\frac{1}{m}U\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullumgebungsbasis in B_n für die von E induzierte Topologie ist, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, folgt sofort das Gewünschte.
Umgekehrt habe E metrisierbare beschränkte Mengen. Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und wähle eine fallende Folge $(V_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ absolutkonvexer Nullumgebungen in E, so daß für jedes $V \in \mathcal{U}(E)$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $B_n \cap V_{n,k} \subset V$ existiert. Wende die

abzählbare Umgebungseigenschaft an, um Zahlen $a_{n,k} > 0$ zu finden, so daß $U := \bigcap_{n,k\in\mathbb{N}} a_{n,k}V_{n,k}$ ebenfalls eine Nullumgebung ist. Diese Nullumgebung erfüllt alle geforderten Eigenschaften. □

5.6 Lemma. *$H\overline{V}(G)$ hat die abzählbare Umgebungseigenschaft.*

Beweis. Nach [21] Theorem 1.6 ist $C\overline{V}(G)$ unter den gegebenen Voraussetzungen ein (DF)-Raum und hat daher wegen [59] Proposition 8.3.5 die abzählbare Umgebungseigenschaft. Dies impliziert, daß $H\overline{V}(G)$ als topologischer Unterraum von $C\overline{V}(G)$ ebenfalls die abzählbare Umgebungseigenschaft besitzt. □

Es bleibt zu erwähnen, daß dann $H\overline{V}_0(G)$ als topologischer Unterraum von $H\overline{V}(G)$ ebenfalls die abzählbare Umgebungseigenschaft hat.

5.7 Proposition. *$H\overline{V}(G)$ hat genau dann metrisierbare beschränkte Mengen, wenn $\overline{v} \in \overline{V}$ existiert, so daß es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\overline{w} \in \overline{V}$ ein $a > 0$ mit*

$$\left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{a}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim} \leq \frac{1}{\overline{w}} \text{ auf } G \tag{5.3}$$

gibt.

Beweis. Nach Proposition 5.5 hat $H\overline{V}(G)$ genau dann metrisierbare beschränkte Mengen, wenn $\overline{v} \in \overline{V}$ existiert, so daß es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\overline{w} \in \overline{V}$ ein $a > 0$ mit

$$B_n \cap aC_{\overline{v}} \subset C_{\overline{w}} \tag{5.4}$$

gibt. Zu zeigen ist demnach die Äquivalenz der Aussagen (5.3) und (5.4).

(5.3) $\Longrightarrow$ (5.4): Wähle $f \in B_n \cap aC_{\overline{v}}$ beliebig, aber fest. Dann ist f Element der Menge $H\overline{V}(G)$ und genügt der Abschätzung $|f| \leq \left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{a}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim} \leq \frac{1}{\overline{w}}$ auf G wegen (5.3). Daher ist f Element von $C_{\overline{w}}$.

(5.4) $\Longrightarrow$ (5.3): Fixiere $f \in H(G)$ mit $|f| \leq \left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{a}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim}$ auf G. Dann gilt aber auch $|f| \leq \min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{a}{\overline{v}}\right)$ auf G. Folglich ist f Element von $B_n \cap aC_{\overline{v}}$ und gehört nach Voraussetzung daher auch zu $C_{\overline{w}}$, d.h. $|f| \leq \frac{1}{\overline{w}}$ auf G. Nimmt man das Supremum über all diese Funktionen, so folgt (5.3). □

Unter Einschränkungen erhält man ein ähnliches Ergebnis für $H\overline{V}_0(G)$.

5.8 Proposition. *Betrachte die folgenden Aussagen:*

(a) $H\overline{V}_0(G)$ hat metrisierbare beschränkte Mengen.

(b) Bedingung (5.3) ist erfüllt.

Dann folgt aus (b) stets (a). Falls zusätzlich noch angenommen wird, daß $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, kreisförmig und $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallende Folge strikt positiver stetiger und radialer Funktionen ist, derart daß die Polynome in $H(v_1)_0(G)$ enthalten sind, so impliziert (a) auch (b).

Beweis. Nach Proposition 5.5 hat $H\overline{V}_0(G)$ genau dann metrisierbare beschränkte Mengen, falls es $\overline{v} \in \overline{V}$ gibt, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\overline{w} \in \overline{V}$ ein $a > 0$ mit

$$B_{n,0} \cap aC_{\overline{v},0} \subset C_{\overline{w},0} \tag{5.5}$$

existiert. Um den Beweis zu beenden, bleibt die Äquivalenz der Aussagen (5.5) und (5.3) zu zeigen.

(5.3) $\Longrightarrow$ (5.5): Dies ist analog zum Beweis der Proposition 5.7.

(5.5) $\Longrightarrow$ (5.3): Sei im folgenden angenommen, daß $G \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, kreisförmig und $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallende Folge strikt positiver stetiger und radialer Funktionen auf G ist. Fixiere $f \in H(G)$ mit $|f| \leq \left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{a}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim}$ auf G. Dann gilt $|f| \leq \frac{1}{v_n}$ und $|f| \leq \frac{a}{\overline{v}}$ auf G.
O.B.d.A. kann $\overline{v} \in \overline{V}$ wieder strikt positiv, stetig und radial gewählt werden. Der Rest des Beweises verläuft analog zu dem von Proposition 5.4. □

5.3 Die dualen Dichtheitsbedingungen in induktiven Limiten

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen die duale Dichtheitsbedingung für die Räume $H\overline{V}(\mathbb{D})$, $H\overline{V}_0(\mathbb{D})$, $\mathcal{V}H(\mathbb{D})$ und $\mathcal{V}_0H(\mathbb{D})$ äquivalent ist und genau dann erfüllt ist, wenn die Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Bedingung $(*)$ erfüllt. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{V}H(\mathbb{D}) = H\overline{V}(\mathbb{D})$ topologisch gilt. Man erhält also unter Einschränkungen ein ähnliches Ergebnis wie im Fall von Räumen stetiger Funktionen. Zum Beweis einiger Sätze wird die bereits in Kapitel 4 mehrfach angewandte Methode zur Zerlegung holomorpher Funktionen, die von Bierstedt und Bonet in [10] eingeführt wurde, in verschiedenen Variationen benutzt. Im folgenden werde o.B.d.A. angenommen, daß $v_n \geq 2v_{n+1}$ auf G ist. Zunächst werden einige Hilfsaussagen bewiesen.

5.9 Lemma. *Sei G eine kreisförmige Teilmenge von $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$. Ferner sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver, stetiger und radialer*

Funktionen auf G*, so daß* $H(v_1)_0(G)$ *die Polynome enthält und* $\mathcal{V}_0H(G)$ *ein topologischer Unterraum von* $H\overline{V}_0(G)$ *ist. Dann liefert* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,*
$C_n := B_n \cap \mathcal{V}_0H(G)$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$*, eine Fundamentalfolge der beschränkten Mengen in* $\mathcal{V}_0H(G)$*.*

Beweis. Natürlich ist jede beschränkte Menge B in $\mathcal{V}_0H(G)$ auch beschränkt in $H\overline{V}(G)$. Daher gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $B \subset C_n$.
Umgekehrt ist jedes C_n beschränkt in $H\overline{V}(G)$ und damit auch in $\mathcal{V}H(G)$. Darüber hinaus ist C_n enthalten in $\mathcal{V}_0H(G)$. Weil $\mathcal{V}_0H(G)$ ein topologischer Unterraum von $\mathcal{V}H(G)$ ist, ist C_n auch beschränkt in $\mathcal{V}_0H(G)$. □

5.10 Proposition. *Sei* G *eine kreisförmige Teilmenge von* $\mathbb{C}^N$*,* $N \geq 1$*. Ferner sei* $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine fallende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf* G*, derart daß* $H(v_1)_0(G)$ *die Polynome enthält und* $\mathcal{V}_0H(G)$ *ein topologischer Unterraum von* $H\overline{V}_0(G)$ *ist.*
Dann genügt der Raum $\mathcal{P}$ *der Polynome (versehen mit der von* $\mathcal{V}_0H(G)$ *induzierten Topologie) der dualen Dichtheitsbedingung genau dann, wenn* $\mathcal{V}_0H(G)$ *sie erfüllt.*

Beweis. 1. Schritt: Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{P}$ in $\mathcal{V}_0H(G)$ groß ist, d.h. daß jede beschränkte Menge in $\mathcal{V}_0H(G)$ im Abschluß einer beschränkten Teilmenge von $\mathcal{P}$ bzgl. $\mathcal{V}_0H(G)$ liegt.
Fixiere dazu $n \in \mathbb{N}$ und dann $f \in C_n$. Die Folge $(S_kf)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f in $H\overline{V}_0(G)$ und damit nach Voraussetzung auch in $\mathcal{V}_0H(G)$. Außerdem gehört jedes Polynom S_kf zu $B_n \cap \mathcal{V}_0H(G) = C_n$. Folglich liegt jedes C_n in $\overline{\mathcal{P} \cap B_n}^{\mathcal{V}_0H(G)}$.
2. Schritt: Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{P}$ genau dann die duale Dichtheitsbedingung erfüllt, wenn $\mathcal{V}_0H(G)$ dies ebenfalls tut. Da $\mathcal{V}_0H(G)$ als induktiver Limes von Banachräumen ein (DF)-Raum und $\mathcal{P}$ groß in $\mathcal{V}_0H(G)$ ist, folgt aus [59] 8.3.24, daß $\mathcal{P}$ ebenfalls ein (DF)-Raum ist. Eine Anwendung von [8] Bemerkung 1.10(b) liefert schließlich, daß $\mathcal{P}$ genau dann die duale Dichtheitsbedingung hat, wenn $\mathcal{V}_0H(G)$ ihr genügt. □

5.11 Korollar. *Sei* $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine fallende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf* $\mathbb{D}$ *in der Klasse* $\mathcal{W}$*, derart daß* $H(v_1)_0(\mathbb{D})$ *die Polynome enthält.*
Dann genügt der Raum $\mathcal{P}$ *der Polynome (versehen mit der von* $\mathcal{V}_0H(\mathbb{D})$ *induzierten Topologie) der dualen Dichtheitsbedingung genau dann, wenn* $\mathcal{V}_0H(\mathbb{D})$ *sie erfüllt.*

Beweis. Nach [14] Theorem 1 ist $\mathcal{V}_0H(\mathbb{D})$ unter den gegebenen Voraussetzungen ein topologischer Unterraum von $H\overline{V}_0(\mathbb{D})$. Dann folgt das Gewünschte aus Lemma 5.9 und Proposition 5.10. □

5.12 Satz. *Sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$ in der Klasse $\mathcal{W}$, derart daß $H(v_1)_0(\mathbb{D})$ die Polynome enthält. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})$ erfüllt die duale Dichtheitsbedingung.

(b) $\mathcal{V}H(\mathbb{D})$ hat die duale Dichtheitsbedingung.

(c) $H\overline{V}_0(\mathbb{D})$ genügt der dualen Dichtheitsbedingung.

(d) Die Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Bedingung $(*)$.

Beweis. (a) $\Longleftrightarrow$ (b): Nach [13] Proposition 4 gilt unter den gegebenen Voraussetzungen zunächst $\mathcal{V}H(\mathbb{D}) = (\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})'_b)'_i$.
(a) $\Longrightarrow$ (b): $\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})$ habe die duale Dichtheitsbedingung. Dann ist nach [8] Theorem 1.5.(a) jede beschränkte Teilmenge von $\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})$ metrisierbar. Folglich hat $\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})'_b$ wegen [10] Theorem 1.4 die Dichtheitsbedingung und ist daher auch distinguiert. Also folgt $\mathcal{V}H(\mathbb{D}) = (\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})'_b)'_i = (\mathcal{V}H(\mathbb{D})'_b)'_b$, und $\mathcal{V}H(\mathbb{D})$ hat die duale Dichtheitsbedingung.

(b) $\Longrightarrow$ (a): $\mathcal{V}H(\mathbb{D})$ genüge der dualen Dichtheitsbedingung. Wegen $\mathcal{V}H(\mathbb{D}) = (\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})'_b)'_i$ erfüllt $\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})'_b$ nach [60] Korollar 2 die Dichtheitsbedingung. Eine erneute Anwendung von [10] Theorem 1.4 und Theorem 1.5(a) liefert dann, daß $\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})$ die duale Dichtheitsbedingung haben muß.

(a) $\Longleftrightarrow$ (c): Wegen [14] Theorem 1 ist $\mathcal{V}_0 H(\mathbb{D})$ ein dichter topologischer Unterraum von $H\overline{V}_0(\mathbb{D})$. Insbesondere ist $H\overline{V}_0(\mathbb{D})$ ein (DF)-Raum (siehe dazu [48] Theorem 12.4.8(d)). Daher liefert eine Anwendung von [8] 1.10.(a) und 1.10.(b) die gewünschte Äquivalenz.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Dies folgt unmittelbar aus Lemma 5.4.

(d) $\Longrightarrow$ (c): Es sei also Aussage (d) erfüllt.
Dann ist gemäß Lemma 5.1 folgendes zu zeigen:
zu jeder Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$ mit $B_{n,0} \cap C_{\overline{v},0} \subset \overline{\sum_{k=1}^m \mu_k B_{k,0}}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ ebenso wie eine Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beliebig, aber fest. Dann setze

$$\lambda_k := \frac{\mu_k}{(2c^2 + \max_{1\le i\le m} D_i)Cm} \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

(d) liefert $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$. Wegen Proposition 5.11 und der bereits gezeigten Äquivalenz der Aussagen (a) und (c) genügt es, die Polynome

zu betrachten. Fixiere $p \in (B_{n,0} \cap C_{\overline{v},0}) \cap \mathcal{P}$. Dann gilt $v_n|p| \leq 1$ und $\overline{v}|p| \leq 1$ und daher auch $|p| \leq \min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)$ auf $\mathbb{D}$. Wegen [18] Proposition 1.2 (iii) gilt sogar $|p| \leq \left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim}$ auf $\mathbb{D}$. (d) liefert desweiteren $\left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim} \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{v_k} \leq \max\left(m\frac{\lambda_1}{v_1}, ..., m\frac{\lambda_m}{v_m}\right)$ auf $\mathbb{D}$.
Setze $w := \min\left(\frac{v_1}{m\lambda_1}, ..., \frac{v_m}{m\lambda_m}\right)$. Dann ist w gemäß Definition ein Element der Klasse $\mathcal{W}$, und es gilt $w|p| \leq 1$ auf $\mathbb{D}$. Zur Vereinfachung der Notation schreibe $\kappa_i := \frac{1}{m\lambda_i}$ für jedes $i \in \{1, ..., m\}$. Also $w = \min(\kappa_1 v_1, ..., \kappa_m v_m)$.
Man hat $p = \sum_{n=0}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p = R_1 p + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p$, und die Summe ist endlich.
Wegen der Bedingung vor $(P1)$ und der Abschätzung von $w|p|$ erhält man

$$w(r_1) \sup_{|z|=r_1} |R_1 p(z)| \leq c w(r_1) \sup_{|z|=r_1} |p(z)| \leq c.$$

Wähle $i \in \{1, ..., m\}$ mit $w(r_1) = \kappa_i v_i(r_1)$. Mit der zweiten Ungleichung in $(P1)$, angewandt auf das Polynom $R_1 p$ und v_i, und noch einmal mit der Bedingung vor $(P1)$ schließt man wie zuvor

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} v_i(z)|R_1 p(z)| \leq 2c^2 C(\kappa_i)^{-1}.$$

Demnach ist $R_1 p \in 2Cc^2(\kappa_i)^{-1}B_{i,0}$, d.h. $R_1 p \in 2Cc^2 m\lambda_1 B_{1,0}$ bzw. ... bzw. $R_1 p \in 2Cc^2 m\lambda_m B_{m,0}$.
Betrachte jetzt den Term $p - R_1 p = \sum_{k=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p$. Wende die erste Ungleichung in $(P1)$ für w an ebenso wie die Abschätzung für $w|p|$, um folgendes zu erhalten:

$$w(r_n)\left(\sup_{|z|=r_n} |(R_{n+2} - R_{n-1})p(z)|\right) \leq C \tag{5.6}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ kann dargestellt werden als disjunkte Vereinigung $\cup_{i=1}^{m} J_i$ mit

$$w(r_j) = \kappa_i v_i(r_j) \text{ für } j \in J_i,\ 1 \leq i \leq m.$$

Setze jetzt $g_i := \sum_{n \in J_i}(R_{n+1} - R_n)p$ für jedes $i \in \{1, ..., m\}$. Dann ist jedes g_i ein Polynom und $p - R_1 p = \sum_{i=1}^{m} g_i$. Fixiere $i \in \{1, ..., m\}$ und setze $p_n^i := (R_{n+2} - R_{n-1})p$ für $n \in J_i$ und $p_n^i := 0$ sonst. Die Eigenschaften der Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implizieren

$$g_i = \sum_{n \in J_i}(R_{n+1} - R_n)(R_{n+2} - R_{n-1})p = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)p_n^i,$$

und alle Summen sind endlich. Daher ist
$\sup_{z\in\mathbb{D}} v_i(z)|g_i(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} v_i(z)\left|\sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)p_n^i\right|$. Da nur endlich viele p_n^i ungleich null sind und alle Gewichte zur Klasse $\mathcal{W}$ gehören, liefert eine Anwendung von $(P2)$ und (5.6) wie zuvor

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} v_i(z)|g_i(z)| \le D_i(\kappa_i)^{-1}C.$$

Daher ist $g_i \in m\lambda_i D_i C B_{i,0}$ für jedes $i \in \{1,...,m\}$. Also folgt
$p = R_1p + \sum_{i=1}^m g_i \in (2c^2+D_1)C\lambda_1 m B_{1,0} + \sum_{i=2}^m D_i C\lambda_i m B_{i,0} \subset \sum_{i=1}^m \mu_i B_{i,0}$
bzw. ... bzw.
$p = R_1p + \sum_{i=1}^m g_i \in \sum_{i=1}^{m-1} D_i C\lambda_i m B_{i,0} + (2c^2+D_m)C\lambda_m m B_{m,0} \subset \sum_{i=1}^m \mu_i B_{i,0}$.
Folglich erfüllt der Raum $H\overline{V}_0(\mathbb{D})$ die starke duale Dichtheitsbedingung und daher auch die duale Dichtheitsbedingung.

□

5.13 Satz. *Sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$ in der Klasse $\mathcal{W}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $H\overline{V}(\mathbb{D})$ erfüllt die duale Dichtheitsbedingung (oder äquivalent die starke duale Dichtheitsbedingung).

(b) Die Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genügt der Bedingung $(*)$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Dies folgt unmittelbar aus Lemma 5.3.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Es sei also (b) gegeben. Dann ist gemäß Lemma 5.1 und Lemma 5.2 folgendes zu zeigen:
zu jeder Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$ mit $B_n \cap C_{\overline{v}} \subset \sum_{k=1}^m \mu_k B_k$.
Fixiere dazu $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ebenso wie $n \in \mathbb{N}$. Setze dann

$$\lambda_k := \frac{\mu_k}{C(2c^2 + \max_{1\le j\le m} D_j)} \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

(b) liefert $m > n$ und $\overline{v} \in \overline{V}$. Wähle jetzt ein beliebiges, aber festes $f \in B_n \cap C_{\overline{v}}$. Dann gilt $|f| \le \min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)$ und wegen [18] 1.2.(iii) auch $|f| \le \left(\min\left(\frac{1}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim}$ auf $\mathbb{D}$.
(b) impliziert daher $|f| \le \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{v_k} \le \max\left(\frac{m\lambda_1}{v_1}, ..., \frac{m\lambda_m}{v_m}\right)$ auf $\mathbb{D}$.
Setze $w := \min\left(\frac{v_1}{m\lambda_1}, ..., \frac{v_m}{m\lambda_m}\right)$. Dann ist w gemäß Definition ein Element der Klasse $\mathcal{W}$, und es gilt $w|f| \le 1$ auf $\mathbb{D}$.
Zur Vereinfachung der Notation schreibe $\kappa_i := \frac{1}{m\lambda_i}$ für jedes $i \in \{1,...,m\}$.

Also $w = \min(\kappa_1 v_1, ..., \kappa_m v_m)$. Unter Benutzung der Cesàro-Mittel (der Partialsummen) der Taylorreihe von f um 0 erhält man eine Folge $(S_k f)_{k\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $w|S_k f| \le w|f| \le 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $S_k f \to f$ in $(H(\mathbb{D}), co)$.
Man hat $S_k f = \sum_{n=0}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)S_k f = R_1 S_k f + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)S_k f$, und die Summe ist endlich.
Betrachte zunächst den Term $R_1 S_k f$. Wegen der Bedingung vor $(P1)$ und der Abschätzung von $w|S_k f|$ erhält man
$w(r_1)\sup_{|z|=r_1}|R_1 S_k f(z)| \le cw(r_1)\sup_{|z|=r_1}|S_k f(z)| \le c$.
Wähle jetzt $i \in \{1, ..., m\}$ mit $w(r_1) = \kappa_i v_i(r_1)$. Mit der zweiten Ungleichung in (P1), angewandt auf das Polynom $R_1 S_k f$ und v_i und noch einmal mit der Bedingung vor $(P1)$ schließt man wie zuvor

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} v_i(z)|R_1 S_k f(z)| \le 2c^2 C(\kappa_i)^{-1}.$$

Demnach ist $R_1 S_k f \in 2Cc^2(\kappa_i)^{-1}B_i$, d. h.
$R_1 S_k f \in 2Cc^2 m\lambda_1 B_1$ bzw. ... bzw. $R_1 S_k f \in 2Cc^2 m\lambda_m B_m$.
Betrachte jetzt den anderen Term $S_k f - R_1 S_k f = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)S_k f$. Wende die erste Ungleichung in $(P1)$ für w an ebenso wie die Abschätzung für $w|S_k f|$, um folgendes zu erhalten

$$w(r_n)\left(\sup_{|z|=r_n}|(R_{n+2} - R_{n-1})S_k f(z)|\right) \le C \tag{5.7}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ kann dargestellt werden als disjunkte Vereinigung $\cup_{i=1}^m J_i$ mit $w(r_j) = \kappa_i v_i(r_j)$ für jedes $j \in J_i$, $1 \le i \le m$.
Setze jetzt $g_i := \sum_{n\in J_i}(R_{n+1} - R_n)S_k f$ für jedes $i \in \{1, ..., m\}$. Dann ist jedes g_i ein Polynom mit $S_k f - R_1 S_k f = \sum_{i=1}^m g_i$. Fixiere $i \in \{1, ..., m\}$.
Sei $(S_k f)_n^i := (R_{n+1} - R_{n-1})S_k f$ für $n \in J_i$ und $(S_k f)_n^i := 0$ sonst.
Die Eigenschaften der Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implizieren
$g_i = \sum_{n\in J_i}(R_{n+1} - R_n)(R_{n+2} - R_{n-1})S_k f = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)(S_k f)_n^i$, und alle Summen sind endlich. Daher ist

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} v_i(z)|g_i(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)(S_k f)_n^i\right|.$$

Da nur endlich viele $(S_k f)_n^i$ ungleich null sind, und alle Gewichte zur Klasse $\mathcal{W}$ gehören, liefert eine Anwendung von $(P2)$ und (5.7)

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} v_i(z)|g_i(z)| \le D_i(\kappa_i)^{-1}C.$$

Daher ist $g_i \in m\lambda_i D_i C B_i$ für jedes $i \in \{1, ..., m\}$. Also folgt
$S_k f = R_1 S_k f + \sum_{i=1}^m g_i \in (2c^2 + D_1) C \lambda_1 m B_1 + \sum_{i=2}^m D_i C \lambda_i m B_i \subset \sum_{i=1}^m \mu_i B_i$
bzw. ... bzw.
$S_k f = R_1 S_k f + \sum_{i=1}^m g_i \in \sum_{i=1}^{m-1} D_i C \lambda_i m B_i + (2c^2 + D_m) C \lambda_m m B_m \subset \sum_{i=1}^m \mu_i B_i$.
Es folgt, daß jedes $S_k f$ zu $\sum_{i=1}^m \mu_i B_i$ gehört. Nun ist aber jedes B_i kompakt in $(H(\mathbb{D}), co)$, und wegen $S_k f \to f$ in der kompakt-offenen Topologie kann man schließen, daß auch f ein Element der Menge $\sum_{i=1}^m \mu_i B_i$ ist. Folglich hat $H\overline{V}(\mathbb{D})$ die starke duale Dichtheitsbedingung und daher auch die duale Dichtheitsbedingung. □

Im folgenden wird eine Verbindung zwischen der dualen Dichtheitsbedingung für $H\overline{V}(\mathbb{D})$ bzw. $\mathcal{V}H(\mathbb{D})$ und der topologischen Gleichheit $H\overline{V}(\mathbb{D}) = \mathcal{V}H(\mathbb{D})$ hergestellt. Betrachte dazu den folgenden Satz.

5.14 Satz. *(*Bierstedt, Bonet [14] Theorem 7*) Sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$ in der Klasse $\mathcal{W}$. Dann gilt die topologische Gleichheit $\mathcal{V}H(\mathbb{D}) = H\overline{V}(\mathbb{D})$ genau dann, wenn es zu jeder Folge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen ein $\overline{v} \in \overline{V}$ gibt, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $M > 0$ ein $m > n$ mit*

$$(+) \qquad \left(\min\left(\frac{M}{v_n}, \frac{1}{\overline{v}}\right)\right)^{\sim} \leq \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{v_j}$$

existiert.

Es wird nun die Äquivalenz der Bedingungen $(*)$ und $(+)$ gezeigt. Dazu wird zunächst bewiesen, daß $H\overline{V}(\mathbb{D})$ unter bestimmten Voraussetzungen stets ein (DF)-Raum ist. Zunächst werden einige Hilfsaussagen benötigt.

5.15 Lemma. *(*Bierstedt, Bonet [9] Lemma A in Abschnitt 4*) Sei E ein lokalkonvexer Raum mit einer Fundamentalfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der beschränkten Mengen und $\mathcal{U}_0$ eine feste Basis absolutkonvexer Nullumgebungen in E. Dann ist E ein (DF)-Raum genau dann, wenn für jede Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und für jede Folge $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_0$ der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(W_n + \sum_{k=1}^n \lambda_k B_k\right)$$

eine Nullumgebung in E ist.

5.16 Lemma. *Sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$ in der Klasse $\mathcal{W}$, so daß $\overline{V} \subset \mathcal{W}$ gilt.*

Dann hat man für jedes $n \in \mathbb{N}$, jedes $\overline{w}_n \in \overline{V}$ und jede Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen

$$\frac{1}{2}B \subset \left(C_{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k \right),$$

wobei $B := \left\{ f \in H\overline{V}(\mathbb{D});\ |f| \leq \frac{1}{C(D_1+2c^2)\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{C(D_{k+1}+2c^2)} \frac{1}{2^{k+1}v_k} \textit{ auf } \mathbb{D} \right\}$.

Beweis. Fixiere zunächst $n \in \mathbb{N}$, $\overline{w}_n \in \overline{V}$ und eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen. Wähle dann ein beliebiges, aber festes $f \in \frac{1}{2}B$. Es gilt $f \in H\overline{V}(\mathbb{D})$ und

$$\begin{aligned} |f| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C(D_1+2c^2)} \frac{1}{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{C(D_{k+1}+2c^2)} \frac{1}{2^{k+1}v_k} \right) \\ &\leq \max\left(\frac{1}{C(D_1+2c^2)} \frac{1}{\overline{w}_n}, \frac{\lambda_1}{C(D_2+2c^2)} \frac{1}{v_1}, ..., \frac{1}{C(D_{n+1}+2c^2)} \frac{1}{v_n} \right). \end{aligned}$$

Setze $u := \min\left(C(D_1+2c^2)\overline{w}_n, \frac{C(D_2+2c^2)}{\lambda_1} v_1, ..., \frac{C(D_{n+1}+2c^2)}{\lambda_n} v_n \right)$. Dann ist u gemäß Definition ein Element der Klasse $\mathcal{W}$, und es gilt $u|f| \leq 1$ auf $\mathbb{D}$. Zur Vereinfachung der Notation schreibe $\kappa_1 := C(D_1+2c^2)$, $\kappa_i := \frac{C(D_i+2c^2)}{\lambda_{i-1}}$ für $2 \leq i \leq n+1$, $u_1 := \overline{w}_n$ und $u_i := v_{i-1}$ für $2 \leq i \leq n+1$.
Unter Benutzung der Cesàro-Mittel (der Partialsummen) der Taylorreihe von f um 0 erhält man eine Folge $(S_k f)_{k\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $u|S_k f| \leq u|f| \leq 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $S_k f \to f$ in $(H(\mathbb{D}), co)$.
Nach Voraussetzung liegt jedes $S_k f$ in $H\overline{V}(\mathbb{D})$. Man hat $S_k f = \sum_{n=0}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)S_k f = R_1 S_k f + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1} - R_n)S_k f$, und die Summe ist endlich.
Betrachte zunächst den Term $R_1 S_k f$. Wegen der Bedingung vor $(P1)$ und der Abschätzung von $u|S_k f|$ erhält man

$$u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |R_1 S_k f(z)| \leq c u(r_1) \sup_{|z|=r_1} |S_k f(z)| \leq c.$$

Wähle jetzt $i \in \{1, ..., n+1\}$ mit $u(r_1) = \kappa_i u_i(r_1)$. Mit der zweiten Ungleichung in $(P1)$, angewandt auf das Polynom $R_1 S_k f$ und u_i und noch einmal mit der Bedingung vor $(P1)$ schließt man wie zuvor

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|R_1 S_k f(z)| \leq 2c^2 C(\kappa_i)^{-1}.$$

Also
$R_1 S_k f \in \frac{2c^2 C}{C(D_1+2c^2)} C_{\overline{w}_n}$ bzw. $R_1 S_k f \in \frac{2c^2 C}{C(D_2+2c^2)} \lambda_1 B_1$ bzw. ... bzw. $R_1 S_k f \in$

$\frac{2c^2C}{C(D_{n+1}+2c^2)}\lambda_n B_n$.
Betrachte jetzt den anderen Term
$S_k f - R_1 S_k f = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)S_k f$. Wende die erste Ungleichung in $(P1)$ für u an ebenso wie die Abschätzung für $u|S_k f|$, um Folgendes zu erhalten

$$u(r_n)\left(\sup_{|z|=r_n}|(R_{n+2}-R_{n-1})S_k f(z)|\right) \leq C \tag{5.8}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ kann dargestellt werden als disjunkte Vereinigung $\cup_{i=1}^{n+1} J_i$ mit

$$u(r_j) = \kappa_i u_i(r_j) \text{ für jedes } j \in J_i,\ i \in \{1, ..., n+1\}.$$

Setze jetzt $g_i := \sum_{n\in J_i}(R_{n+1}-R_n)S_k f$ für $i \in \{1,...,n+1\}$. Dann ist jedes g_i ein Polynom mit $S_k f - R_1 S_k f = g_1 + g_2$. Fixiere $i \in \{1,...,n+1\}$. Sei $(S_k f)_n^i := (R_{n+2}-R_{n-1})S_k f$ für $n \in J_i$ und $(S_k f)_n^i := 0$ sonst. Die Eigenschaften der Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implizieren
$g_i = \sum_{n\in J_i}(R_{n+1}-R_n)(R_{n+2}-R_{n-1})S_k f = \sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)(S_k f)_n^i$, und alle Summen sind endlich. Daher ist

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|g_i(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)\left|\sum_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}-R_n)(S_k f)_n^i\right|.$$

Da nur endlich viele $(S_k f)_n^i$ ungleich null sind, und alle Gewichte zur Klasse $\mathcal{W}$ gehören, liefert eine Anwendung von (5.8) und $(P2)$ wie zuvor

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} u_i(z)|g_i(z)| \leq D_i(\kappa_i)^{-1}C.$$

Daher gehört g_1 zu $\frac{CD_1}{C(D_1+2c^2)}C_{\overline{w}_n}$, während g_i Element von $\frac{CD_i\lambda_{i-1}}{C(D_i+2c^2)}B_i$ für jedes $i \in \{2,...,n+1\}$ ist.. Also folgt
$S_k f \in \frac{C(D_1+2c^2)}{C(D_1+2c^2)}C_{\overline{w}_n} + \frac{D_2C}{C(D_2+2c^2)}\lambda_1 B_1 + ... + \frac{D_{n+1}C}{C(D_{n+1}+2c^2)}\lambda_n B_n \subset C_{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k B_k$
bzw. ... bzw.
$S_k f \in \frac{CD_1}{C(D_1+2c^2)}B_{\overline{w}_n} + ... + \frac{C(D_{n+1}+2c^2)}{C(D_{n+1}+2c^2)}\lambda_n B_n \subset C_{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k B_k$.
Schließlich hat man

$$S_k f \in C_{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k B_k.$$

$C_{\overline{w}_n}$ und B_i $(1 \leq i \leq n)$ sind *co*-kompakt, und wegen $S_k f \to f$ in der kompakt-offenen Topologie kann man schließen, daß auch f ein Element der Menge $C_{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k B_k$ ist. □

Der Beweis der folgenden Proposition entspricht dem von [9] Proposition B aus Abschnitt 4. Allerdings wird hier der Ernst-Schnettler-Trick durch die obige Proposition ersetzt.

5.17 Proposition. *Sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver, stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$ in der Klasse $\mathcal{W}$, so daß $\overline{V} \subset \mathcal{W}$ gilt. Dann ist $H\overline{V}(\mathbb{D})$ ein (DF)-Raum.*

Beweis. Fixiere eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt positiver Zahlen und eine Folge $(\overline{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gewichten in $\overline{V}$. Nach Lemma 5.15 genügt es zu zeigen, daß

$$W := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(C_{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k \right)$$

eine Nullumgebung in $H\overline{V}(\mathbb{D})$ ist.

Gemäß Lemma 5.16 gilt $\frac{1}{2}B \subset C_{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k$. An dieser Stelle sei

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C(D_1+2c^2)}\frac{1}{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{C(D_{k+1}+2c^2)}\frac{1}{2^{k+1}v_k} \right), \\ \overline{v}_n &:= \frac{1}{a_n}, \; n\in\mathbb{N}, \text{ und } \overline{v} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \overline{v}_n. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\overline{v}_n \leq 2\inf\left\{ \frac{C(D_2+2c^2)2^2}{\lambda_1}v_1, ..., \frac{C(D_{n+1}+2c^2)2^{n+1}}{\lambda_n}v_n, C(D_1+2c^2)\overline{w}_n \right\} \tag{5.9}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, und daher gehört $\overline{v}_n : G \to \mathbb{R}_+$ zum Nachbin-System $\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{V}}(\mathcal{V})$, das assoziiert mit $\mathcal{V}$ auf G mit der diskreten Topologie ist. (5.9) liefert ein $\overline{w} \in \overline{\overline{V}}$ und man erhält

$$\{f \in H\overline{V}(\mathbb{D});\; \overline{w}|f| \leq 1 \text{ auf } G\} \subset C_{\overline{w}_n} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Wegen [19] Abschnitt 4.2 existiert ein $\overline{v} \in \overline{V}$ mit $\overline{w} \leq \overline{v}$, und $\{f \in H\overline{V}(G);\; \overline{v}|f| \leq 1 \text{ auf } \mathbb{D}\}$ ist eine Nullumgebung in $H\overline{V}(G)$ und enthalten in W. Daher folgt die Behauptung. □

5.18 Proposition. *Sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$ in der Klasse $\mathcal{W}$, so daß $\overline{V} \subset \mathcal{W}$ gilt. Dann sind die Bedingungen $(*)$ und $(+)$ zueinander äquivalent.*

Beweis. Natürlich impliziert $(+)$ die Bedingung $(*)$.

$(*) \Longrightarrow (+)$: Wegen Satz 5.13 folgt aus Bedingung $(*)$, daß $H\overline{V}(\mathbb{D})$ die duale Dichtheitsbedingung hat. Proposition 5.17 liefert, daß $H\overline{V}(\mathbb{D})$ ein (DF)-Raum ist. Also folgt mit [17] die algebraische und topologische Gleichheit $\mathcal{V}H(\mathbb{D}) = H\overline{V}(\mathbb{D})$ und damit $(+)$ (siehe dazu Proposition 5.14). □

5.19 Korollar. *Sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$ in der Klasse $\mathcal{W}$, so daß $\overline{V} \subset \mathcal{W}$ gilt. Betrachte die folgenden Aussagen*

(a) Es gilt $H\overline{V}(\mathbb{D}) = \mathcal{V}H(\mathbb{D})$ topologisch.

(b) $H\overline{V}(\mathbb{D})$ genügt der dualen Dichtheitsbedingung.

(c) $H\overline{V}(\mathbb{D})$ erfüllt die starke duale Dichtheitsbedingung.

(d) $H\overline{V}(\mathbb{D})$ hat metrisierbare beschränkte Mengen.

(e) $H\overline{V}_0(\mathbb{D})$ erfüllt die duale Dichtheitsbedingung.

(f) $\mathcal{V}_0H(\mathbb{D})$ genügt der dualen Dichtheitsbedingung.

Dann sind die Aussagen (a) bis (d) zueinander äquivalent. Falls zusätzlich noch vorausgesetzt wird, daß $H(v_1)_0(\mathbb{D})$ die Polynome enthält, so sind alle Aussagen zueinander äquivalent.

Beweis. Nach den obigen Ausführungen sind die Bedingungen (+) und $(*)$ äquivalent. □

Im folgenden werden Beispiele für Folgen $\mathcal{V}$ gegeben, die $\overline{V} \subset \mathcal{W}$ implizieren.

5.20 Proposition. *Sei $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge strikt positiver, stetiger Funktionen auf $\mathbb{D}$. Ferner gebe es Zahlen $\varepsilon_0 > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(L1) $\quad \inf_k \frac{v_n(r_{k+1})}{v_n(r_k)} \geq \varepsilon_0$ *für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

($\overline{L2}$) Es gibt ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$v_n(r_{k+k_0}) < (1-\varepsilon_0)v_n(r_k)$$

für jedes $k \geq k_1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$.

Dann existiert zu jedem $\overline{v} \in \overline{V}$ ein $\overline{w} \in \overline{V}$, $\overline{v} \leq \overline{w}$ mit der folgenden Eigenschaft:
Es gibt eine Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen, so daß für jedes $r > 0$ ein $k(r) \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{w}(z) = \min_{1\leq n\leq k(r)} \beta_n v_n(z) \tag{5.10}$$

für jedes $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| \leq r$ existiert. Ferner gibt es $\varepsilon_2 > 0$ und $k_2 \in \mathbb{N}$ mit

(L1) $\quad \inf_k \frac{\overline{w}(r_{k+1})}{\overline{w}(r_k)} \geq \varepsilon_2$.

(L2) $\quad \limsup_{k\to\infty} \frac{\overline{w}(r_{k+k_2})}{\overline{w}(r_k)} < 1 - \varepsilon_2$.

Falls $\mathcal{V}$ *also den Bedingungen* (L1) *und* ($\overline{L2}$) *genügt, so gilt* $\overline{V} \subset \mathcal{W}$.

Beweis. Fixiere $\overline{v} \in \overline{V}$. Dann gibt es $\overline{w} \in \overline{V}$ mit $\overline{v} \leq \overline{w}$ und (5.10). Zeige nun, daß $\overline{w}$ die Eigenschaften (L1) und (L2) hat. Wähle $\varepsilon_2 := \varepsilon_0$ und $k_2 := k_0$. Um (L1) zu zeigen, fixiere $k \in \mathbb{N}$ und beweise

$$\varepsilon_2 \overline{w}(r_k) \leq \overline{w}(r_{k+1}).$$

Wähle nun $0 < r_{k+1} < s < 1$. Dann gilt

$$\overline{w}(z) = \min_{1\leq n\leq k(s)} \beta_k v_k(z) \text{ für } z \in \mathbb{D} \text{ mit } |z| \leq s.$$

Führe eine Fallunterscheidung durch:
<u>1. Fall:</u> Es gelte $\overline{w}(r_k) = \beta_j v_j(r_k)$ und $\overline{w}(r_{k+1}) = \beta_j v_j(r_{k+1})$. Dann erhält man

$$\varepsilon_2 \overline{w}(r_k) = \varepsilon_2 \beta_j v_j(r_k) \leq \beta_j v_j(r_{k+1}) = \overline{w}(r_{k+1}).$$

<u>2. Fall:</u> Man habe $\overline{w}(r_k) = \beta_j v_j(r_k)$ und $\overline{w}(r_{k+1}) = \beta_l v_l(r_{k+1})$. Es folgt

$$\varepsilon_2 \overline{w}(r_k) = \varepsilon_2 \beta_j v_j(r_k) \leq \beta_j v_j(r_{k+1}) \leq \beta_l v_l(r_{k+1}) = \overline{w}(r_{k+1}).$$

Daher ist $\inf_k \frac{\overline{w}(r_k)}{\overline{w}(r_{k+1})} \geq \varepsilon_2$. Damit ist (L1) erfüllt.

Es bleibt, (L2) zu zeigen. Dazu ist zu beweisen, daß es $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für jedes $k \geq N_0$ die Ungleichung

$$\overline{w}(r_{k+k_2}) < (1 - \varepsilon_0)\overline{w}(r_k)$$

erfüllt ist. Nach Voraussetzung existiert $k_1 \in \mathbb{N}$, so daß für jedes $k \geq k_1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(r_{k+k_2}) < (1 - \varepsilon_2) v_n(r_k)$$

gilt. Fixiere nun $k \geq k_1$ und wähle $0 < k + k_2 < s < 1$. Dann gilt

$$\overline{w}(z) = \min_{1\leq n\leq k(s)} \beta_n v_n(z) \text{ für jedes } z \in \mathbb{D} \text{ mit } |z| \leq s.$$

Setze jetzt $N_0 := k_1$ und unterscheide die folgenden beiden Fälle:
<u>1. Fall:</u>
Man habe $\overline{w}(r_{k+k_2}) = \beta_j v_j(r_{k+k_2})$ und $\overline{w}(r_k) = \beta_j v_j(r_k)$. Dies impliziert

$$\overline{w}(r_{k+k_2}) = \beta_j v_j(r_{k+k_2}) \leq (1 - \varepsilon_2)\beta_j v_j(r_k) = (1 - \varepsilon_2)\overline{w}(r_k).$$

2. Fall:
Es gelte $\overline{w}(r_{k+k_2}) = \beta_j v_j(r_{k+k_2})$ und $\overline{w}(r_k) = \beta_l v_l(r_k)$. Dann folgt

$$\overline{w}(r_{k+k_2}) = \beta_j v_j(r_{k+k_2}) \leq (1-\varepsilon_2)\beta_j v_j(r_k) \leq (1-\varepsilon_2)\beta_l v_l(r_k) = (1-\varepsilon_2)\overline{w}(r_k).$$

Folglich hat $\overline{w}$ die Bedingung (L2). $\square$

5.21 Beispiel. Betrachte die Folge $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$v_n(z) := (1-|z|)^k \frac{1}{|\ln((1-|z|)^n)|},\ z \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}.$$

Wähle $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ und $k_0 = 1$. Dann gilt

$$\frac{v_n(r_{k+1})}{v_n(r_k)} = \frac{2^{-k-1}\ln(2^{-nk})}{2^{-k}\ln(2^{-n(k+1)})} = \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} \geq \frac{1}{4},$$

und mit $k_1 := 1$ erhält man

$$\frac{v_n(r_{k+1})}{v_n(r_k)} = \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} \leq \frac{1}{2} < \left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

Damit sind $(L1)$ und $(\overline{L2})$ erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] I. Amemiya. Some examples of (F) and (DF) spaces. *Proc.Japan Acad.*, 33:169–171, 1957.

[2] J.M. Andersen and J.Duncan. Duals of Banach spaces of entire functions. *Glasgow Math. J.*, 32:215–220, 1990.

[3] F. Bastin. Weighted spaces of continuous functions. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 59(1):1–81, 1990.

[4] F. Bastin. Distinguishedness of weighted Fréchet spaces of continuous functions. *Proc. Edinb. Math. Soc.(2)*, 35(2):271–283, 1992.

[5] C.A. Berenstein and R. Gay. *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*. Springer-Verlag Berlin, 1995.

[6] K.D. Bierstedt. Injektive Tensorprodukte und Slice-Produkte gewichteter Räume stetiger Funktionen. *J. Reine Angew. Math.*, 266:121–131, 1974.

[7] K.D. Bierstedt. A survey of some results and open problems in weighted inductive limits and projective description for spaces of holomorphc functions. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 70(4-6):167–182, 2002.

[8] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Dual density conditions in (DF)-spaces I. *Results Math*, 14(3-4):242–274, 1988.

[9] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Dual density conditions in (DF)-spaces II. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 57(6):567–589, 1988.

[10] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Stefan Heinrich's density condition and the characterization of the distinguished Köthe echelon spaces. *Math. Nachr.*, 135:149–180, 1988.

[11] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Density conditions in Fréchet and (DF)-spaces. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 2(Num. suplem.):59–75, 1989.

[12] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Biduality in Fréchet and (LB)-spaces. *Progress in Functional Analysis, Proc. Int. Meet. Occas. 60th Birthd. M. Valdivia, Peñíscola/Spain, North-Holland Math. Studies*, 170:113–133, 1992.

[13] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Biduality in (LF)-spaces. *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math.*, 95(2):171–180, 2001.

[14] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Projective description of weighted (LF)-spaces of holomorphic functions on the disc. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 46(2):435–450, 2003.

[15] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Some aspects of the modern theory of Fréchet spaces. *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math.*, 97(2):159–188, 2003.

[16] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Manuskript. *in Vorbereitung*, 2004.

[17] K.D. Bierstedt, J. Bonet, and A. Galbis. Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains. *Michigan Math. J.*, 40(2):271–297, 1993.

[18] K.D. Bierstedt, J. Bonet, and J. Taskinen. Associated weights and spaces of holomorphic functions. *Studia Math.*, 127(2):137–168, 1998.

[19] K.D. Bierstedt and R. Meise. Distinguished echelon spaces and the projective description of weighted inductive limits of type $V_dC(X)$. *Aspects of Mathematics and its Applications*, pages 169–226, 1986.

[20] K.D. Bierstedt, R. Meise, and W.H. Summers. A projective description of weighted inductive limits. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 272:107–160, 1982.

[21] J. Bonet. On weighted inductive limits of spaces of continuous functions. *Math. Z.*, 192:9–20, 1986.

[22] J. Bonet. A question of Valdivia on quasinormable Fréchet spaces. *Canad. Math. Bull*, 34(3):301–304, 1991.

[23] J. Bonet and J.A. Conejero. The sets of monomorphisms and of almost open operators between locally convex spaces. *Proc. Am. Math. Soc.*, 129(12):3683–3690, 2001.

[24] J. Bonet and S. Dierolf. On distinguished Fréchet spaces. *Progress in Functional Analysis, Proc. Int. Meet. Occas. 60 th Birthd. M. Valdivia, Peñíscola/Spain, North-Holland Math. Stud.*, 170:201–214, 1992.

[25] J. Bonet and R. Meise. Ultradistributions of Roumieu type and projective description. *J. Math. Anal. Appl.*, 255(1):122–136, 2001.

[26] J. Bonet and S.N. Melikhov. Interpolation of entire functions and projective descriptions. *J. Math. Anal. Appl.*, 205:454–460, 1997.

[27] J. Bonet and J. Taskinen. The subspace problem for weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions. *Mich. Math. J.*, 42(2):259–268, 1995.

[28] J. Bonet and D. Vogt. Weighted spaces of holomorphic functions and sequence spaces. *Note Mat.*, 17:87–97, 1997.

[29] J. Bonet and E. Wolf. A note on weighted Banach spaces of holomorphic functions. *Arch. Math.*, 81(6):650–654, 2003.

[30] R.W. Braun, R. Meise, and B.A. Taylor. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis. *Results Math.*, 17:206–237, 1990.

[31] R.W. Braun, R. Meise, and D. Vogt. Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions. *Proc. London Math. Soc.*, 61:344–370, 1990.

[32] R.W. Braun, R. Meise, and D. Vogt. Characterization of linear partial differential operators with constant coefficients which are surjective on non-quasianalytic classes of Roumieu type on R^n. *Math. Nachr.*, 168:19–54, 1994.

[33] C. Cowen and B. MacCluer. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions.* CRC Press, 1995.

[34] L. Ehrenpreis. *Fourier Analysis in Several Complex Variables.* Pure and Applied Mathematics. 17. New York etc.: Wiley-Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons. XIII, 1970.

[35] O.E. Epifanov. Duality of some pair of spaces of analytic functions of restricted growth. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, 319(6):1297–1300, 1991.

[36] J.-P. Ferrier. *Spectral Theory and Complex Analysis.* Notas de Matemática 49, North-Holland Math. Studies 4, 1973.

[37] K. Floret. Some aspects of the theory of locally convex inductive limits. *North-Holland Math. Stud.*, 38:205–237, 1980.

[38] K. Floret and J. Wloka. *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*, volume 56. Springer Lecture notes, 1968.

[39] H.G. Garnir, M. De Wilde, and J. Schmets. *Analyse fonctionnelle I.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1968.

[40] A. Grothendieck. Sur les espaces (F) et (DF). *Summa Brasil Math.*, 3:57–123, 1954.

[41] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu. *Theory of Bergman Spaces.* Graduate Texts in Mathematics 199 New York, Springer-Verlag, 2000.

[42] S. Heinrich. Ultrapowers of locally convex spaces and applications I. *Math. Nachr.*, 118:285–315, 1984.

[43] W.D. Heinrichs. The density condition and the dual density condition by operator. *Collect. Math.*, 48(3):321–337, 1997.

[44] K. Hoffman. *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice-Hall, Inc., 1962.

[45] S. Holtmanns. Operator Representation and Biduals of Weighted Function Spaces, dissertation. 2000.

[46] L. Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* North-Holland Mathematical Library 7, Amsterdam, 1990.

[47] J. Horváth. *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[48] H. Jarchow. *Locally Convex Spaces.* Teubner Stuttgart, 1981.

[49] N. Kalton and D. Werner. Property (M), M-ideals and almost isometric structure of Banach spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 461:137–178, 1995.

[50] G. Köthe. *Topologische lineare Räume I.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 107, Springer-Verlag, 1966.

[51] G. Köthe. *Topological Vector Spaces II.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 237, Springer-Verlag, 1979.

[52] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I.* Berlin, 1977.

[53] W. Lusky. On weighted spaces of harmonic and holomorphic functions. *J. London Math. Soc.(2)*, 51(2):309–320, 1995.

[54] P. Mattila, E. Saksman, and J. Taskinen. Weighted spaces of harmonic and holomorphic functions: Sequence space representations and projective desriptions. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 40(1):41–62, 1997.

[55] S.N. Melikhov. (DFS)-spaces of holomorphic functions invariant under differentiation. *Preprint*, 2004.

[56] L. Nachbin. On weighted polynomial approximation in a locally compact space. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 47:1055–1957, 1961.

[57] L. Nachbin. Weighted approximation for algebras and modules of continuous functions: real and self-adjoints complex cases. *Ann.of Math.*, 81(2):289–302, 1965.

[58] L. Nachbin. *Elements of Approximation Theory.* Math. Studies 14, Van Nostrand, 1967.

[59] P. Pérez-Carreras and J. Bonet. *Barrelled Locally Convex Spaces.* North-Holland Mathematics Studies, 131. Notas de Matemática (113). Amsterdam etc., 1987.

[60] A. Peris. Some results on Fréchet spaces with the density condition. *Arch. Math. (Basel)*, 59:286–293, 1992.

[61] A. Peris. Quasinormable spaces and the problem of topologies of Grothendieck. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Math.*, 19(1):167–203, 1994.

[62] A. Peris and M.J. Rivera. Localization of bounded sets in tensor products. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 9(1):111–130, 1996.

[63] H.H. Schaefer. *Topological Vector Spaces.* Graduate Texts in Mathematics 3, Springer-Verlag, 1971.

[64] L. Schwartz. Espaces de foncions différentiables à valeurs vectorielles. *Journal d'Analyse Math.*, 4:88–148, 1954-1956.

[65] W.H. Summers. Dual spaces of weighted spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 151:323–333, 1970.

[66] B.A. Taylor. Some locally convex spaces of entire functions. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 11:431–467, 1968.

[67] B.A. Taylor. A seminorm topology on some (DF)-spaces of entire functions. *Duke Math.J.*, 38:379–385, 1971.

[68] J. Wloka. *Grundräume und verallgemeinerte Funktionen*, volume 82. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin-New York, 1969.

[69] P. Wojtaszczyk. *Banach Spaces for Analysts.* Cambridge University Press, 1991.