

Analyse nichtglatter dynamischer Systeme mit mengenorientierten Methoden am Beispiel eines Ultraschall-Stoßbohrsystems

zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)

der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Paderborn

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Nicolai Neumann

aus Bad Vilbel

Referent:	Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek
Korreferent:	Prof. Dr. Michael Dellnitz
Tag der Einreichung:	11. Oktober 2007
Tag der mündlichen Prüfung:	2. Juni 2008

Vorwort

Die Arbeiten für die vorliegende Dissertationsschrift führte ich während meiner dreijährigen Stipendienzeit ab 1. September 2003 als Stipendiat des PaSCo-GKs (DFG Graduiertenkolleg Wissenschaftliches Rechnen des Paderborn Institute for Scientific Computation: Anwendungsorientierte Modellierung und Algorithmenentwicklung) und wissenschaftlicher Mitarbeiter des Lehrstuhls für Mechatronik und Dynamik am Heinz Nixdorf Institut (HNI) der Universität Paderborn und einem weiteren, vierten Jahr durch.

Zu zweierlei Gruppierungen durfte ich mich dazuzählen — einerseits zu meiner der Fakultät für Maschinenbau angehörenden Fachgruppe, andererseits zum Graduiertenkolleg mit seinem Schwerpunkt in Mathematik, Ingenieurwissenschaften und Informatik. So genoss ich Betreuung und Austausch, Beratung und Diskussion in beiden Disziplinen, der Mechanik und der Mathematik, die beide wissenschaftliche Handwerkszeuge meiner Arbeit sind.

Dankend möchte ich die DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft) nennen, die meine Forschung über das PaSCo mit einem Stipendium und der Finanzierung einer wissenschaftlichen Hilfskraft für das letzte halbe Jahr angenehm gemacht hat sowie zusammen mit der Fachgruppe Mechatronik und Dynamik des HNIs die Teilnahme und Mitwirkung an Fachkonferenzen ermöglicht hat. Umfangreiche Laborausstattung, Werkstatt und Rechnercluster wurden mir vom HNI zur Verfügung gestellt.

Fachliche Konsultation erhielt ich auf der Seite des Maschinenbaus durch meinen Doktorvater und Fachgebietsleiter Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek und Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel. Besonders möchte ich hier Thomas Sattel erwähnen, der mein Interesse auf die Forschungsarbeiten im Heinz Nixdorf Institut lenkte. Er hat mich wissenschaftlich mit großem Engagement bis zuletzt durch meine Dissertationszeit begleitet und oft wichtige, motivierende Impulse gegeben.

Fachliche Unterstützung für die faszinierenden mathematischen Belange meiner Arbeit erhielt ich durch den Sprecher des PaSCo und meinen Zweitgutachter Prof. Dr. Michael Dellnitz und maßgeblich auch durch Prof. Dr. Oliver Junge, Mitbegründer und Entwickler der mengenorientierten numerischen Methoden und ihrer Algorithmen.

Meinen Dank möchte ich auch an all jene richten, die mir während meiner Zeit in Paderborn begegnet sind und Diskussionspartner, Ideengeber,

Helfer oder Ratgeber waren, im Besonderen an Jens Twiefel, mit dem ich einige mechanische Modelle und Lösungsansätze erörterte, meine sehr angenehmen Bürokollegen Björn Richter und Dr. Jia Du, Christian Potthast, Stefan Sertl, der mir das Softwarepaket GAIO (Global Analysis of Invariant Objects) mehrfach kompilierte und mit mir geduldig oft Algorithmen und Ergebnisse besprach, Dr. Kathrin Padberg, Mirko Hessel von Molo, Dr. Marcus Post, Dr. Martin Ziegler, Dr. Sina Ober-Blöbaum, Dr. Tobias Hemsel, Martin Liekenbröcker, Wilfried Bröckelmann, Dr. Walter Littmann, Carmelo Quirante Kneba, Marina Kassühlke, Kerstin Hille, Begona Nasarre, Axel Keller für die freundliche Hilfe mit der Bedienung des Hochleistungsrechners Arminius des PC²s, Axel Betanski, Dr. Markus Hohenhaus vom Rechnerbetrieb des HNI, an meinen Freund und Kommilitonen Dr. Tobias Niemz, der ein weiterbringendes Dissertationstreffen initiierte.

Abschließend gebührt meiner Freundin und Verlobten Rebekka Oeters ein sehr großer Dank für ihre qualitative, wertvolle, unermüdliche und ausdauernde Unterstützung, motivierende Hilfe und ihr Mitdenken und Korrekturlesen.

Die wichtigsten Personen aber, denen ich unermesslich danke, ohne die diese Arbeit nie entstanden wäre, sind meine Eltern Elisabeth Neumann-Beuerle und Karl-Christoph Neumann, die mir durch ihre dreißigjährige, überallhin begleitende Unterstützung zu dieser Würde der Promotion verhalfen.

Baunatal, im Juli 2008

Nicolai Neumann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Begriffsdefinition nichtlineares und nichtglattes System	1
1.2	Dynamische Systeme nichtglatter Charakteristik	3
1.3	Analyse nichtglatter dynamischer Systeme	4
1.4	Zielsetzung	5
1.5	Vorgehensweise	6
2	Mengenorientierte numerische Methoden	7
2.1	Invariante Mengen und globale Attraktoren	8
2.2	Approximation relativer globaler Attraktoren	10
2.3	Aufenthaltswahrscheinlichkeiten	13
3	Ultraschall-Stoßbohrer	17
3.1	Entwicklung des Ultraschall-Stoßbohrers	17
3.2	Aufbau des Ultraschall-Stoßbohrers	18
4	Modellierung und Analyse nichtglatter Dynamik — Stand der Technik	21
4.1	Klassische Methoden zur Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme	22
4.1.1	Zeitreihenanalyse	22
4.1.2	Phasenportrait	22
4.1.3	Periodische Punkte und Fixpunkte	23
4.1.4	Ljapunov-Stabilität und Ljapunov-Exponent	23
4.1.5	Poincaré-Abbildung	24
4.1.6	Verzweigungs- oder Bifurkationsdiagramm	24
4.1.7	Einzugsgebiet	24
4.2	Zellabbildungsmethoden	25
4.3	Modellierung von Schwingstoßsystemen	27
5	Modellierung	31
5.1	Herleitung eines Modells 2. Ordnung	34
5.1.1	Zeitdiskrete Modellierung	34
5.1.2	Herleitung zeitdiskreter Bewegungsgleichungen	36
5.1.3	Notwendigkeit transzendenter Bewegungsgleichungen	38
5.1.4	Mehrfachstöße	39

5.2	Herleitung eines verfeinerten zeitdiskreten Modells	40
5.2.1	Aufstellen des verfeinerten Modells 4. Ordnung	41
5.2.2	Berechnung des Stoßzeitpunktes t_{k+1}	43
5.2.3	Berechnen der verbleibenden Zustandsgrößen	46
5.2.4	Zusammenfassung des Stoßkontaktmodells 4. Ordnung	48
5.3	Algorithmus zum Lösen transzendenter Stoßgleichungen	49
6	Verhalten des Stoßbohrers	53
6.1	Experimentelle Untersuchungen am Schwingstoßprüfstand	53
6.1.1	Aufbau des Schwingstoßprüfstands	53
6.1.2	Messtechnik	56
6.1.3	Stoßzahlen aus Labormessungen	61
6.2	Simulation des Modells 2. Ordnung	63
6.2.1	Analytische Fixpunktbestimmung	63
6.2.2	Periodische und chaotische Lösungen	65
6.2.3	Bifurkationsanalyse	68
6.3	Experimentelle Untersuchungen am Stoßbohrer	73
6.3.1	Prüfstand für Messungen am Stoßbohrer	73
6.3.2	Messergebnisse am Stoßbohrer	75
6.4	Simulation des Modells 4. Ordnung	75
6.5	Vergleich von Modellen und Messungen	78
7	Analyse mit mengenorientierten Methoden	83
7.1	Analyse des Stoß-Modells 2. Ordnung	84
7.1.1	Der zylindrische Zustandsraum	84
7.1.2	Bestimmung eines relativen globalen Attraktors	86
7.1.3	Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten	87
7.1.4	Analyseergebnisse aus Aufenthaltswahrscheinlichkeiten	89
7.1.5	Analyseergebnisse aus Einzugsgebieten	94
7.2	Analyse des Stoß-Modells 4. Ordnung	97
7.2.1	Approximation des relativen globalen Attraktors	97
7.2.2	Analyseergebnisse und Diskussion	99
8	Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick	105
8.1	Zusammenfassung	105
8.2	Diskussion der Ergebnisse	106
8.3	Ausblick	108

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Dissertationsschrift betrachtet die Anwendung und den Einsatz der „mengenorientierten numerischen Methoden“. Dadurch leistet sie einen Beitrag, diese Methoden in den ingenieurwissenschaftlichen Bereichen stärker zum Einsatz zu bringen und ihren Bekanntheitsgrad zu erhöhen.

Exemplarisch wird im Rahmen dieser Arbeit ein System mit nichtglatten Eigenschaften aus der realen Ingenieurwelt herangezogen. Hierbei handelt es sich um ein Ultraschall-Stoßbohrsystem, welches durch seine nichtlineare Dynamik, die durch die auftretenden Kontaktwechsellvorgänge insbesondere nichtglatten Charakter besitzt, ein Beispiel aus einer herausragenden Klasse von Systemen darstellt.

In Kapitel 1.1 erkläre ich zunächst die Begriffe *linear/nichtlinear* und die Unterscheidung in *glatt/nichtglatt* — für Leser, denen diese Termini im Kontext dynamischer Systeme nicht geläufig sind.

Danach gebe ich einen Überblick über die spezielle Gruppe nichtglatter dynamischer Systeme und gehe auf deren Analysemöglichkeiten ein. Schließlich präsentiere ich in den weiteren Unterkapiteln die Zielsetzung und Vorgehensweise und erläutere sukzessive den Aufbau der folgenden Arbeit.

1.1 Begriffsdefinition nichtlineares und nicht-glattes System

Linear / nichtlinear

In einem *linearen* Modell, das ein physikalisches Phänomen oder einen physikalischen Zusammenhang beschreibt, hängt eine Systemgröße — z. B. die mechanische Spannung in einem Bauteil — in linearer Weise, also proportional von einer zweiten Systemgröße — etwa der Dehnung — ab (siehe Bild 1.1). Diese Abhängigkeit lässt sich in Form linearer Modellgleichungen mathematisch beschreiben. In einem kartesischen Koordinatensystem werden lineare Abhängigkeiten durch gerade Linien dargestellt. Nichtlinearitäten werden nicht durch lineare, sondern durch gekrümmte, also z. B. in ihrer Steigung zunehmende Kurven beschrieben. Zum Basiswissen der Ingenieurwissenschaften gehören heute gängige

Techniken, um das Verhalten solcher linearen Modelle untersuchen und simulieren zu können. Vergleiche mit Labormessungen, die das Verhalten eines realen, physikalischen Systems wiedergeben, weisen jedoch in vielen Fällen die Existenz von Phänomenen auf, die mit linearen, die Realität vereinfachenden Modellen, nicht abgebildet werden können. Tragen diese Phänomene wesentlich zur Funktion eines Mechanismus bei oder muss man ihr Auftreten gezielt beeinflussen oder gar verhindern können, so wird es unerlässlich, die auf sogenannten Nichtlinearitäten beruhenden Eigenschaften in die Modellgleichungen mit aufzunehmen. *Nichtlinear* bedeutet allgemein, dass es keinen linearen Zusammenhang zwischen verschiedenen physikalischen Systemgrößen und ihren Ableitungen gibt: eine Systemgröße ist nicht „einfach“ das Vielfache einer ihrer Ableitungen oder Integrale oder einer anderen Systemgröße, sondern sie, eine ihrer Ableitungen oder Integrale kann in Differentialgleichungen als Argument einer nichtlinearen Funktion (z. B. Polynom zweiter oder höherer Ordnung, Exponential-, Logarithmus- oder trigonometrische Funktion) auftreten oder z. B. in einem Produkt von Zustandsgrößen mit deren Ableitungen oder Integralen enthalten sein. Als eine von vielen möglichen Beispielen hierzu sei die Arbeit von Neumann [Neumann 2002] genannt, in der lange Zeit nicht berücksichtigte, nichtlineare Effekte in den Längsschwingungen axial polarisierter, piezoelektrischer Keramiken experimentell nachgewiesen und in Modellgleichungen mit nichtlinearen Termen umgesetzt wurden.

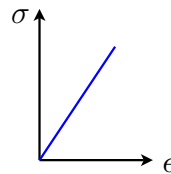


Bild 1.1: Beispiel für einen linearen Zusammenhang von Systemgrößen: Spannungs-Dehnungs-Diagramm (elastischer Bereich)

Glatt / nichtglatt

Auf einen Spezialfall nichtlinearer Systeme soll innerhalb dieser Arbeit besonderes Gewicht gelegt werden. Es sind sogenannte *nichtglatte* dynamische Systeme.

In *glatten* Systemen lässt sich das Zusammenwirken von Systemgrößen durch glatte Kurven veranschaulichen. Glatt bedeutet, die Kurven sind kontinuierlich, d. h. zusammenhängend, und stetig differenzierbar, d. h. ohne Knick. Die Charakteristika nichtglatter Systeme dagegen können Knicke oder gar Sprünge enthalten.

Mathematisch definierend ist eine Funktion innerhalb eines Intervalls dann *glatt*, wenn alle ihre Ableitungen innerhalb diesen Intervalls kontinuierlich sind, d. h. keinen Sprung besitzen. Glatte Funktionen gehören somit

der Differenzierbarkeitsklasse C^∞ an.

Ein offensichtliches Beispiel für eine Vielzahl nichtglatter Systeme sind sämtliche Mechanismen, in denen Stoßprozesse stattfinden. Während eines Stoßes ändert ein Körper abrupt seinen Bewegungszustand (siehe Bild 1.2). Seine Geschwindigkeit macht einen Sprung. Der Zeitverlauf der Position des Körpers erhält dabei einen Knick.

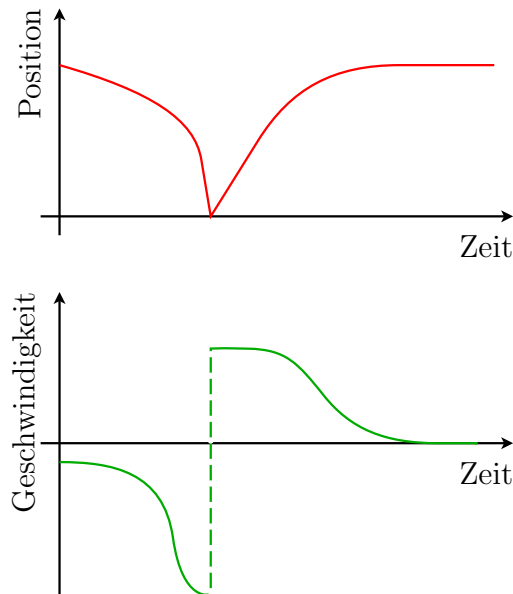


Bild 1.2: Sprunghafte Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers

1.2 Dynamische Systeme nichtglatter Charakteristik

Nahezu alle Systeme, die heutzutage in Forschung und Wissenschaft — besonders in den Ingenieurwissenschaften — eine Rolle spielen, sind durch nichtlineare Eigenschaften geprägt. In einigen Fällen ist es legitim, diese Nichtlinearitäten zu vernachlässigen. Häufig ist es jedoch sinnvoll, sie in die Modellierung der Systeme mit aufzunehmen, wenn sie deren qualitatives Verhalten entscheidend mitbestimmen.

Eine besondere Untergruppe der Systeme mit nichtlinearem Verhalten bilden solche Systeme, in denen nichtglatte Eigenschaften auftreten. Ursachen dafür können die oben erwähnten Kontaktwechsel sein. Diese können erwünscht (z. B. in Stoßbohrern) oder unerwünscht (z. B. Zahneingriffstöße in Getrieben) sein. Oder man denke an Tankschiffe, die an Hochseebojen vor Ölbohrplattformen vertaut werden. Periodische Anregung durch vorbeiziehende Wellenzüge und die wechselnde Elastizität der Taue können zu unerwarteten und unerwünschten Bewegungen führen. Die Steifigkeit der Taue hängt hierbei in sprunghafter Weise davon ab, ob sie unter Spannung stehen oder schlaff durchhängen. Der Übergang zwischen diesen beiden benachbarten Zuständen ist durch einen Knick in der Elastizitätskurve der Vertauung (Rückstellkraft über Auslenkung) gekennzeichnet.

Eine weitere Gruppe von Systemen mit sehr offensichtlichen nichtglatten Eigenschaften sind all jene, in denen Stoßvorgänge wesentlich zur Funktionsweise beitragen, wie etwa sämtliche hämmernden Schlagbohrprozesse. Hier findet während des Stoßes ein Übergang einer freien (evtl. linearen) Bewegung hin zu einem Kontakt statt. Je nach Art der Modellbildung lässt sich dieses Verhalten wie beim Hochseetankschiff z. B. durch eine Steifigkeit nachbilden, die in Abhängigkeit einer Systemgröße — hier der Auslenkung — ihren Wert sprunghaft ändert. Häufig findet man in der Literatur zur Beschreibung solcher Stöße den Einsatz der Stoßzahlhypothese nach Newton, nach der die Geschwindigkeit des Stoßkörpers oder beider Stoßpartner im Stoßaugenblick schlagartig ihren Wert ändert.

1.3 Analyse nichtglatter dynamischer Systeme

Im Prozess der Entwicklung, Gestaltung, Auslegung und Optimierung von Systemen aus der Mechanik, dem Maschinenbau und der Elektrotechnik ist stets ein eingehendes Verständnis des Systemverhaltens unerlässlich. Hierfür sind Schritte zum Modellieren des realen Verhaltens und schließlich zum Analysieren wesentliche und immer wiederkehrende Bestandteile. Zur Simulation nichtlinearen Verhaltens muss von Fall zu Fall abgewogen werden, welche der bewährten Methoden zur Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen zur Anwendung kommen können oder ob es zulässig ist, Nichtlinearitäten durch Linearisieren zu vernachlässigen. Oft wird die letzte Vorgehensweise verwendet, da für die Analyse linearer Systeme robuste und bewährte Techniken vorliegen. Hierbei nimmt der Ingenieur jedoch in Kauf, wesentliche Eigenschaften seines Systems, die allein auf die Nichtlinearitäten zurückzuführen sind, zu verlieren.

Noch schwieriger wird es, wenn ein Extremfall von nichtlinearen Kennkurven das Systemverhalten beeinflusst, nämlich wenn nichtglatte Effekte mit im Spiel sind: einige Methoden, die für die Untersuchung nichtlinearen Verhaltens anwendbar sind, sind nur auf glatten Teilbereichen einsetzbar. Zwar besteht die Möglichkeit, nichtglatte Kennlinien z. B. durch die Arkustangens-Funktion¹ zu glätten, doch solches Vorgehen kann zum Verlieren oder Verfälschen wesentlicher Effekte führen.

Die Reihe der zur Verfügung stehenden Methoden wurde in den letzten Jahren um die sogenannten *mengenorientierten numerischen Methoden* erweitert. Sie ähneln den *Zellabbildungsmethoden*, die Hsu seit den 80er Jahren in Berkeley entwickelt [Hsu 1980]. Hsu behandelt die Zustandsgrößen nicht als Kontinua, sondern als diskrete Größen, die er in *Zellen* einteilt. Einen Unterraum des n -dimensionalen Zustandsraumes diskretisiert er in

¹Die Funktion $f(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan ax$ konvergiert punktweise gegen die Vorzeichenfunktion $\text{signum}(x)$, die an der Stelle $x = 0$ von -1 nach 1 springt. Für große a gibt $\frac{2}{\pi} \arctan ax$ näherungsweise die Sprungfunktion in glatter Weise wieder und besitzt alle Ableitungen, gehört also der Differenzierbarkeitsklasse C^∞ an.

viele, kleine n -dimensionale Zellen. Die Zellabbildungsmethoden werden in Unterkapitel 4.2 vorgestellt.

Die mengenorientierten Methoden liefern eine vielversprechende Weiterentwicklung des Konzepts von Hsu. Da sie durch einen effektiven Unterteilungsalgorithmus nur denjenigen Zustandsbereich fein diskretisieren, in dem die Dynamik des Systems stattfindet, verhält sich ihr Rechenaufwand nicht wie die Anzahl der Zustandsraumdimensionen, sondern wird durch die (unter Umständen fraktale) Dimensionsgröße der Mannigfaltigkeiten² oder Attraktoren des Systems bestimmt. Dies kann zu einer erheblichen Rechenersparnis führen. Dennoch entfalten die mengenorientierten Methoden ihr Potential besonders mit dem Aufkommen immer leistungsfähigerer Rechenmaschinen. In die Grundlagen dieser Methoden wird Kapitel 2 einführen.

1.4 Zielsetzung

Exemplarisch für den oben vorgestellten Systemtypus mit nichtglatter Verhalten soll im Rahmen dieser Arbeit ein spezieller Ultraschall-Stoßbohrer untersucht werden. Das allein auf Stoßvorgängen beruhende Bohrkonzzept ist auf eine große Klasse von Systemen mit Stoß- oder nichtglatten Vorgängen übertragbar. Der Bohrer, der erst vor wenigen Jahren entwickelt wurde, wird in **Kapitel 3** im Detail vorgestellt. Obgleich seine Funktion unter Laborversuchen nachgewiesen werden konnte, gibt es bislang nur wenige Arbeiten, die sich auf theoretischer Ebene mit seinem Funktionsprinzip beschäftigen [Badescu et al. 2005], [Neumann et al. 2007], [Potthast et al. 2007a]. Ein tiefgehendes Verständnis der mechanischen Prinzipien, die die Funktion des Stoßbohrsystems ausmachen, ist bislang nicht bekannt. Mit mengenorientierten numerischen Methoden, die in **Kapitel 2** beschrieben werden, soll ein Beitrag in Richtung eines tieferen Verständnisses des Funktionsprinzips erreicht werden. Ein Bestandteil dieser Arbeit ist, neben der Einführung und Vorstellung der relativ jungen Methoden, ihre Anwendung auf das vorgeschlagene, nichtglatte Stoßsystem zu demonstrieren und ihren Beitrag zum globalen Systemverständnis eines Bohrprozesses zu betrachten. In Ergänzung der Analyse mit mengenorientierten Methoden werden dazu Vorgehensweisen angewandt, die in der Untersuchung nichtlinearer Modelle gängig sind. Hierzu wird eine Bifurkationsanalyse der Dynamik in Abhängigkeit von Systemparametern durchgeführt. Ziel ist es, Fixpunkte zu identifizieren sowie deren Periodizität und Stabilitätsverhalten zu berechnen. Weiterhin ist zu prüfen, ob es Bereiche mit koexistierenden Lösungen gibt, für die ggf. Einzugsgebiete zu berechnen sind.

Für die angestrebten Untersuchungen ist die Dynamik einer freien Stoßmasse als wesentliche Komponente aus dem Inneren des Bohrsystems zu analysieren. In realen Laborversuchen sind die theoretisch gewonnenen Ergebnisse schließlich mit experimentellen Resultaten zu vergleichen.

²die Mannigfaltigkeit: Der Begriff der *Mannigfaltigkeit* verallgemeinert den Begriff der *Fläche* im Raum, welche man sich als verbogenes Stück eines deformierbaren Materials vorstellen kann, wie z. B. eine Kugel- oder Torusoberfläche. [Brockhaus 1989]

1.5 Vorgehensweise

Die weiteren Kapitel sind wie folgt aufgebaut: **Kapitel 4** gibt zunächst einen Überblick über klassische Analysetechniken für nichtlineare Systeme, die langjährige Forschungsthemen in Mathematik und Mechanik sind und ebenfalls für nichtglatte Systeme Bedeutung haben. Es enthält daraufhin Erläuterungen zu Arbeiten, die der modernen Wissenschaft der Systemanalyse entstammen und solche, die speziell für nichtglatte Systeme entwickelt wurden. Schließlich beschreibt Kapitel 4 Arbeiten, die wichtige Ansätze zur modellhaften Formulierung von Schwingstoßsystemen geben.

Bevor eine numerische, auf mathematischen Algorithmen basierende Methode auf ein reales System angewandt werden kann, ist es nötig, die Realität bis auf ihre wesentlichen Bestandteile zu abstrahieren und mittels mathematischer Gleichungen zu formulieren. Dieser Schritt der Modellierung geschieht für die Dynamik im hier untersuchten Bohrprozess in **Kapitel 5**. Es werden zwei Modelle unterschiedlicher Verfeinerungsstufen und Ordnungen vorgeschlagen.

Modellsimulationen sind Thema in **Kapitel 6**. Hier wird das dynamische Verhalten in der Theorie anhand von periodischen und chaotischen Zeitreihen und in Bifurkationsdiagrammen besprochen. Der Theorie werden danach experimentelle Studien an vergleichbaren Laborsystemen gegenübergestellt, um die Güte der Modellbildung bewerten und Annahmen validieren zu können.

In **Kapitel 7** schließlich wird die eigentliche Analyse der Modelle vollzogen: die mengenorientierten numerischen Methoden demonstrieren ihr Potential im Einsatz auf nichtglatte Systeme. Dazu werden relative globale Attraktoren berechnet, die die statistische Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Auftreten sämtlicher möglicher Zustände der Attraktoren wiedergeben. Dies vermittelt ein globales Bild der den Systemen zugrundeliegenden Dynamik.

Enden wird die vorliegende Arbeit mit einer abschließenden Zusammenfassung und Bewertung des Beitrags der eingesetzten Methoden auf nichtglatte Systeme und einem Ausblick in **Kapitel 8**.

Kapitel 2

Mengenorientierte numerische Methoden

Ein wichtiger Bestandteil in Entwicklungsprozessen des Maschinenbaus ist geprägt vom Verständnis des dynamischen Verhaltens mechanischer Systeme und der Möglichkeit, diese mathematisch simulieren zu können. Früher gab es kaum andere Möglichkeiten, als durch *Linearisieren* vereinfachte Abbildungen der Wirklichkeit mathematisch zu untersuchen. Mitunter ist es jedoch entscheidend, Nichtlinearitäten zu betrachten.

Eine Reihe etablierter „klassischer“ Analyse- und Betrachtungsmöglichkeiten für nichtlineare Systeme sind im Wesentlichen Zeitreihenanalysen, Fixpunktsuche, Stabilitätsbewertung, Phasenportraits, Poincaré-Abbildungen und Bifurkationsanalysen. Sie werden in Unterkapitel 4.1 zusammenfassend dargestellt. Als Ergebnis der Analyse eines nichtlinearen Systems liefern sie wichtige und wesentliche Informationen über Gleichgewichtspunkte und periodische Lösungen.

Wenn Systeme irreguläres bzw. nichtperiodisches (also chaotisches) Verhalten aufweisen, ist es sinnvoll, statistische Aussagen treffen zu können. Fragen wie

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine theoretisch mögliche Lösungsform in der Realität tatsächlich angenommen?

oder — vorausgesetzt, die dynamische Entwicklung des Systems findet wesentlich innerhalb eines Attraktors statt —

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Systemzustand innerhalb des Attraktors angenommen?

können nicht allein durch die oben erwähnten Methoden bearbeitet werden. Es kommt vor, dass zur alleinigen Erlangung von erstem Systemverständnis oder gar als grundlegende Analysetechnik Langzeitsimulationen anhand eines Modells praktiziert werden. Ausgehend von einigen Anfangszuständen berechnet man einige wenige Trajektorien. In Systemen irregulären oder chaotischen Verhaltens führen Langzeitintegrationen aufgrund begrenzter,

numerischer Rechengenauigkeiten jedoch möglicherweise auf fehlerhafte Resultate.

Eine vielversprechende Alternative und Ergänzung bieten die sogenannten *mengenorientierten numerischen Methoden*. Wie bei der Zellabbildungsmethode [Hsu 1987] basieren mengenorientierte Methoden auf Kurzzeitsimulationen sehr vieler Trajektorien. Hierin besteht ein wesentlicher Unterschied zu anderen Methoden, bei denen Langzeitintegrationen auf fehleranfällige Trajektorien führen. Hinsichtlich der Zellabbildungsmethoden unterscheiden sich mengenorientierte Methoden unter anderem durch algorithmische Erweiterungen, die die Recheneffizienz steigern: der Rechenaufwand hängt hier nicht wie sonst von der Dimension des zugrundeliegenden Zustandsraumes ab, sondern von der (unter Umständen fraktalen, d. h. nicht-ganzzahligen) Dimension der zu bestimmenden Mannigfaltigkeit.

Im Folgenden wird eine Einführung in die Techniken und Algorithmen gegeben, die den Kern der mengenorientierten numerischen Methoden bilden. Entwickelt und implementiert wurden die den Methoden zugrundeliegenden Algorithmen unter anderem am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik der Universität Paderborn, siehe hierzu [Dellnitz & Junge 2002]. Ausführliche Herleitungen und Beweise finden sich außerdem in [Dellnitz, Froyland, Junge 2001] und [Dellnitz & Hohmann 1997]. Zur Untersuchung dynamischer Systeme aus der Ingenieurspraxis wurden die Methoden zum Beispiel für Schienenfahrzeuge in [Goldschmidt 2003] verwendet. Die folgenden Abschnitte stellen die Konzepte der mengenorientierten Methoden vor.

2.1 Invariante Mengen und globale Attraktoren

Im Zuge der modellbasierten Entwicklung eines nichtlinearen dynamischen Systems ist es wichtig, Kenntnisse über dessen globales Langzeitverhalten zu erlangen. Dies bezieht das Auffinden von Gleichgewichtszuständen, periodischen oder chaotischen Lösungen sowie deren Einzugsgebiete mit ein. Im Falle eines schwach gedämpften Systems, wie es bei vielen Stoß-Schwing-Anwendungen zu finden ist, kann die Bestimmung von periodischen Punkten schwierig sein. Aus topologischer Sicht lassen sich sowohl Gleichgewichtspunkte als auch periodische und chaotische Lösungen den *invarianten Mengen* zuordnen. „Invariant“ bedeutet, die Mengen hängen nur von Systemparametern ab und verändern sich nicht aufgrund der dynamischen Entwicklung des Systems mit der Zeit.

Attraktor

Der Begriff des *Attraktors* wird hier vorgestellt: ein Attraktor beschreibt einen Bereich oder eine Untermenge eines Zustandsraumes, zu dem sich

die Systemdynamik im Langzeitverhalten hinentwickelt. Bezüglich der zeitlichen Evolution eines Systems ist ein Attraktor eine invariante Menge: wenn der Systemzustand den Attraktor einmal erreicht hat, wird er ihn unter dem Einfluss der zugrundeliegenden Dynamik nie wieder verlassen. Daher stellt das Bestimmen von Attraktoren ein wesentliches Mittel dar, Aussagen über das Langzeitverhalten eines Systems zu treffen.

Dynamisches System

Mathematisch lässt sich ein autonomes¹, zeitkontinuierliches, dynamisches System durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Darin wird \mathbf{g} als Vektorfeld bezeichnet, \mathbf{x} ist der Zustandsvektor, der den Systemzustand zur Zeit t angibt und \mathbb{R}^n ist der n -dimensionale Zustandsraum (auch „Phasenraum“ genannt), innerhalb dessen sich der Systemzustand mit Voranschreiten der Zeit entwickelt. Ist Gl. (2.1) analytisch nicht lösbar, so lässt sich die Zustandsentwicklung durch numerische Integration von (2.1) über die Zeit berechnen. Dann wird die zugrundeliegende Dynamik mittels eines zeitdiskreten, dynamischen Systems \mathbf{T} der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbf{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

angenähert, wenn eine explizite Integrationsmethode gewählt wurde. Der Anfangszustand ist $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, und $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ beschreibt den Zustand zum Zeitschritt t_k .

Invariante Menge, Einzugsgebiet und Attraktor

Für eine Abbildung \mathbf{T} kann der Begriff der invarianten Menge, des Einzugsgebietes und des Attraktors entsprechend [Dellnitz & Junge 2002] wie folgt definiert werden:

Definition invariante Menge und Attraktor:

- Eine Untermenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ wird invariant genannt, wenn $\mathbf{T}(\mathcal{A}) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
- Wenn zu \mathcal{A} ein Einzugsgebiet $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ existiert mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^n$, dann wird \mathcal{A} Attraktor genannt.
- Das Einzugsgebiet (engl. „basin of attraction“) eines Attraktors ist die Menge derjenigen Anfangsbedingungen, von

¹autonom: die Anregung eines Systems (meistens auf der rechten Seite der Differentialgleichung, die die Dynamik eines Systems beschreibt, notiert) hängt nicht explizit von der Zeit t ab.

denen aus sich das Langzeitsystemverhalten in den Attraktor hinein bewegt. Formal bildet die Vereinigungsmenge aller Rückwärtsabbildungen der fundamentalen Umgebung U das Einzugsgebiet des Attraktors: $\mathcal{D}_A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{T}^{-k}(U)$.

- Falls $\mathcal{D}_A = \mathbb{R}^n$, dann wird \mathcal{A} globaler Attraktor genannt.

Zur Bestimmung eines Attraktors kann \mathbb{R}^n wegen seiner Unbegrenztheit numerisch nie vollständig berücksichtigt werden. Anstelle dessen wird der Zustandsraum auf eine interessierende Untermenge $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ begrenzt und der *relative globale Attraktor* („RGA“) $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ eingeführt (siehe auch [Dellnitz, Froyland, Junge 2001] und [Dellnitz & Junge 2002]):

Definition relativer globaler Attraktor: $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{T})$ — der globale Attraktor eines dynamischen Systems \mathbf{T} relativ zu einer interessierenden, gegebenen Menge \mathcal{Q} — ist definiert als Schnittmenge aller Vorwärts-Abbildungen des Urbildes \mathcal{Q} , bzw.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{T}) := \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k(\mathcal{Q}). \quad (2.3)$$

Im Folgenden wird die interessierende Untermenge \mathcal{Q} „Anfangs-“ oder „Startbox“ genannt. Sie sei ein rechteckig begrenztes n -dimensionales Gebiet, auf das als Ausgangsmenge die Algorithmen angewandt werden, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden.

2.2 Approximation relativer globaler Attraktoren

Dieser Abschnitt zeigt, wie der relative globale Attraktor zu einem gegebenen, zeitdiskreten, dynamischen System \mathbf{T} numerisch ermittelt wird. Dazu wird die Idee des mengenorientierten Vorgehens erläutert, welche die Basis der mengenorientierten numerischen Methoden bildet. Ziel ist es, den Attraktor mit einer Menge von kleinen, rechteckigen sog. (n -dimensionalen) *Boxen* näherungsweise zu überdecken. Der erste Schritt des Vorgehens auf dem Weg zum relativen globalen Attraktor ist die Wahl eines rechteckigen Teilgebietes \mathcal{Q} aus dem zugrundeliegenden Zustandsraum \mathbb{R}^n . Das Teilgebiet \mathcal{Q} werden wir im weiteren Verlauf mit *Startbox* bezeichnen. Nur innerhalb dieser Startbox wird die Analyse stattfinden. Beginnt man eine Analyse ganz ohne Vorwissen über das System, so ist es ratsam, zunächst eine recht große Startbox zu wählen.

Im Folgenden wird ein *Box-Unterteilungsalgorithmus* vorgestellt [Dellnitz, Froyland, Junge 2001]. Der Algorithmus besteht aus zwei Schritten, welche einige Male iteriert² werden. Begonnen wird mit der rechteckigen Startbox $\mathcal{Q}^{(0)} = \mathcal{Q}$. Die zwei Schritte sind:

²*iterieren*: wiederholen, wiederholt anwenden.

1. *Unterteilung:* Gegeben sei der i -te iterative Unterteilungsschritt, nach dem $N^{(i)}$ Boxen $\mathcal{B}_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \dots, N^{(i)}$ vorliegen, und es gelte

$$\bigcup_{k=1}^{N^{(i)}} \mathcal{B}_k^{(i)} = \mathcal{Q}^{(i)} \subseteq \mathcal{Q}^{(0)} \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Halbiere im nächsten Schritt $i + 1$ jede Box $\mathcal{B}_k^{(i)}$. Dies ergibt $2N^{(i)}$ kleinere, verfeinerte Boxen für die wieder gilt:

$$\bigcup_{k=1}^{2N^{(i)}} \mathcal{B}_k^{(i+1)} = \mathcal{Q}^{(i)}. \quad (2.5)$$

2. *Auswahl:* Bestimme das Urbild $\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_k^{(i+1)})$, $k = 1, \dots, 2N^{(i)}$ jeder der verfeinerten Boxen durch Anwendung der invertierten Abbildung³. Lösche daraufhin all jene Boxen $\mathcal{B}_k^{(i+1)}$, deren Urbild die gegenwärtige Menge $\mathcal{Q}^{(i)}$ an Boxen *nicht* schneidet. Die Menge $\mathcal{Q}^{(i+1)}$ für den nächsten Schritt $i + 1$ ergibt sich aus den übrig bleibenden Boxen:

$$\mathcal{Q}^{(i+1)} = \bigcup_{k=1}^{2N^{(i)}} \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{B}_k^{(i+1)}) \cap \mathcal{Q}^{(i)}. \quad (2.6)$$

Bei der Unterteilung der n -dimensionalen Boxen $\mathcal{B}_k^{(i)}$ wird die Halbierungsebene entlang der n Dimensionen des Zustandsraumes zyklisch permutiert. Beispielsweise im Falle eines 2-dimensionalen Systems mit den Zustandsgrößen x und y wird die Halbierung der rechteckigen Boxen zunächst in x -Richtung, dann in y -Richtung und im nächsten Iterationsschritt wieder in x -Richtung und so weiter vorgenommen. Die Anzahl der Iterationsschritte i sollte (muss aber nicht) ein Vielfaches der Dimensionszahl n betragen, so dass die Unterteilung in jede Koordinatenrichtung gleich oft geschieht. Im Gegensatz zu anderen Zellteilungsverfahren hängt der Rechenaufwand des hier vorgestellten Verfahrens nicht alleine von der Anzahl der Dimensionen ab, sondern kann in Abhängigkeit von der zugrundeliegenden Dynamik geringer sein. Ein Attraktor mit schlanker, fein verästelter Struktur kann daher mit geringer Rechenzeit angenähert werden, da nach jedem Unterteilungsschritt nur wenige Boxen behalten werden, die weiter unterteilt werden müssen.

Bild 2.1 zeigt eine solche Anordnung von Boxen, die durch den Unterteilungsalgorithmus entstand. Diese Menge von Boxen überdeckt den gesuchten relativen globalen Attraktor eines dynamischen Systems, welches später in Kapitel 3 vorgestellt wird. Für die Feinheit der Rechteck-Boxen im gegebenen Beispiel waren 14 Unterteilungsschritte nötig. In diesem Beispiel wird

³Die Existenz der inversen Abbildung \mathbf{T}^{-1} stellt in der Praxis keine Voraussetzung dar. Die Auswahl der zu löschenden Boxen wird vielmehr derart vorgenommen, dass zunächst die Bilder jeder der verfeinerten Boxen berechnet werden. Daraufhin werden all solche Boxen gelöscht, die sich mit keinem der Bilder schneiden.

der Rechenvorteil des mengenorientierten Ansatzes gegenüber der Zellabbildungsmethode deutlich. In der Zellabbildungsmethode unterteilen die Boxen das gesamte Teilgebiet $Q \subset \mathbb{R}^n$: für die gewählte Verfeinerung müssten $2^{14} = 16384$ Boxen untersucht werden, um den Attraktor zu bestimmen. Der mengenorientierte Unterteilungsalgorithmus bestimmt in diesem Falle nur 2925 Boxen — nämlich nur solche, die zum Attraktor gehören. Die Anzahl der Boxabbildungen liegt jedoch etwas höher, da die Anzahl 2925 durch 14 sukzessive Verdoppelungen und Reduktionen der Boxanzahl erreicht wird.

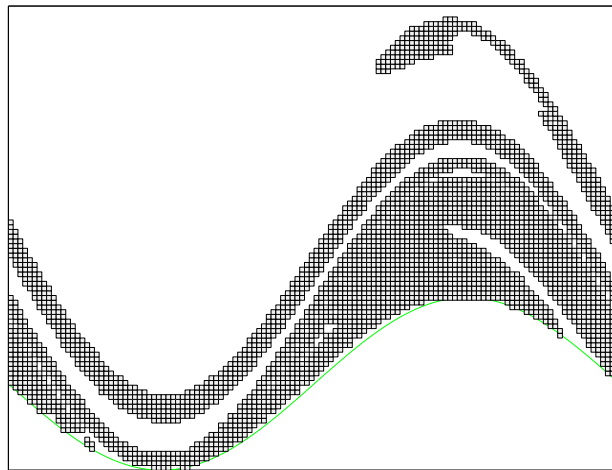


Bild 2.1: Ein relativer globaler Attraktor \mathcal{A}_Q , der nach 14 Unterteilungsschritten durch Überdeckung mit 2925 Boxen angenähert wurde.

Die Bestimmung der Bilder der Boxen, wie es in Schritt 2 des Algorithmus vorgeschrieben ist, wird durch Abbilden einer großen Zahl von sog. Testpunkten vorgenommen. Die Testpunkte können dazu in unterschiedlichen Weisen über jede zu traktierende Box verteilt werden; das Programm GAIO⁴ sieht hierfür vier Optionen vor. Die Testpunkte können die Boxen ausfüllen, in dem sie auf ein regelmäßiges Gitter verteilt werden, wobei die Ränder mit eingeschlossen werden (**Grid**) oder nur das Innere mit Testpunkten bedeckt wird (**InnerGrid**). Alternativ kann es vorteilhaft sein, die Punkte zufallsverteilt zu platzieren (**MonteCarlo**), oder es genügt in gewissen Fällen, nur die Ränder der Boxen mit Testpunkten zu versehen (**Edges**). Die letztgenannte Möglichkeit, die Rechenzeit einspart, ist sinnvoll, wenn die Abbildung in eine Dimension sehr stark kontrahierend wirkt, so dass rechteckige Boxen zu sehr schlanken Bildern transformiert werden.

⁴*Global Analysis of Invariant Objects* steht für ein Softwarepaket, welches sämtliche Algorithmen der mengenorientierten Methoden vereint und verfügbar macht. Bild 2.1 wurde so mit dem oben eingeführten Unterteilungsalgorithmus erzeugt, der in der GAIO-Komponente *RGA* implementiert ist. Details und Anwendungsbeispiele zu der Software sind ihrem Handbuch [Dellnitz, Froyland, Junge 2001] zu entnehmen.

2.3 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Mit dem Box-Unterteilungsalgorithmus des vorigen Unterkapitels können relative globale Attraktoren angenähert werden. Kenntnis über die Lage und Form des Attraktors innerhalb des Zustandsraumes lassen jedoch keine Rückschlüsse auf die Bewegung des Systems *innerhalb* des Attraktors zu. Oft erübrigt sich dieser weitere Wissensbedarf: wenn der Attraktor nämlich einen periodischen Grenzyklus (engl. *limit cycle*, kann bei zeitkontinuierlichen Systemen auftreten), einen Fixpunkt oder einen 1-periodischen bzw. k k -periodische Punkte darstellt, so bleiben über die Dynamik des Systems, sobald sich sein Zustand auf dem Attraktor befindet, keine weiteren Fragen offen. Die geometrische Dimension solcher Attraktoren ist ganzzahlig (Fixpunkt: $\dim=0$; geschlossene Zykluskurve: $\dim=1$).

Wenn dagegen der Attraktor wie in Bild 2.1 keine vollflächige Form besitzt, so ist seine Dimension fraktal ($1 < \dim < 2$), also eine gebrochene Zahl. In solchen Fällen spricht man von einem *seltsamen Attraktor*. Deterministisches, also vorherbestimmtes Chaos beherrscht das zeitliche Verhalten der Systemzustände. Hier ist es sinnvoll, die irregulären Bewegungen des Systems tiefgehender zu studieren. Hilfreich ist die Berechnung von sog. *invarianten Maßen*, wie etwa die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* eines ist. Sie ist ein in der zeitlichen Entwicklung unveränderliches Maß, das statistische Aussagen über die Wahrscheinlichkeit trifft, mit der die im Attraktor möglichen Zustände vom System erreicht werden.

Die folgenden Abschnitte erläutern die Berechnung von Aufenthaltswahrscheinlichkeitswerten für alle Boxen, die einen Attraktor approximieren, wie er z. B. in Bild 2.1 gezeigt ist.

Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix

Die Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten basiert auf der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten (engl.: *transition probability matrix*). Sie wird mit \mathbf{P} bezeichnet und kann für einen gegebenen relativen globalen Attraktor \mathcal{A}_Q berechnet werden. Sie enthält die Elemente $\mathbf{P} = [p_{kl}]$ mit $k, l = 1, \dots, N$. N stellt die Anzahl der Boxen dar, die den relativen globalen Attraktor \mathcal{A}_Q bilden. Jede Komponente p_{kl} der Matrix \mathbf{P} steht für die Übergangswahrscheinlichkeit, mit der das System nach einem Schritt einen innerhalb Box \mathcal{B}_l liegenden Zustand hin zu einem in Box \mathcal{B}_k liegenden Zustand ändert. Die Übergangswahrscheinlichkeit p_{kl} wird angenähert, indem man viele Testpunkte von innerhalb Box \mathcal{B}_l abbildet und den Anteil an Punkten zählt, die in Box \mathcal{B}_k , $k = 1, \dots, N$ landen. Die Illustration in Bild 2.2 verdeutlicht das Vorgehen der Berechnung aller Einträge p_{kl} der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix \mathbf{P} . Die siebte Spalte $p_{k,7}$ erhält man, indem man (hier aus Demonstrationszwecken nur) vier Testpunkte $\mathbf{x}_i \in \mathcal{B}_7$, die in Box \mathcal{B}_7 liegen, abbildet und danach für jede Box die relative Zahl an Bildpunkten zählt.

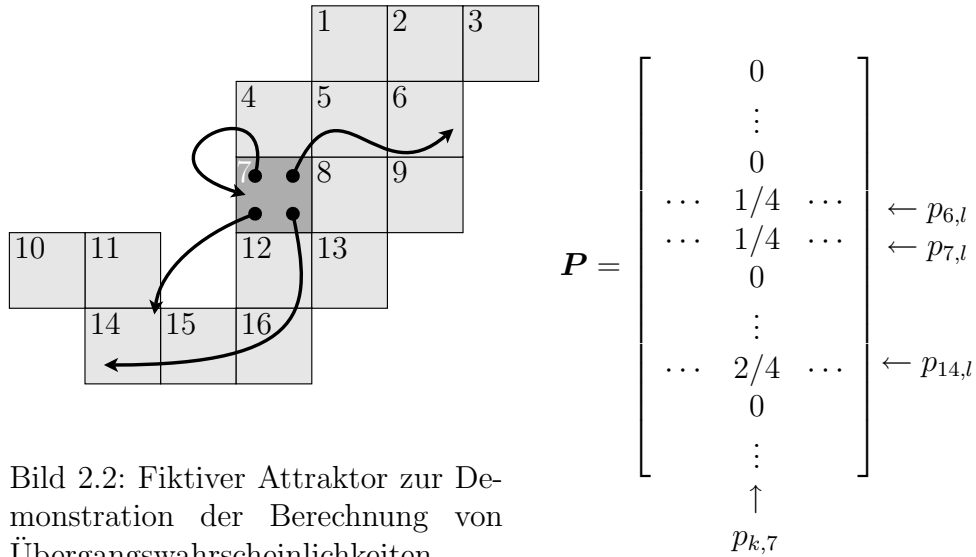


Bild 2.2: Fiktiver Attraktor zur Demonstration der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten

Vektor der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Im vorigen Abschnitt wurden die Übergangswahrscheinlichkeiten des Systemzustands von jeder Box in jede Box definiert und berechnet. In diesem Abschnitt wird nun der Begriff der Aufenthaltswahrscheinlichkeit y_k zur Box \mathcal{B}_k definiert:

Definition Aufenthaltswahrscheinlichkeit: Gegeben sei eine Menge von N Boxen \mathcal{B}_k , $k = 1, \dots, N$, wobei N die Anzahl der Boxen darstellt, die den relativen globalen Attraktor \mathcal{A}_Q beschreiben. Man nehme an, dass sich der Systemzustand \mathbf{x} auf dem Attraktor \mathcal{A}_Q befindet. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit y_k der Box \mathcal{B}_k ist definiert als die Wahrscheinlichkeit, mit der der Systemzustand \mathbf{x} innerhalb der Box \mathcal{B}_k liegt.

Es folgt noch die

Definition Aufenthaltswahrscheinlichkeitsvektor: Der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsvektor ist definiert als eine Spaltenmatrix aus den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten y_k aller Boxen \mathcal{B}_k :

$$\mathbf{y} := [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \quad (2.7)$$

Unter Verwendung der beiden Definitionen kann schließlich die Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten hergeleitet werden. Nimm dazu an, der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ wäre bereits bekannt. y_l bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Systemzustand \mathbf{x} innerhalb der Box \mathcal{B}_l liegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Zustand \mathbf{x} vorlag und im nächsten Schritt in Box \mathcal{B}_k hinein abgebildet wird, ist durch das Produkt $\bar{y}_{kl} = p_{kl} y_l$ der Übergangswahrscheinlichkeit p_{kl} und der Aufenthaltswahrscheinlichkeit y_l gegeben. Die Summe über alle Boxen \mathcal{B}_l ergibt die gesamte Aufenthaltswahrscheinlichkeit \mathcal{B}_k :

$$y_k = \sum_{l=1}^N \bar{y}_{kl} = \sum_l p_{kl} y_l. \quad (2.8)$$

In Matrix-Notation kann Gl. (2.8) als

$$\mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{y} \tag{2.9}$$

geschrieben werden. Verglichen mit dem Standard-Eigenwertproblem $\lambda \mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ stellt Gl. (2.9) das spezielle Eigenwertproblem dar, nämlich eines mit Eigenwert $\lambda = 1$. Der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsvektor \mathbf{y} ist der *Rechts-Eigenvektor* der Übergangsmatrix \mathbf{P} zum Eigenwert 1. Da Übergangsmatrizen stochastischer Natur sind, haben sie stets mindestens einen Eigenwert 1 [Norris 1997].

Kapitel 3

Ultraschall-Stoßbohrer

In Kapitel 2 wurden die mengenorientierten numerischen Methoden vorgestellt. Ihre effiziente Vorgehensweise bei der Approximation niedrigdimensionaler Attraktoren bzw. bei der Überdeckung von Mannigfaltigkeiten wurde eindrucksvoll z. B. an der Hénon-Abbildung, an Chua's Circuit oder am Lorenz-System bewiesen [Dellnitz & Junge 2002].

Anwendungen der Methoden auf weitere bzw. neuere Systeme aus dem Ingenieursalltag sind bislang nur wenige erfolgt. Insbesondere wurden sie nicht an Systemen mit ausgeprägter nichtglatter Charakteristik erprobt. Die vorliegende Arbeit möchte diese Lücke schließen und konzentriert sich daher auf den Einsatz der mengenorientierten Methoden an einer für die Klasse der nichtglatten Systeme beispielhaften Anwendung. Ausgewählt wurde das neuartige Konzept eines Stoßbohrers. Es besticht durch seinen einfachen, aus wenigen Komponenten bestehenden Aufbau. Gleichzeitig vereinigt es daher die Möglichkeit einer analytisch überschaubaren Modellierung mit der Analyse einer sehr komplexen Dynamik. Im Folgenden wird dieses Bohrsystem vorgestellt.

3.1 Entwicklung des Ultraschall-Stoßbohrers

Vor einigen Jahren befasste sich die kalifornische Raumfahrtbehörde NASA mit der Planung einer Mars-Mission. Die Entnahme von Gesteinsproben sollte für deren Untersuchung auf der Marsoberfläche möglich sein. Der Bedarf entstand, einen Bohrer zu entwickeln, der vielen besonderen Anforderungen genüge. Herkömmliche Gestein-Schlagbohrer schieden aus, weil sie einige der wichtigsten Anforderungen nicht erfüllen konnten: so waren ein niedriges Gewicht und geringe elektrische Leistungsaufnahme wichtige Bedingungen. Wartungsfreiheit war eine ebenso wichtige Voraussetzung. Da der Bohrer auf einem kleinen, mobilen Roboter-Fahrzeug, dem Mars-Rover, zu befestigen war, durfte er weder ein großes Halte-Drehmoment, noch eine hohe Anpresskraft auf die Bohrstelle benötigen.

Entwickelt wurde daraufhin ein neuartiges Stoßbohrsystem, welches den Namen USDC bekam, was für **U**ltrasonic/**S**onic **D**riller/**C**orer steht; sie-

he dazu [Bar-Cohen et al. 2001b]. Der Bohrer nutzt Schallwellen sowohl im Ultraschallbereich (ab 20kHz), als auch im hörbaren Schallbereich (100 Hz–1000 Hz) und ist in der Lage, Vollquerschnittsbohrungen wie auch Kernlochbohrungen zur Probenentnahme vorzunehmen.

Gute Bohrergergebnisse in Laborversuchen und die erfolgreiche Anwendung des Bohrkonzepts zur planetaren Gesteinsprobenentnahme (siehe [Bar-Cohen et al. 2001b]) machen dieses Bohrprinzip für terrestrische Anwendungen interessant. Vorstellbar sind leichte, geräuscharme Handbohrer mit geringer Leistungsaufnahme für sprödhartes Material wie Beton und Fels. Anwendung könnten sie im Klettersport, im Baugewerbe, in der Geologie, in der Medizintechnik oder als Verschüttetenbergungsgerät für Katastropheneinsätze finden. Allerdings besteht für denkbare Anwendungen noch Optimierungspotenzial: Probebohrungen zeigten, dass die Bohrzeiten noch relativ hoch liegen, siehe z. B. [Bar-Cohen et al. 2001a].

3.2 Aufbau des Ultraschall-Stoßbohrers

Bild 3.1 zeigt einen am Heinz Nixdorf Institut gefertigten Labor-Prototypen des Ultraschall-Stoßbohrers, mit dem experimentelle Messungen gemacht wurden; in Bild 3.2 ist dessen schematischer Aufbau dargestellt. Deutlich wird dort ein herausragendes Merkmal, nämlich sein einfacher Aufbau. Außer der elektrischen Ansteuerung besteht das Bohrsystem aus nur drei Teilen:

- piezoelektrischer Oszillator
- freie Stoßmasse
- Bohrstab



Bild 3.1: Prototyp des Stoßbohrers für Laborexperimente

Oszillator

Der piezoelektrische Oszillator, für den auch die Namen Transducer oder Aktor benutzt werden, ist ein metallischer Zylinder, in den ein Stapel von (hier vier) piezoelektrischen Keramiken eingespannt ist. Im Betrieb wird dieser Piezostapel durch Anlegen eines harmonisch oszillierenden Spannungssignals an seine Elektroden zu Schwingungen angeregt. Als Anregfrequenz wird die unterste Längseigenfrequenz des Oszillators gewählt. Dadurch wird die erste Längseigenmode in Resonanz zu Schwingungen angeregt. Die erste Längseigenform eines Stabes beschreibt eine stehende sog. Lambda-halb-Welle. Das heißt, an den Stabenden bilden sich Schwingungsbäuche, dazwischen ein Schwingungsknoten. Der für Messungen verwendete Oszillator hat eine Länge von $l = 125 \text{ mm}$, was bei einer Schallwellengeschwindigkeit in Stahl von $c = 5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ einer ersten Längseigenfrequenz von etwa $f = \frac{c}{2l} = 20 \text{ kHz}$ entspricht.

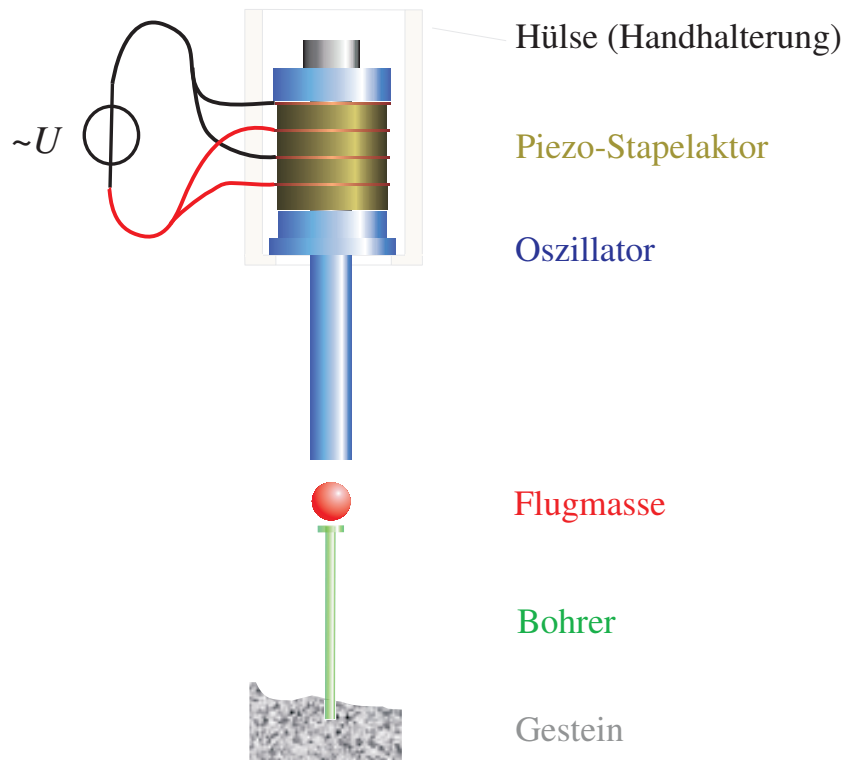


Bild 3.2: Schematischer Aufbau des Ultraschall-Stoßbohrsystems USDC

Freie Stoßmasse

Der zweite Bestandteil des Bohrers ist eine wenige Gramm schwere, freifliegende Stoßmasse. Sie kann z. B. Unterlegscheiben- oder Kugelform besitzen. Die Stoßmasse fliegt in einem kleinen Zwischenraum zwischen dem schwingenden Ende des Ultraschall-Oszillators und der dem Bohrgut (Gestein) abgewandten Seite des Bohr-Stabes hin und her. Dadurch überträgt die Stoßmasse Stoßenergie vom Oszillator hin zum Bohrer. Ihre besondere

Aufgabe besteht darin, eine Transformation der Ultraschall-Schwingungen von kleiner Amplitude, wie sie am Ende des Oszillators auftreten, hin zu Körperschallimpulsen im Bohrstab von großer Intensität vorzunehmen. Als weitere Funktion erhält sich die Stoßmasse den für ihre Flugbewegung notwendigen Zwischenraum. Die vorliegende Arbeit setzt einen Fokus auf die Analyse und Beschreibung der Bewegung dieser Stoßmasse, von der der Bohrprozess im Wesentlichen abhängt.

Bohrstab

Der dritte Teil des Bohrsystems ist der Bohrstab. Er leitet die Stoßwellen, die wiederholt durch Abprallen der freien Stoßmasse an seiner systeminneren Seite erzeugt werden, hin zur Bohrer-Gestein-Kontaktstelle, wo sie im zu bearbeitenden Gestein dessen Bruchspannung überschreiten und so den eigentlichen Bohrfortschritt erzielen.

Obgleich die oben vorgestellte Bohrtechnologie vielversprechend ist, konnte ihr Verhalten auf dynamischer Ebene bislang kaum entschlüsselt und durchdringend verstanden werden. Beispielsweise ist es noch unklar, inwiefern die Größe, Gestalt und Materialzusammensetzung der Stoßmasse, die Anregfrequenz und die Bohrstabgeometrie den Materialabtrag beeinflussen. Ein hinreichendes Systemverständnis ist allerdings unabdingbar, möchte man das System-Design für weitere Anwendungsfelder nutzbar machen und Eigenschaften wie die Bohrgeschwindigkeit optimieren oder nur auf größere Bohrquerschnitte und höhere Leistungsaufnahmen skalieren.

Kapitel 4

Modellierung und Analyse nichtglatter Dynamik — Stand der Technik

Im Fokus der vorliegenden Arbeit steht die Analyse von nichtglatten Systemen der Dynamik. Diese Systeme bilden eine besondere Untergruppe der nichtlinearen Systeme. Seit einigen Jahrzehnten kommt Nichtlinearitäten in der Wissenschaft immer größere Aufmerksamkeit zu. Dementsprechend ist die Literatur, in der man sich mit nichtlinearen Phänomenen auseinandersetzt, in dieser Zeit auf eine beachtliche Zahl angewachsen.

In den Anfängen der Arbeit mit nichtlinearen Systemen entwickelten Mathematiker und Ingenieure mathematische Modelle von technischen Systemen, die von sehr grundlegender Natur waren. Zu den bekanntesten Modellen zählen Differentialgleichungen von Duffing¹, van der Pol² und Lorenz³.

Vor dem Zeitalter der maschinellen, numerischen Rechenunterstützung waren die Untersuchungsmethoden rein analytisch bzw. experimentell. Die zur theoretischen Analyse damals entwickelten wichtigsten Methoden sind

¹Der deutsche Ingenieur und Experimentalist *Georg Duffing* (1861–1944) formulierte 1918 die Duffing-Gleichung, indem er dem Potential eines linearen Oszillators eine kubische Rückstellkraft hinzufügte. Das dynamische System entspricht einem einfachen, gedämpften Feder-Masse-Schwinger mit nichtlinearer Federkennlinie [[Abraham & Shaw 2000](#)].

²Der niederländische Physiker und Philips-Ingenieur *Balthasar van der Pol* (1889–1959) untersuchte 1920 die van der Pol-Gleichung, die einen Feder-Masse-Schwinger mit nichtlinearer Dämpfung modelliert [[Van der Pol 1920](#)].

³Der emeritierte Meteorologieprofessor des MIT *Edward Norton Lorenz* (geb. 1917 in den USA) stellte ca. 1960 sein Wettermodell auf, aus dessen starker Abhängigkeit von Anfangsbedingungen der sogenannte „Schmetterlingseffekt“ hervorging [[Lorenz 1963](#)].

unter anderem den Arbeiten von Lagrange⁴, Poincaré⁵, Ljapunov⁶ und Birkhoff⁷ zu verdanken, die heute immer noch Aktualität genießen. Einige Methoden, die auf diese Pioniere zurückgehen, werden im folgenden Unterkapitel beschrieben. Im Unterkapitel 4.2 wird auf jüngere Methoden eingegangen, die erst in den letzten Dekaden mit dem Aufkommen maschineller Rechenunterstützung entwickelt wurden. In dieser Arbeit werden die genannten Methoden auf zwei Schwingstoßsysteme angewendet. Auf Modellierungsansätze zu ähnlichen Systemen wird in Unterkapitel 4.3 verwiesen.

4.1 Klassische Methoden zur Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme

Dieses Unterkapitel stellt die gängigsten Methoden zusammenfassend dar, die für Untersuchungen an nichtlinearen dynamischen Systemen in der Literatur regelmäßig Anwendung finden. Die nichtglatten dynamischen Systeme gehören auch in diese Gruppe. Daher bilden die nachfolgenden Techniken auch für alle Schwingstoßsysteme eine wesentliche Grundlage.

4.1.1 Zeitreihenanalyse

Die naheliegendste Möglichkeit, Einblick in die Bewegungsabläufe eines Systems zu erhalten, ist die Zeitreihenanalyse. Dabei wird die zeitliche Entwicklung von Zustandsvariablen des Systems in einem Diagramm über die Zeit aufgetragen. Ein Beispiel dafür zeigt Bild 6.11 auf Seite 66. Die zugrundeliegenden Daten können experimentell oder durch Simulation eines mathematischen Modells gewonnen werden. An dieser Darstellungsweise lassen sich Eigenschaften wie Periodizität, asymptotisches oder stabiles Verhalten, Stabilität oder Chaos in der Regel nicht ablesen. Ihr Vorteil liegt in der einfachen Zugänglichkeit der Bewegungsabläufe auch für Nichtwissenschaftler.

4.1.2 Phasenportrait

Werden die Zeit als Laufparameter im Zustandsraum (auch „Phasenraum“ genannt) benutzt und die Zustandswerte des Systems in chronologischer Fol-

⁴Der italienische Schüler Leonhard Eulers (1707–1783) *Joseph-Louis Lagrange* (1736–1813) wurde als Begründer der analytischen Mechanik bekannt [Wikipedia 2007]. Für die Stabilitätsuntersuchungen nichtlinearer diskreter und kontinuierlicher Systeme lieferte er einen Stabilitätsbegriff zur Klassifikation von Lösungsverhalten [Thompson & Stewart 1986], der aber heute eher ungebräuchlich ist.

⁵Nach dem französischen Mathematiker, Physiker und Philosophen *Jules Henri Poincaré* (1854–1912) ist die Poincaré-Abbildung benannt, die den Zustand eines Systems stroboskopartig zu diskreten, periodischen Zeitpunkten beleuchtet und dadurch besondere Strukturen innerhalb chaotischer Bewegungen enthüllt.

⁶*Aleksandr Mikhailovich Liapounov* (1857–1918) wurde berühmt für seine grundlegenden Ideen zum Begriff der Stabilität von Lösungen.

⁷Der US-amerikanische Mathematiker *George David Birkhoff* (1884–1944) wurde 1913 durch den Beweis Poincarés letzten Theorems berühmt und arbeitete im Bereich der statistischen Mechanik.

ge eingetragen, so entsteht eine Trajektorie (auch Orbit genannt). Für eine Darstellung n -dimensionaler Trajektorien, wenn $n > 3$, muss die Trajektorie in den Raum hinein projiziert werden, der von zwei oder drei Zustandsvariablen aufgespannt wird. Diese Betrachtungsweise ermöglicht das Erkennen von sich wiederholenden Zuständen und periodischen Bewegungen. Bei zeitdiskreten Systemen, die durch Abbilden eines Zustands auf einen folgenden Zustand beschrieben werden, besteht eine Trajektorie aus einzelnen Zustandspunkten, die nicht miteinander verbunden sind. Beispiele für diskrete Orbits zeigt Bild 6.14 auf Seite 70. Periodische Bewegungen lassen sich erkennen, wenn Zustandspunkte wiederholt auf sich selbst oder einen ihrer Vorgänger abgebildet werden. Periodizität in zeitkontinuierlichen Systemen ist durch sich schließende Orbits charakterisiert. Aus Phasenportraits lassen sich weiterhin auch Aussagen über das Langzeitverhalten eines Systems treffen. Z. B. können die Zustandsbereiche, innerhalb derer sich ein durch Dämpfung begrenztes System aufhält, abgeschätzt werden. Die Daten, aus denen sich Phasenportraits erstellen lassen, sind die der Zeitreihe, können also experimentell aufgezeichnet oder simulatorisch berechnet worden sein.

4.1.3 Periodische Punkte und Fixpunkte

Fixpunkte im Zustandsraum von zeitdiskreten Systemen stellen stabile Gleichgewichtslagen dar. Für zeitdiskret dargestellte Systeme repräsentieren Fixpunkte sich periodisch wiederholendes Verhalten. Besteht ein Orbit aus m Fixpunkten, so wird die Bewegung „ m -periodisch“ genannt. Mehrperiodische Fixpunkte lassen sich nur selten analytisch bestimmen. In Phasenportraits sind sie aber einfach erkennbar.

4.1.4 Ljapunov-Stabilität und Ljapunov-Exponent

Eine weitere Charakterisierung des Systemverhaltens kann durch die Beschreibung der Stabilität von Lösungen vorgenommen werden. Es gibt mehrere Stabilitätsbegriffe. Eine Lösung $\mathbf{u}(t)$ eines autonomen oder nichtautonomen Differentialgleichungssystems wird *Ljapunov-stabil* genannt, wenn für jede beliebige, kleine Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert, so dass jede andere Lösung $\mathbf{v}(t)$, für die zur Zeit $t = t_0$ die Abstandsbeziehung $\|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{v}(t_0)\| < \delta$ gilt, für alle Zeiten $t > t_0$ die Beziehung $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| < \epsilon$ erfüllt [Nayfeh 1995]. Anders ausgedrückt wird eine Lösung dann Ljapunov-stabil genannt, wenn sie sich ab einem bestimmten Zeitpunkt nie mehr aus den gedachten Schläuchen begrenzter Durchmesser, die um alle benachbarten Lösungen herum verlaufen, herausbewegt.

Ljapunov-Exponenten hingegen geben ein Maß für die Stabilität einer Lösung an. Dabei vergleicht man zwei Trajektorien, die durch im Zustandsraum sehr dicht benachbarte Zustände laufen. In der weiteren zeitlichen Entwicklung verhält sich der Abstand zwischen den Zuständen beider Trajektorien im Zustandsraum meistens exponentiell: der Ljapunov-Exponent gibt die Stärke dieser exponentiellen Separation oder Annäherung an. Entscheidend ist meistens nur das Vorzeichen des Ljapunov-Exponenten. Es gibt

an, ob es sich um eine stabile oder um eine instabile Bewegung z. B. in Bezug auf einen Fixpunkt handelt.

4.1.5 Poincaré-Abbildung

Die Poincaré-Abbildung ist eine besondere Darstellungsform der Dynamik, die die Zustände von zeitkontinuierlichen Systemen nur zu diskreten Zeitpunkten stroboskopartig beleuchtet. Dieses Vorgehen erzeugt aus einem kontinuierlichen System eine diskrete Abbildungsvorschrift. Geschlossene (mehr-)periodische Trajektorien werden zu (mehreren) Fixpunkten und lassen sich einfach identifizieren. Besondere Relevanz hat die Poincaré-Abbildung bei chaotischer Bewegung: irregulär verlaufende Trajektorien bilden im Phasenraum ein Liniengewirr. Blitzt man den mit der Zeit durch den Phasenraum wandernden Zustandspunkt dagegen in periodischen Abständen gedanklich mit einem Stroboskop und friert die so entstehenden, einzelnen Punkte ein, so enthüllt eine deterministisch-chaotische Bewegung mitunter eine erstaunliche Struktur, die man „seltsamen Attraktor“ nennt (siehe auch Unterkapitel 2.3). Als Periodendauer eignet sich bei nichtautonomen Systemen (also solchen mit expliziter Zeitabhängigkeit, etwa durch eine äußere Kraft- oder Weganregung) für die Abbildung die Anregeperiodendauer. Bei autonomen Systemen ist die Wahl der Periodendauer weniger klar. Es eignen sich meistens systemeigene Schwingungsdauern.

4.1.6 Verzweigungs- oder Bifurkationsdiagramm

Mit einem Bifurkations- oder Verzweigungsdiagramm⁸ lässt sich gut die Abhängigkeit der Lösungstypen von einem Systemparameter untersuchen. Dazu wird der Wert einer Zustandsgröße an bestimmten Zeitpunkten in Abhängigkeit des Systemparameters dargestellt. Bei zeitkontinuierlich definierten Systemen wertet man wie bei der Poincaré-Abbildung den Systemzustand an periodischen, diskreten Zeitpunkten aus. So lassen sich im Bifurkationsdiagramm periodische Lösungen mit ihrer Periodizitätszahl und chaotische Lösungen gut voneinander in Abhängigkeit des Systemparameters unterscheiden. Bild 4.1 zeigt die für nichtlineare und Stoßsysteme typische Kaskade von Periodenverdoppelungen in Bifurkationsdiagrammen für beide Zustandsgrößen V und ϕ des dynamischen Systems 2. Ordnung, das in Unterkapitel 5.1 hergeleitet wird. Mit größer werdendem Systemparameter α_1 leiten die Periodenverdoppelungen ins Chaos über, das an den rechten Rändern in Bild 4.1 in Form gestreuter Punkte erkennbar ist.

4.1.7 Einzugsgebiet

In besonderen Fällen, die vom Zusammenwirken der Systemparameter abhängen, können unterschiedliche, stationäre Lösungen (das sind die Be-

⁸*Bifurkation*: Gabelung; bifurkare (lateinisch), bifurcer (französisch), bifurcate (englisch): sich (in zwei Äste) gabeln.

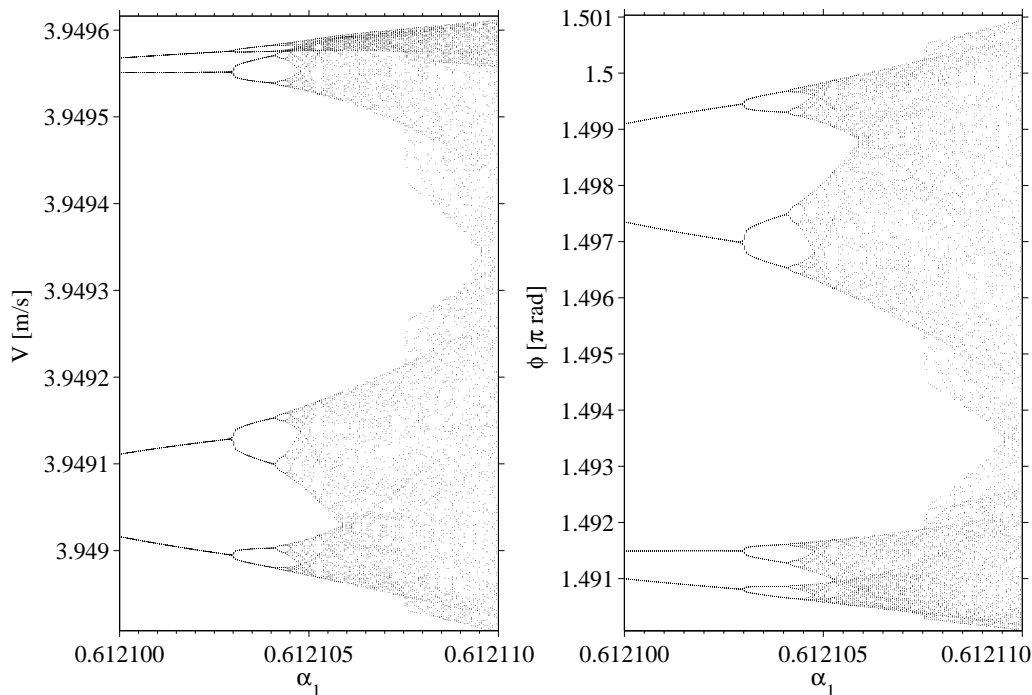


Bild 4.1: Periodenverdoppelungen im Bifurkationsdiagramm des zeitdiskreten Systems 2. Ordnung (Unterkapitel 5.1) für den Systemparameter α_1 . Die Verzweigungsdiagramme werden beispielhaft für beide Zustandsgrößen V und ϕ gezeigt.

wegungen, die sich nach einiger Zeit einstellen und danach ihre Eigenschaften für alle Zeiten beibehalten) gleichzeitig in einem System existieren. Die Menge an Zustandspunkten, die von allen Trajektorien eingenommen werden, nachdem Anfangsbewegungen („transiente“ oder „instationäre Bewegungen“) abgeklungen sind, werden Attraktoren genannt (siehe Unterkapitel 2.1). Eine Lösungstrajektorie wird nach einiger Zeit immer in einen der Attraktoren laufen. Von welchem Attraktor sie „angezogen“ wird, ist alleine vom Anfangszustand abhängig, bei dem ihre Berechnung begann. Das Einzugsgebiet (engl. *basin of attraction* oder *domain of attraction*) eines Fixpunktes markiert diejenigen Anfangsbedingungen auf einer „Karte“ im Zustandsraum, von denen aus Trajektorien in einen bestimmten Attraktor hinein laufen. Bild 7.7 auf Seite 96 zeigt die beiden Einzugsgebiete zu zwei Attraktoren (weiß und schwarz). Gemeinsam füllen sie den Zustandsraum komplett aus.

4.2 Zellabbildungsmethoden

Seit etwa dem Ende des 20. Jahrhunderts stehen der Wissenschaft Höchstleistungsrechenzentren zur Verfügung, deren gewaltige Rechenleistung Jahr für Jahr weiter nach oben schnell. So entstehen auf dem Gebiet der Analyse nichtlinearer Systeme und der Chaosforschung Möglichkeiten zur Entwicklung immer neuer, numerischer Verfahren: Hsu aus Berkeley dis-

kreterisiert den Zustandsraum des Systems und entwickelt die Zellabbildungsmethoden, die in Fachkreisen unter dem Namen „Cell-to-Cell Mapping“ bekannt geworden sind. Publiziert wurden sie in [Hsu 1980], [Hsu 1981], [Hsu 1987] und [Hsu 1992]. Ein System kann damit global, also in seinem gesamten (aber technisch bedingt für die Berechnungen dennoch begrenzten) Zustandsraum betrachtet werden. Eingesetzt und erweitert wurden die Zellabbildungsmethoden unter anderen von Tongue in [Tongue 1987] und [White & Tongue 1994].

In diesem Unterkapitel soll die Funktionsweise der Zellabbildungsmethoden erläutert werden. Denn dieser Technik in der Grundidee ähnlich, aber um entscheidende Verfeinerungen ergänzt, sind die recht jungen „mengenorientierten numerischen Methoden“, die seit etwa einer Dekade entwickelt werden. Detaillierte Informationen dazu sind Kapitel 2 zu entnehmen.

Funktionsweise

Nach der Idee der Zellabbildungsmethode betrachtet man den Phasen- oder Zustandsraum nicht wie herkömmlich als Kontinuum, sondern als Ansammlung sehr vieler Zustandszellen. Jede Zelle soll einen Zustandsbereich repräsentieren. Hsu unterscheidet dabei zwei Arten, nämlich die *Einfache Zellabbildung* („Simple Cell Mapping“) und die *Generalisierte Zellabbildung* („Generalized Cell Mapping“). In der einfachen Zellabbildung wird der Zustandsbereich einer jeden Zelle nur auf eine *einzig*e Zelle abgebildet. Diese Methode dient primär zur Darstellung periodischer Systemantworten. Falls die Abbildungsvorschrift in einer Dimension expandierend ist, so erstreckt sich der Bildbereich einer Zelle über mehrere Bildzellen. Weil die einfache Zellabbildung, die nur eine Bildzelle berücksichtigt, so zu Verfälschungen der tatsächlichen Systemantwort führen kann, entstand die Erweiterung der generalisierten Zellabbildung. Danach kann jede Zelle eine endliche Zahl von Bildzellen aufweisen. Die Bildzellen werden bestimmt, indem eine endliche Zahl von Anfangsbedingungen, die innerhalb der Ursprungszelle liegen, einmal integriert (d. h. abgebildet) werden. Bildzellen sind jene, die durch diesen Schritt „getroffen“ wurden. Aus diesem Vorgehen lässt sich eine Übergangswahrscheinlichkeitsverteilung konstruieren. Die Übergangswahrscheinlichkeiten für alle N Zellen können in einer $N \times N$ großen Matrix abgelegt werden, die danach die gesamte Information über die Dynamik des Systems enthält. Ein Bild des globalen Verhaltens nichtlinearer Systeme entsteht. Seltsame Attraktoren, periodische Orbits und statistisch-deterministische Eigenschaften lassen sich lokalisieren.

Aufbauend auf dem Konzept der Zellabbildung haben sich mittlerweile in verschiedene Richtungen Erweiterungen oder Änderungen aufgetan. Zu nennen ist die *Interpolierende Zellabbildungsmethode* und die *Zellabbildungsmethode für diskontinuierliche Systeme*. Auf beide Erweiterungen wird in den nächsten Abschnitten eingegangen.

Interpolierende Zellabbildungsmethode

Die Zellabbildungs-Methoden betrachten ein Kontinuum — nämlich den Zustandsraum — notwendigerweise als Diskontinuum. Um wegen der begrenzten Feinheit der Diskretisierung hieraus möglicherweise resultierende Verfälschungen auszuschließen, schlägt Tongue die *Interpolierende Zellabbildung* („Interpolated Cell Mapping“) vor [Tongue 1987]. Hierin werden die Bildpunkte der integrierten Anfangsbedingungen mit ihren *exakten* Werten im Kontinuum gespeichert. Durch eine bi-lineare Interpolationsstrategie gelingt es, die Trajektorie zu jeder Anfangsbedingung zu ermitteln, solange sie im Feld der Zellen bleibt. Somit gewinnen die Lösungen wieder ihren ursprünglich kontinuierlichen Charakter zurück.

Zellabbildungsmethode für diskontinuierliche Systeme

In [Kraker, van der Spek und van Campen 1999] werden einige Erweiterungen der Zellabbildungsmethoden für diskontinuierliche Systeme vorgeschlagen. Zusätzlich beschreiben die Autoren eine Parametervariationsmethode für Zellabbildungen und eine Erweiterung für Systeme mit vielen Freiheitsgraden.

Die Erweiterung der *Parametervariations-Zellabbildung* baut auf der einfachen Zellabbildung auf. Mit ihr ist es möglich, die Evolution — also die Verschiebung und Verformung — der Einzugsgebietsgrenzen zu bestimmen, wenn sich Systemparameter verändern. Ein spezieller Algorithmus berechnet hierfür nur die *Änderung* der Grenzen, anstelle sie für jeden Systemparameterwert neu zu berechnen. Dies führt zu Einsparungen an Rechenoperationen.

Die *Zellabbildungsmethode für Systeme mit vielen Freiheitsgraden* wurde durch den exponentiellen Anstieg der Zellenanzahl mit dem Zunehmen der Systemfreiheitsgrade motiviert. Dies erfordert ein hohes Speichervolumen. Zur Zeit der Entwicklung dieser Erweiterung war es kaum möglich, Systeme mit mehr als zwei Freiheitsgraden mit Zellabbildungsmethoden zu untersuchen. Die Darstellung bzw. Auswertung von Ergebnissen aus Zustandsräumen mit mehr als zwei Dimensionen auf Papier oder einem Monitor erfordert stets die Projektion auf einen zu wählenden 2-dimensionalen Unterraum Σ des Zustandsraumes (also eine Ebene). Eine große Datenmenge bleibt ungenutzt. Die Idee der Erweiterung ist, die Wahl der Projektionsebene Σ vorab zu treffen und nur für solche Anfangsbedingungen das Langzeitverhalten zu berechnen, die in der betrachteten Ebene Σ liegen. Aufgabe ist es folglich, die Schnittmenge zwischen Σ und dem Attraktor zu finden.

4.3 Modellierung von Schwingstoßsystemen

In unzähligen Bereichen — nicht nur in den Ingenieurwissenschaften — *wechseln* Systeme ihre Bewegungsgleichung, sobald eine Zustandsgröße — etwa eine Verschiebungs- oder Geschwindigkeitsgröße — einen Schwellen-

wert überschreitet. In vielen Anwendungsgebieten des Maschinenbaus treten Unstetigkeiten oder Stöße auf. In der Elektrotechnik wechseln beispielsweise Dioden ihr Verhalten bei einer Durchlassspannung. Dies führt dazu, dass sich die äußeren Einflüsse, die das Systemverhalten bestimmen, ändern.

Wegen ihrer Relevanz und dem häufigen Vorkommen entsprechender Anwendungen gewinnen nichtglatte dynamische Systeme in der Vergangenheit und heute große Aufmerksamkeit. Dieser Trend macht sich auch in der Literatur bemerkbar. [Leine & Nijmeijer 2004] unterteilen „nichtglatte dynamische Systeme“ in drei Kategorien:

1. Systeme, die eine Rückstellkraft in ihrer Bewegungsdifferentialgleichung enthalten, die eine vom (z. B.) Verschiebungszustand abhängig *nichtglatte*, aber *kontinuierliche* Kennlinie besitzt. Beispiel: Feder-Masse-Schwinger, der mit einer zweiten Feder erst ab einer gewissen Verschiebung in Kontakt steht. Die zweite Federkraft ist eine kontinuierliche aber, nichtglatte Funktion der Verschiebung.
2. Systeme, die einen Kraftterm enthalten, der *nichtkontinuierlich* vom (z. B.) Geschwindigkeitszustand abhängt. Beispiel: Bei trockener Reibung oder Visko-Elastizität hängt die Wirkrichtung der Reibungskraft vom Vorzeichen der Geschwindigkeit ab. Beim Überschreiten der Null-Geschwindigkeit springt die Dämpferkraft.
3. Systeme, bei denen eine Zustandsgröße nichtkontinuierliche Sprünge ausüben kann. Beispiel: Bei einem Stoß zwischen zwei Körpern ändert der Geschwindigkeitszustand sprunghaft seinen Wert. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Stoßsystemen handelt es sich um Systeme dieser dritten Art.

Eine interessante Auswahl von Arbeiten aus dem Gebiet der nichtglatten Dynamik sind [Babitsky 1998], [Brogliato 1996], [Leine et al. 2000], [Leine & Nijmeijer 2004], [Neumann et al. 2007] und [Pavlovskaja & Wiercigroch 2003].

Babitsky baut in seinem Buch die Theorien über Schwingstoßsysteme aus und nutzt Methoden, die auf dem Konzept der sog. harmonischen, äquivalenten Linearisierung basieren. Dies ist bei periodischem Systemverhalten möglich. *Schwingstoßsysteme* definiert er als solche, bei denen Stöße systematisch mit der Frequenz des Schwingers auftreten. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Begriff des Schwingstoßsystems auf Systeme aufgeweitet, in denen eine schwingende Komponente in die Stoßdynamik involviert oder für diese verantwortlich ist.

Leine entwickelt Pfadverfolgungstechniken zur Bifurkationsanalyse von periodischen Lösungen in nichtglatten mechanischen Systemen weiter, in denen trockene Reibung eine Unstetigkeit in der Kraft erzeugt (siehe 2. in der Unterteilung oben).

Eine Art Stoßbohrer für Erdbohrungen (engl. „ground moling machines“), bei der eine harmonisch kraftangeregte Masse erst nach Überwinden eines leeren Zwischenraumes Kontakt mit einem Feder-Dämpfer-Element hat, untersucht Wiercigroch. Auch Schiffsvertäuungen an Hochseebojen für

Öl- und Gastanker fallen in diese Kategorie. Die turmförmigen Bojen sind mit ihrem Fuß am Meeresgrund verankert und oszillieren, harmonisch angeregt von vorbeilaufenden Meereswellen, durch die Auftriebskraft wie ein kopfstehendes Pendel. Ein daran vertäutes Tankschiff verhält sich im Vergleich zur Pendelschwingbewegung wie ein festes Objekt. Mit den Pendelbewegungen in die eine Richtung spannt sich das Tau und hängt in die andere Richtung schlaff durch. Die Rückstellkraft, die der Bojenturm durch das Tau erfährt, ist nicht kontinuierlich und somit nichtglatt. Diese nichtglatte Steifigkeitskennlinie kann in diesem Fall zu gefährlichen, unerwarteten, subharmonischen Resonanzen führen [Thompson & Stewart 1986]. Ein großes Anwendungsgebiet für aus Stößen resultierende Dynamik ist Getrieberatern und -klacken, das aufgrund der Zahneingriffstöße, von Teilungsfehlern, im lastfreien Betrieb oder bei Lastwechseln kaum vermeidbar ist.

Nichtglatte Modellierung ist in allen weiteren Stoßbohruntersuchungen [Wiercigroch, Wojewoda, Krivtsov 2000], [Neumann et al. 2007], [Potthast et al. 2007a] oder auch bei Druckhämmern in Druckmaschinen notwendig. Eine weitere Anwendung von Ultraschallwellen in Bohrprozessen ist im DFG-Projekt *Tieflochbohren* zu finden, in dem höhere Bohrraten und exaktere Bohrergebnisse durch ultraschallüberlagertes Bohren ermöglicht werden [Potthast et al. 2007b].

„Bouncing Ball“ Systeme

Im System des Stoßbohrers, der in [Bar-Cohen et al. 2001b], [Badescu et al. 2005] und Kapitel 3 vorgestellt wird, bewegt sich eine freie Stoßmasse zwischen einer oszillierenden Transducerspitze und der Rückseite eines Bohrstabes. Die Stoßmasse kann aufgrund ihrer geringen Größe und Masse als starres Element angesehen werden. Somit wird sie in Modellen als Massepunkt beschrieben. Ein vergleichbares System, das Mathematiker und Physiker schon lange beschäftigt, ist unter dem Namen „*bouncing ball*“ bekannt. In der Partikel-Physik fand das System Anwendung, wobei hierfür mit rein elastischen Stößen (Stoßzahl 1.0) gerechnet wird. Mittlerweile stellt das Bouncing Ball System ein Standard-Beispiel der Stoßdynamik und mathematischen Analyse nichtglatter Systeme dar. Sehr detailliert wurde es bisher untersucht, unter anderen von [Holmes 1982], [Guckenheimer & Holmes 1983], [Tufillaro, Mello, Choi, Albano 1986], [Mello, Tufillaro 1985]. Mitunter wird das Modell des Bouncing Ball Systems sogar „dissipative Standard-Abbildung“ genannt. Dabei wird oft die vereinfachende Annahme getroffen, die Flughöhe läge um Größenordnungen über der Schwingamplitude der Anregung [Holmes 1982]. Nur mit dieser Annahme ist es möglich, die Abbildung explizit zu definieren. [Tufillaro, Mello, Choi, Albano 1986] stellen jedoch eine implizite, *exakte* Abbildung auf und weisen Periode-1-Fixpunkte samt deren Stabilität durch Linearisieren und Vorzeichenauswerten der Eigenwerte analytisch nach. So lassen sich für die Parameterebene „Anregeamplitude über Quadrat der Anregungsfrequenz“ Grenzkurven zwischen Gebieten unterschiedlicher Periodizität bestimmen, die erstaunlicherweise alle Geraden sind.

Die Ähnlichkeiten des Bouncing Ball Systems mit dem Ultraschall-Stoßbohrsystem aus Kapitel 3, das in den folgenden Kapiteln in unterschiedlichen Modellen beschrieben und untersucht wird, beschränken sich auf die Modellierungsweise mit Newtons Stoßzahl und die Art der Phasenraumdarstellung. [Brogliato 1996] benennt die Abbildungsvorschriften, die als Differenzgleichung die Bewegungsgleichungen für Stoßsysteme ohne speichernde Elemente darstellen, „*impact map*“ und hat damit gleichzeitig die Poincaré-Abbildung für derartige Systeme definiert. Neu bezüglich der nichtlinearen Systemtheorie ist, dass in der Poincaré-Abbildung der „*impact map*“ die möglicherweise unregelmäßigen Stoßzeitpunkte anstelle periodischer Zeitpunkte gewählt werden. Somit ist die Poincaré-Abbildung bereits durch die Differenzbewegungsgleichung gegeben.

In einem wesentlichen Punkt unterscheidet sich die Dynamik der Stoßmasse im Ultraschall-Stoßbohrer stark von der des „bouncing balls“: letzterer ist unbeschränkt bzgl. seiner Flughöhe. Somit lässt eine hohe Abfluggeschwindigkeit eine große Flughöhe und somit eine lange Flugzeit folgen. Im Stoßbohrer gilt dieser Zusammenhang reziprok: die Flughöhe ist beschränkt; somit bedingt eine große Abfluggeschwindigkeit der Masse eine *kurze* Flugdauer. Vielfach finden die analytischen, numerischen oder experimentellen Untersuchungen des „bouncing balls“ in der Literatur in einem unteren Frequenzbereich statt, indem Anregeperiode und Stoßperiode gleiche Größenordnung haben können. Den Besonderheiten, die bei Frequenzen im Ultraschallbereich auftreten, ist noch nicht Rechnung getragen worden. So bedingen die im Vergleich zur Anregeoszillation möglicherweise *flachen* Flugbahnen besondere Berücksichtigung beim numerischen Lösen der impliziten Bewegungsgleichungen. Auf einen speziell auf dieses Problem zugeschnittenen Algorithmus wird in Unterkapitel 5.3 eingegangen. Weiterhin ist es notwendig, sogenannte *Mehrfachstöße* (siehe dazu Fußnote auf Seite 37) gesondert zu berücksichtigen: unter bestimmten Voraussetzungen kann es zwischen Oszillator und Stoßmasse zu wiederholtem Aufeinanderstoßen kommen, bevor ein vollständiges Lösen der Stoßmasse vom Oszillator möglich ist.

In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit wird das oben beschriebene, dynamische System mit begrenzter Flughöhe in zwei Varianten analytisch untersucht. Im ersten Modell (Unterkapitel 5.1) wird die begrenzte Flughöhe auf einem festen Wert gehalten; im zweiten Modell (Unterkapitel 5.2) ist die Flughöhe variabel und wird als Systemzustand aufgenommen.

Kapitel 5

Modellierung des Ultraschall-Stoßbohrers

Notwendiger und wesentlicher Schritt hin zur analytischen oder numerischen Untersuchung eines realen Systems ist zunächst die mathematische Abbildung des Systems in einem Modell. Diesem ersten Schritt muss Beachtung geschenkt werden, da von der Güte eines Modells nachweislich die Ergebnisse einer Simulation, die Optimierung von Systemeigenschaften oder die Systemauslegung abhängen.

Ein Modell beschreibt stets ein Abbild der Natur. Häufig idealisiert man darin Eigenschaften, die für das Systemverhalten keine oder nur untergeordnete Rollen spielen und abstrahiert das Verhalten auf die wesentlichen, zu untersuchenden Merkmale.

Modelle realer Systeme können in bestimmten Fällen als konservativ – also energieerhaltend – angenähert werden, und unter Umständen kann eine lineare Formulierung brauchbare Lösungen liefern. Wichtige Phänomene der meisten realen, mechanischen Systeme sind jedoch auf Nichtlinearitäten und Dissipation mechanischer Systemenergie zurückzuführen, was oft eine

- *dissipative* und
- *nichtlineare* Modellierung erfordert.

Dissipativ — also energieverzehrend — sind reale Systeme, weil die mechanische Systemenergie entweder durch mechanische Reibung, Dämpfung oder durch inelastische Stöße dissipiert¹ wird.

Lineare Systeme sind zwar in bestimmten Fällen in der Lage, einen ersten Eindruck des Systemverhaltens zu geben. Für eine Vorhersage sämtlicher tatsächlicher Phänomene eines realen Modells sind nichtlineare Terme in den Modell-Differentialgleichungen jedoch unerlässlich. Für die Analyse hat das Konsequenzen: wäre ein dissipatives System linear, so besäße es genau eine stabile Lösung, zu der jegliches Langzeitverhalten hin tendiert. Nichtlineare Systeme beinhalten besondere Phänomene wie die Koexistenz mehrerer

¹*Dissipation* bedeutet wörtlich „Zerstreuung“ und bezeichnet damit die Zerstreuung mechanischer Energie, die dadurch in Wärme umgewandelt wird und somit als für das mechanische System verloren gilt.

Attraktoren, nichtperiodisches (also chaotisches) Verhalten, selbst wenn das System periodisch angeregt wird, und unterschiedliche Arten von Bifurkationen, also plötzliches Ändern von Lösungseigenschaften wie Vielfachheit, Form, Art, Ausdehnung und Stabilität, wenn ein Systemparameter seinen Wert infinitesimal² variiert. Dergleichen Phänomene nichtlinearer Systeme verlangen besondere Analysemethoden, die für lineare Systeme nicht nötig sind.

Systemzustand und Parameter

Das Verhalten eines Systems hängt von System- und Prozessparametern ab. Systemparameter bemessen Eigenschaften, die dem System fest anhaften. Prozessparameter sind Größen, die sich während des Betriebes ergeben oder eingestellt und verändert werden können.

Von den folgenden Parametern hängt das Verhalten des Ultraschall-Stoßbohrers ab:

Systemparameter sind

- Materialeigenschaften wie Dichte oder Elastizität des Transducers (Oszillators), des Bohrers und der freien Stoßmasse,
- Oberflächenbeschaffenheiten (Rauigkeit, Krümmung, Härte) der Kontaktflächen, die in Stöße involviert sind,
- Geometriegrößen (Längen und Querschnittsflächen der Körper) und
- mechanische Vorspannung der Piezokeramiken.

Prozessparameter sind

- elektrische Anregespannung,
- Anregefrequenz,
- Anpressdruck des Bohrers auf das Bohrgut (Gestein),
- Flugabstand der Stoßmasse und
- Umgebungstemperatur.

Ein mathematisches Modell will das Verhalten eines Systems beschreiben. Der Begriff des *Systemverhaltens* bezeichnet die Angabe des gesamten Systemzustands zu allen Zeiten. Unter dem *Systemzustand* versteht man die zahlenwertige Angabe sämtlicher Zustandsgrößen, die den Systemzustand eindeutig definieren.

Zeitabhängige, veränderliche **Zustandsgrößen** können z. B.

- Schwerpunktgeschwindigkeiten aller starren Körper in drei Dimensionen,
- Schwerpunktpositionen aller starren Körper in drei Dimensionen,

²*infinitesimal*: unendlich klein werdend

-
- Winkelgeschwindigkeiten aller starren Körper in drei Dimensionen,
 - Winkellagen aller starren Körper in drei Dimensionen oder
 - Verformungen der elastischen Körper in drei Dimensionen

sein.

Ein Modell mit dem Anspruch der Vollständigkeit würde versuchen, in Abhängigkeit aller System- und Prozessparameter die zeitlichen Veränderungen all dieser Zustandsgrößen miteinander in Beziehung zu setzen. Der Aufwand, ein Systemverhalten derart vollständig zu beschreiben, wäre enorm. Es ergäbe sich eine Komplexität hohen Ausmaßes, die numerisches Lösen kaum noch möglich machte. Schließlich wäre die Flut an Ergebnissen nicht mehr auswert- oder begreifbar.

Daher ist es das Ziel des Wissenschaftlers zu erkennen, welche Systemgrößen für eine Analyse des Verhaltens berechnet werden müssen und welche Parameter die Entwicklung der Systemgrößen maßgeblich beeinflussen. Dabei ist es ein bewährtes Vorgehen, sich von sehr einfach gehaltenen Modellen, die reales Verhalten noch zu ungenau wiedergeben werden, hin zu aufwändigeren Modellen zu verbessern, um die Komplexität so gering wie möglich und nur so hoch wie nötig zu halten.

Modellierungsvorgehen für den Ultraschall-Stoßbohrer

In Kapitel 3 wurde das reale System des Ultraschall-Stoßbohrers vorgestellt. Das vorliegende Kapitel wird sich der modellhaften Beschreibung von dessen Eigenschaften in mathematischer Sprache widmen. Es werden zwei Modelle hergeleitet werden: zunächst ein einfaches, grundlegendes Modell in Unterkapitel 5.1. Es dient in erster Linie einer Einführung in die Thematik der nichtglatten Systemanalyse. Es ist bewusst einfach gehalten und zeigt dem Leser so das Potential der mengenorientierten Numerik, mit der die Modelle in Kapitel 7 untersucht und studiert werden. Die Zahl der Zustandsgrößen bleiben hier auf zwei beschränkt; dieses Modell fokussiert ausschließlich auf die Bewegung der freien Stoßmasse.

Jede Modellierung der Wirklichkeit abstrahiert das tatsächliche Verhalten auf diejenigen Vorgänge, die für den Zweck der angestrebten Untersuchungen relevant erscheinen. Gleichzeitig stellt man Zusammenhänge idealisiert dar. So reduziert man z. B. einen Körper auf eine Punktmasse, wenn Wellenausbreitungen innerhalb des Körpers und Verformungen vernachlässigbar sind und man annehmen darf, dass er nur translatorische (und keine rotatorischen) Bewegungen ausführt. In dieser Vernachlässigung stecken zwei Annahmen: erstens nimmt man an, dass sich das gesamte System, in dem dieser Körper eine Komponente ist, genau so verhält, wie wenn es sich um einen starren, also unverformbaren Körper handeln würde. Zweitens geht man davon aus, dass Rotationen des Körpers mit endlicher Ausdehnung entweder nicht stattfinden oder so klein sind, dass sie das untersuchte Verhalten des Gesamtsystems nicht beeinflussen. Die Bewegungsgleichungen können dann einfach gehalten werden, was eine

wichtige Voraussetzung für eine Analyse darstellt.

Prinzipiell ist es wichtig, der Modellierung zugrundeliegende Annahmen zu validieren. Für die Validierung des einfach gehaltenen Modells aus Kapitel 5.1 wurde ein reales System im Labor untersucht. Der Prüfstand und die Messverfahren werden in Kapitel 6 beschrieben. Der Vergleich des Modells mit der Wirklichkeit wird im Unterkapitel 6.5 durchgeführt.

Das zweite Modell, das anschließend in Unterkapitel 5.2 hergeleitet wird, stellt eine Verfeinerung des ersten Modells in einigen Aspekten dar: die im realen Bohrsystem freie Beweglichkeit des Oszillators wird in dieses Modell mit zwei zusätzlichen Zustandsgrößen aufgenommen. Außerdem werden der Prozessparameter Anpresskraft und der Systemparameter Oszillatormasse zusätzlich in die Modellgleichungen einfließen.

Unterkapitel 5.3 geht im Detail auf die Implementierung eines Lösungsalgorithmus ein, der die für die Modellgleichung erforderliche Bestimmung der Schnittpunkte einer gegebenen Gerade mit einer Kosinusfunktion und einer gegebenen Parabel mit einer Kosinusfunktion vornimmt. Im Kontext dieser Anwendung ist es nicht von Belang, alle Schnittpunkte zu finden, sondern es ist wichtig, den numerisch kleinsten der Menge an Schnittpunkten zu identifizieren, da dieser den Zeitpunkt des Stoßkontaktes zwischen zwei Stoßkörpern des Stoßbohrsystems beschreibt.

5.1 Herleitung eines Modells 2. Ordnung

Die Bewegung der frei-fliegenden Masse innerhalb des Stoßbohrers ist von zentraler Bedeutung für die Funktionsweise des Bohrsystems. In diesem Unterkapitel wird ein einfaches Modell in Form von mathematischen Bewegungsgleichungen aufgestellt. Es modelliert ein einfaches Schwingstoßsystem, das in den folgenden Kapiteln simuliert und schließlich unter Anwendung der mengenorientierten Methoden untersucht wird.

5.1.1 Zeitdiskrete Modellierung

Dieser Abschnitt leitet ein System zeitdiskreter Bewegungsgleichungen 2. Ordnung – also mit zwei Zustandsvariablen – her. Bild 5.1 zeigt eine Skizze des Modells. Die Bohrrichtung ist in der schematischen Skizze bewusst horizontal angenommen, um gedanklich den Einfluss eines Gravitationsfeldes auf die Bewegung der Masse zu vernachlässigen. Wegen der kurzen Flugzeiten der Masse zwischen zwei Richtungswechseln ist diese Annahme selbst für das Bohren vertikaler Löcher näherungsweise gerechtfertigt bzw. gilt im Falle horizontalen Bohrens. Der Bohrstab ist hier mit seiner systeminneren Kontaktseite als starre, unbewegliche Wand (Prallplatte) dargestellt. Die Starrkörperbewegungen des gesamten Oszillators werden in diesem Modell vernachlässigt, um zunächst mit wenigen Freiheitsgraden die Komplexität des Modells zu begrenzen und sich ganz auf die Dynamik der Masse zu konzentrieren. Demzufolge ist die Anregung durch die Oszillatortippspitze allein als eine harmonische Fußpunkterregung dargestellt.

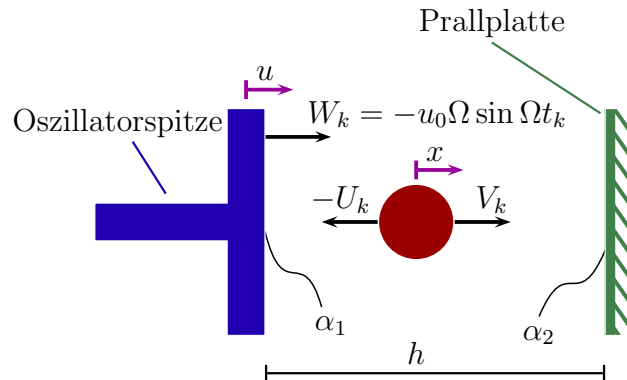


Bild 5.1: Einfaches Modell 2. Ordnung des Stoßbohrers

Von 5 Systemparametern hängt das Modellverhalten ab:
 Prozessparameter sind

- u_0 : Amplitude und
- Ω : Anregekreisfrequenz,

Modellparameter sind

- α_1, α_2 : Stoßzahlen nach Newton und
- h : Abstand zwischen Nulllage der harmonischen Fußpunkterregung und Prallplatte.

W_k, U_k, V_k bezeichnen die Geschwindigkeiten der Oszillatorspitze, der Stoßmasse *vor* und der Stoßmasse *nach* dem Stoß k ; dabei zeigt die positive Bewegungsrichtung nach rechts. u symbolisiert die Position der Oszillatorspitze.

In vielen Fällen werden Bewegungsgleichungen in zeitkontinuierlicher Form, also als Differentialgleichungssystem aufgestellt. Dies kann sinnvoll sein, wenn eine stetige, kontinuierliche und glatte Bewegung beschrieben werden soll. Bei nichtglatten Systemen wie dem Vorliegenden wechselt das System bei jedem Stoßkontakt die Bewegungsgleichungen. Die Dynamik lässt sich dann nicht mehr in Form eines geschlossenen Differentialgleichungssystems beschreiben. Es eignet sich hier eine *zeitdiskrete* Formulierungsweise. Der Systemzustand wird nicht mehr kontinuierlich zu jeder Zeit t definiert, sondern nur zu diskreten Zeitpunkten. Für den Stoßbohrer ist es sinnvoll, diese Zeitpunkte in die Augenblicke zu legen, in denen die Stoßmasse auf den Oszillator stößt. In diesen Momenten wird der Systemzustand durch die Phasenlage des Stoßes in Bezug auf die harmonische Anregung und die Abfluggeschwindigkeit der Masse nach dem Stoß eindeutig definiert. Aus diesen *zwei Zustandsgrößen* lässt sich problemlos der gesamte Bewegungsverlauf bis zum nächsten Masse-Oszillator-Stoß ableiten.

Ein System von zwei *Differenzgleichungen* wird aufgestellt. Es definiert eine *Abbildungsvorschrift*, die vom Stoßzustand j auf den Stoßzustand $j + 1$ abbildet. Ähnliche Vorgehensweisen zur Modellierung von Stoßsystemen

sind aus [Holmes 1982], [Guckenheimer & Holmes 1983], [Brogliato 1996], [Mello, Tufillaro 1985] oder [Neumann & Sattel 2007] bekannt.

Folgende vereinfachende Annahmen wurden für diese erste Modellbildung getroffen:

- die harmonische Oszillatorschwingung lässt sich nicht durch die Stöße der Stoßmasse beeinflussen, d. h. die Verschiebung $u(t)$ der Oszillatorspitze wird als harmonische Fußpunkterregung fest vorgegeben.³
- die Starrkörperbewegungen des Bohrstabes werden vernachlässigt, die Kontaktfläche des Bohrstabes mit der Kugel wird als eine Prallplatte abgebildet.
- die Starrkörperbewegungen des gesamten Oszillators werden in diesem Modell zunächst ignoriert.
- das systeminnere Bohrstabende — hier als Prallplatte modelliert — und die Mittelposition $u = 0$ der Oszillatorspitze befinden sich in *konstantem Abstand* h zueinander.
- der Stoßvorgang zwischen dem Oszillator und der Stoßmasse wird als unendlich kurz angesehen und durch Newtons Stoßhypothese mit Stoßzahl α_1 beschrieben.
- der Stoßvorgang zwischen der Stoßmasse und dem systeminneren Bohrstabende (Prallplatte) wird ebenfalls durch die Stoßhypothese mit Stoßzahl α_2 beschrieben.
- Gravitation beeinflusst die Bewegungen nicht⁴.

5.1.2 Herleitung zeitdiskreter Bewegungsgleichungen

Zwischen zwei Stößen führt die modellierte Stoßmasse eine ungedämpfte Bewegung konstanter Geschwindigkeit aus. Somit ist es angebracht, ihr Langzeitverhalten wie oben beschrieben als zeitdiskrete Entwicklung aufeinanderfolgender Kontakte mit dem Oszillator zu beschreiben. Anstelle von zeitkontinuierlichen Zustandsgrößen $x(t)$, $\dot{x}(t)$ werden zur eindeutigen Beschreibung des Systemzustands die Zustandsvariablen

- t_k , Zeitpunkt des k -ten Kontaktes zwischen Stoßmasse und Oszillator und
- V_k , Geschwindigkeit der Stoßmasse nach dem k -ten Stoß am Oszillator

verwendet. Die Abbildung $(t_k, V_k) \mapsto (t_{k+1}, V_{k+1})$ wird als Differenzgleichungssystem definiert, das im Folgenden hergeleitet wird.

³Zur Validierung dieser Annahme siehe Unterkapitel 6.1.2, Seite 56.

⁴Weil die Gravitationskraft nicht auf die Stoßmasse wirkt, fließt die Größe der Stoßmasse in dieses Modell nicht ein.

Die Fußpunktverschiebung $u(t)$ des harmonisch schwingenden Oszillators sei vorgegeben als

$$u(t) = u_0 \cos \Omega t . \quad (5.1)$$

Für die Herleitung der Modellgleichungen führen wir drei Geschwindigkeiten als Hilfsgrößen ein, die auch in Skizze 5.1 enthalten sind:

$$U_k := \dot{x}(t_k^-) , \quad V_k := \dot{x}(t_k^+) , \quad W_k := \dot{u}(t_k) , \quad (5.2)$$

U_k und V_k bezeichnen die Geschwindigkeit der Stoßmasse vor bzw. nach dem Stoß k am Oszillator, und W_k ist die Oszillatorgeschwindigkeit zum Stoßzeitpunkt.

Die Stöße der Stoßmasse mit dem Oszillator bzw. der Prallplatte sind teilelastisch. Die Energiedissipation beim Stoß wird mittels Stoßzahlen nach Newton berücksichtigt, die wie folgt definiert werden:

α_1 : Stoßzahl zwischen Oszillator und Stoßmasse:

$$\alpha_1 := -\frac{V_k - W_k}{U_k - W_k} \rightsquigarrow V_{k+1} = (1 + \alpha_1)W_{k+1} - \alpha_1 U_{k+1} \quad (5.3)$$

α_2 : Stoßzahl zwischen Stoßmasse und Bohrstab:

$$\alpha_2 := -\frac{U_{k+1}}{V_k} \rightsquigarrow U_{k+1} = -\alpha_2 V_k \quad (5.4)$$

Mit dem unveränderlichen Abstand h zwischen der Mittelposition der Oszillatorspitze und der Prallplatte kann die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen am Oszillator berechnet werden, wenn man von der Möglichkeit eines Mehrfachstoßes⁵ absieht:

$$\begin{aligned} t_{k+1} - t_k &= \Delta t_{\text{Oszillator} \rightarrow \text{Prallplatte}} + \Delta t_{\text{Oszillator} \leftarrow \text{Prallplatte}} \\ &= \frac{h - u(t_k)}{V_k} + \frac{h - u(t_{k+1})}{-U_{k+1}} . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Einsetzen von U_{k+1} aus Gl. (5.4) und $u(t)$ aus Gl. (5.1) und Umstellen führt auf

$$0 = t_{k+1} - t_k - \frac{1}{V_k} \left[h \left(1 + \frac{1}{\alpha_2} \right) - u_0 \cos \Omega t_k - \frac{u_0}{\alpha_2} \cos \Omega t_{k+1} \right] . \quad (5.6)$$

Die transzendente⁶ Gleichung (5.6) kann explizit nicht nach der gesuchten Zustandsgröße t_{k+1} aufgelöst werden. Die zweite zeitdiskrete Zustandsgleichung gibt die Folge der Abfluggeschwindigkeiten V_k nach jedem Masse-Oszillator-Stoß an. Sie folgt aus Gl. (5.3) durch Einsetzen von (5.2) und (5.4):

$$V_{k+1} = \alpha_1 \alpha_2 V_k - (1 + \alpha_1) u_0 \Omega \sin \Omega t_{k+1} . \quad (5.7)$$

⁵Ein sogenannter Mehrfachstoß meint in diesem Zusammenhang einen Mehrfachstoß am Oszillator und bezeichnet das mehrfache Aufeinandertreffen von freier Stoßmasse und Oszillator, ohne dass die Stoßmasse dazwischen Kontakt mit der Prallplatte hat. Dies geschieht immer dann, wenn $V_k < 0$ oder wenn V_k einen betragsmäßig kleinen Wert erreicht. Dann nämlich wird die Stoßmasse den Aktionsradius (u_0) der Oszillatorspitze nicht verlassen, bevor sie von der harmonischen Schwingung wiederholt eingeholt wird.

⁶transzendent: siehe Fußnote auf Seite 45.

Somit ist das System von zwei Differenzgleichungen mit den Zustandsgrößen $\mathbf{x}_k = [V_k, t_k]^T$ definiert durch die implizite Gleichung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) := \begin{bmatrix} t_{k+1} - t_k - \frac{1}{V_k} \left[h \left(1 + \frac{1}{\alpha_2} \right) - u_0 \cos \Omega t_k - \frac{u_0}{\alpha_2} \cos \Omega t_{k+1} \right] \\ V_{k+1} - \alpha_1 \alpha_2 V_k + (1 + \alpha_1) u_0 \Omega \sin \Omega t_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

5.1.3 Notwendigkeit transzendenter Bewegungsgleichungen

Wünschenswert ist es, die die Bewegung beschreibende Differenzgleichung (5.9) in einfacherer, also expliziter Form zu formulieren, um sie analytisch lösen und eine Zeitreihe berechnen zu können. Guckenheimer und Holmes [Guckenheimer & Holmes 1983] bzw. Holmes [Holmes 1982] treffen im Bouncing-Ball Problem (siehe Unterkapitel 4.3) die Annahme, die Flughöhe der Masse sei der Oszillatoramplitude um Größenordnungen überlegen, weshalb die sich ändernde Oszillatortippenposition vernachlässigt werden kann. Im realen Stoßbohrer stellt sich dieser Abstand jedoch variabel ein und nimmt mitunter sehr kleine Werte an.

Für das vorliegende, einfach gehaltene Modell wollen wir uns jedoch auf feste Abstände h in der Größenordnung von Millimetern beschränken, wie sie auch später in einem Laborexperiment eingestellt werden sollen (Unkapitel 6.1). Realistische Amplitudenwerte der Oszillatortippen liegen im Bereich von ca. $10 \mu\text{m}$. Wir könnten vereinfachend die Annahme treffen, dass die Masse nahezu auf einer Höhe von 0 m mit dem Oszillator kollidiert. Der relative Fehler, den wir in Kauf nehmen müssten, läge lediglich bei

$$\frac{\Delta s}{s} < \frac{u_0}{h} = \frac{10 \mu\text{m}}{1 \text{mm}} = 1\% \quad (5.10)$$

und erscheint hinnehmbar. Wird also in Gleichung (5.5)

$$u(t_k) \approx u(t_{k+1}) \approx 0 \quad (5.11)$$

angenommen, folgt anstelle von Gleichung (5.6) für die Flugdauer

$$t_{k+1} - t_k = \frac{h}{V_k} \left(1 + \frac{1}{\alpha_2} \right) \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta(t_{k+1} - t_k)}{t_{k+1} - t_k} \approx 1\%. \quad (5.12)$$

Wie setzt sich dieser geringe Fehler nun aber in der unverändert geltenden Gl. (5.7)

$$V_{k+1} = \alpha_1 \alpha_2 V_k - (1 + \alpha_1) u_0 \Omega \sin \Omega t_{k+1} \quad (5.13)$$

fort? Die Flugdauer $t_{k+1} - t_k$ mit einem relativen Fehler von 1% geht hier in die Sinus-Funktion ein. Wegen ihrer Periodizität muss der absolute Fehler

des Arguments herangezogen und auf eine Periodendauer bezogen werden. In Laborversuchen wird sich später zeigen, dass für $h = 5$ mm Flugdauern von bis zu 50 ms erreicht werden können (siehe Bild 6.6). Bei einer Frequenz von 20 kHz entspricht ein 1%-Fehler der Flugdauer bereits dem 10-fachen einer Periodendauer. Somit könnte bereits jedes Argument des Sinus innerhalb einer Periode fehlerhaft erreicht werden. Der relative Fehler der Geschwindigkeits-Zustandsgröße kann wie folgt nach oben abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta V_{k+1}}{V_{k+1}} &\leq \frac{(1 + \alpha_1)u_0\Omega (\max[\sin \Omega t_{k+1}]_0^{2\pi} - \min[\sin \Omega t_{k+1}]_0^{2\pi})}{\alpha_1\alpha_2 V_k - (1 + \alpha_1)u_0\Omega \sin \Omega t_{k+1}} \\
 &= \frac{2(1 + \alpha_1)u_0\Omega}{\alpha_1\alpha_2 V_k - (1 + \alpha_1)u_0\Omega \sin \Omega t_{k+1}} \\
 &\leq \frac{2(1 + \alpha_1)u_0\Omega}{\alpha_1\alpha_2 V_k - (1 + \alpha_1)u_0\Omega} \\
 &= \frac{2}{\frac{V_k}{u_0\Omega} \frac{\alpha_2}{1+1/\alpha_1} - 1} \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

Für $\alpha_1 \in [0, 1]$ und $\alpha_2 \in [0, 1]$ ist der Term

$$\frac{\alpha_2}{1 + 1/\alpha_1} \in [0, 0.5].$$

Für $\Omega = 2\pi \cdot 20 \text{ kHz} \approx 1.3 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$, $u_0 \in [1, 10] \mu\text{m}$ und $V_k \in [0.1, 10] \text{ m/s}$ ist der Term

$$\frac{V_k}{u_0\Omega} \in [0.08, 1.3].$$

Somit ist der gesuchte relative Fehler

$$\frac{\Delta V_{k+1}}{V_{k+1}} \in [-200, 8]\%. \tag{5.15}$$

Mit bis zu 200% Abweichung vom tatsächlichen Wert für die Abfluggeschwindigkeit V_k folgt die Notwendigkeit, für die genaue Abflugposition die momentane Auslenkung $u(t_k)$ der Oszillatorspitze zum Abflugzeitpunkt mit zu berücksichtigen, was auf die transzendente, implizite Differenzgleichung (5.6) führt.

Diese Notwendigkeit könnte bezüglich des realen Experiments allenfalls dadurch relativiert werden, dass eine präzise Festlegung des Abstandes h kaum möglich ist; weiterhin wird später eine starke Empfindlichkeit des Verhaltens bezüglich der Stoßzahlen festgestellt (Kapitel 6.2.3), die im Modell als konstant angenommen werden.

5.1.4 Mehrfachstöße

Die Abbildungsfunktion (5.9) beschreibt die Bewegung der Stoßmasse unter der Annahme, dass sie nach einem Stoß am Oszillator direkt auf die

Prallplatte zufliegt. Tatsächlich kann es jedoch vorkommen, dass sie vorher mehrfach auf den Oszillator stößt. Diesen Vorgang bezeichnet man als *Mehrfachstoß*. Sein Auftreten ist selten und wird von kleinen oder negativen Abfluggeschwindigkeiten V_k verursacht. In solchen Fällen verlässt die Masse den Aktionsradius des schwingenden Oszillators nicht, bevor dessen Spitze wiederholt auf die Masse trifft. Bild 5.2 zeigt mögliche Fälle eines doppelten und eines dreifachen Mehrfachstoßes. Nach jedem Stoß der Masse am Oszil-

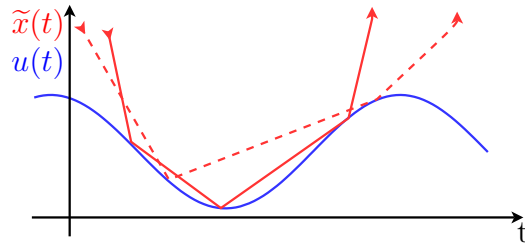


Bild 5.2: Zeitverlauf der Stoßmasse $\tilde{x}(t)$ sowie des Oszillators $u(t)$ während Mehrfachstößen

lator lautet ihre kontinuierliche Bewegungsgleichung bis zum nächsten Stoß

$$\tilde{x}(t) = V_k(t - t_k) + u_0 \cos \Omega t_k . \quad (5.16)$$

Ein Mehrfachstoß tritt genau dann auf, wenn ein t_{k+1} existiert mit

$$\tilde{x}(t_{k+1}) = u(t_{k+1}) , \quad (5.17)$$

was auf die Bedingung

$$\frac{u_0}{V_k} (\cos \Omega t_{k+1} - \cos \Omega t_k) = t_{k+1} - t_k, \quad t_k < t_{k+1} \quad (5.18)$$

führt. Numerisch zu bestimmen, ob ein t_{k+1} existiert, welches Gl. (5.18) erfüllt, stellt eine Herausforderung dar. Existiert solch ein t_{k+1} nicht, so findet kein Mehrfachstoß statt und es ist die Abbildungsgleichung (5.9) zu lösen, um t_{k+1} zu bestimmen.

5.2 Herleitung eines verfeinerten zeitdiskreten Modells

Das in Unterkapitel 5.1 untersuchte einfache Modell 2. Ordnung gab einen konstanten Abstand zwischen Oszillatorschwerpunkt und Prallplatte (Bohrer) vor. Eine Eigenschaft des USDC-Prototypen ist jedoch ein sich selbständig einstellender Abstand. Das folgende Unterkapitel leitet ein verfeinertes Modell her, das diesem Umstand gerecht wird. Es berücksichtigt die Starrkörperbewegung des Aktors. Da in diesem Modell auch die Stoßmasse durch den Einfluss der Schwerkraft beschleunigt wird, geht hier auch

ihre Masse als Parameter in die Gleichungen mit ein. Zur Erinnerung — im ersten, einfacheren Modell spielte die Masse der Stoßmasse keine Rolle, da hier kein Einfluss der Schwerkraft vorausgesetzt wurde (wie es etwa bei horizontalem Bohren der Fall ist). Somit wurde die Bewegung allein durch kinematische⁷ Gesetze bestimmt.

5.2.1 Aufstellen des verfeinerten Modells 4. Ordnung

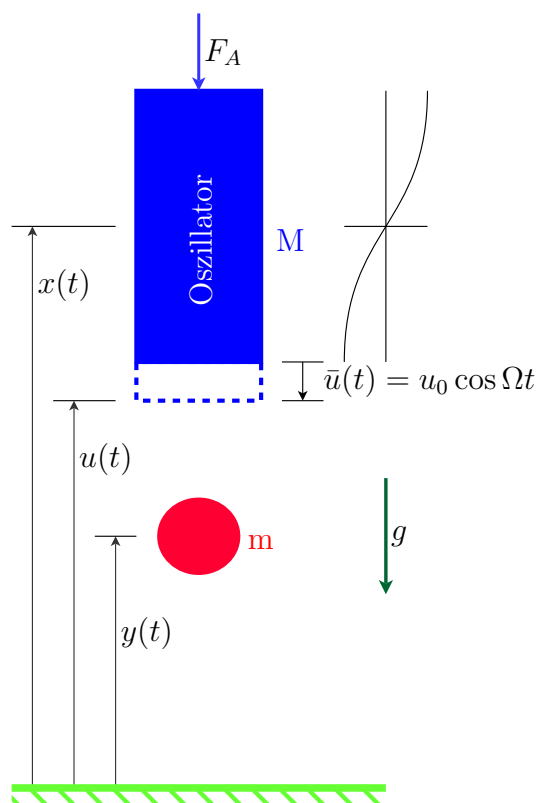


Bild 5.3: Verfeinertes Modell 4. Ordnung

Bild 5.3 zeigt den Oszillator, dessen unteres Ende infolge der angeregten ersten Längseigenmode (in der Skizze rechts vom Oszillator dargestellt) harmonisch schwingt, und die Stoßmasse (dargestellt als Kugel). Die Positionen $x(t)$ des Oszillators sowie $y(t)$ der Stoßmasse werden als Höhe über dem Boden gemessen. So kann die Auslenkung des Oszillator-Stößels $u(t)$ als eine an den Oszillator gekoppelte Bewegung $\bar{u}(t) := u_0 \cos \Omega t$ formuliert werden:

$$u(t) = x(t) - \bar{u}(t). \quad (5.19)$$

Um ein Eindringen der Körper ineinander auszuschließen, wird voraus-

⁷Die *Kinematik* ist die Lehre von der Bewegung von Körpern. Nur geometrische Überlegungen fließen in die kinematischen Gesetze ein. Im Ggs. dazu ist die *Kinetik* die Lehre von der Wirkung von Kräften.

gesetzt:

$$0 \leq y(t) \quad \forall t \quad \text{und} \quad y(t) \leq u(t) \quad \forall t. \quad (5.20)$$

Auf den Oszillator wirke die Anpresskraft F_A . Diese kann positiv, negativ oder Null sein. Auf beide Körper wirke außerdem ihre Gewichtskraft.

Von 7 Systemparametern hängt das Modellverhalten ab: Prozessparameter sind

- u_0 : Schwingamplitude der Oszillatorspitze,
- Ω : Anregekreisfrequenz,
- F_A/M : Oszillatorschwerpunktsbeschleunigung aus Anpresskraft und
- g : Erdbeschleunigungskomponente in Längsrichtung;

Modellparameter sind

- α_1, α_2 : Stoßzahlen nach Newton und
- $\mu = \frac{M}{m}$: Massenverhältnis Oszillatormasse zu Stoßmasse.

Vier Zustandsgrößen

Im Betrieb des Bohrers kommt es zu Stoßkontakten zwischen den drei Kontaktpartnern Oszillatorspitze, freie Stoßmasse (im Folgenden als „Kugel“ bezeichnet) und dem inneren Ende des Bohrstabes. Dieses Ende des Bohrstabes soll im Folgenden mit „Prallplatte“ bezeichnet werden, um auf seine Starrheit und Fixiertheit hinzuweisen, die wir in dieser Modellierung voraussetzen. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen führen die beiden beweglichen Körper Oszillator und Kugel freie, beschleunigte Bewegungen durch, die dem zweiten Newtonschen Axiom (Kraft pro Masse = Beschleunigung) gehorchen und durch Anfangsgeschwindigkeit sowie Anfangsauslenkung eindeutig festgelegt sind. Somit genügt zur eindeutigen Beschreibung der Bewegungen der beiden Körper allein die Angabe des Bewegungszustands beider Körper *nach* jedem Stoß sowie die Angabe des Zeitpunktes, an dem der jeweilige Stoß stattfand. Bis zum Auftreten des nächsten Stoßes können die Bewegungen damit als gegeben angesehen werden.

Folglich wird der dynamische Zustand des Systems nur zu diskreten Zeitpunkten beschrieben, nämlich genau zu den Zeitpunkten, an denen ein Stoß zwischen Kugel und Oszillator auftritt. Durch die folgenden vier Zustandsgrößen wird der Systemzustand demnach vollständig beschrieben:

- t_k : Stoßzeitpunkt
- $x(t_k)$: Oszillator-Position im Stoßzeitpunkt
- $\dot{x}(t_k^+)$: Oszillator-Geschwindigkeit direkt nach dem Stoß
- $\dot{y}(t_k^+)$: Kugel-Geschwindigkeit direkt nach dem Stoß

Anmerkung: Da Kugel und Oszillator im Stoßzeitpunkt in Kontakt sind, ist wegen $x(t_k) = y(t_k)$ die Kugel-Position $y(t_k)$ im Stoßzeitpunkt ebenso gegeben. Abkürzend werden die Symbole

$$\begin{aligned} x_k &:= x(t_k) \\ \dot{x}_k^+ &:= \dot{x}(t_k^+) \\ \dot{y}_k^+ &:= \dot{y}(t_k^+) \end{aligned}$$

eingeführt; damit lautet der Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_k := [t_k, x_k, \dot{x}_k^+, \dot{y}_k^+]^T. \quad (5.21)$$

Wie im Fall des einfachen, dynamischen, 2-dimensionalen Modells aus Unterkapitel 5.1 wird die Dynamik also durch ein *zeitdiskretes* dynamisches System definiert. Das heißt, die Bewegungsgleichungen werden durch ein System von vier *Differenzgleichungen* gebildet, welche im Weiteren aufgestellt werden sollen. Die Differenzgleichungen bilden den Zustand des Systems im Zeitpunkt t_k auf den Zustand im Zeitpunkt t_{k+1} ab. Somit handelt es sich hier um die *Abbildung*:

t_k		t_{k+1}
x_k	Abbildung von	x_{k+1}
\dot{x}_k^+	→ Stoß k nach Stoß $k + 1$	\dot{x}_{k+1}^+
\dot{y}_k^+		\dot{y}_{k+1}^+

Die Abbildungsvorschrift wird in den folgenden Abschnitten hergeleitet.

5.2.2 Berechnung des Stoßzeitpunktes t_{k+1}

Die Bewegung der Kugel $y(t)$ nach Stoß k ist durch folgendes Anfangswertproblem (AWP) gegeben:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -g && \text{Bewegungsdifferentialgleichung} \\ \dot{y}(t_k) &= \dot{y}_k^+ && \text{Anfangsgeschw. (Abfluggeschw. v. Oszill.)} \\ y(t_k) &= u(t_k) && \text{Anfangspos. (Kontakt mit Oszillator)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Für die Anfangsposition gilt

$$u(t_k) = x(t_k) - \bar{u}(t_k) = x_k - u_0 \cos \Omega t_k. \quad (5.23)$$

Lösen des AWP (5.22) führt auf die Bewegungsgleichung für die Kugel nach Stoß k :

$$y(t) = -\frac{g}{2}(t - t_k)^2 + \dot{y}_k^+(t - t_k) + x_k - u_0 \cos \Omega t_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (5.24)$$

Die Bewegung des Oszillators $x(t)$ nach Stoß k ist gegeben durch das AWP

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g - F_A/M && \text{Bewegungsdifferentialgleichung} \\ \dot{x}(t_k) &= \dot{x}_k^+ && \text{Anfangsgeschw. (Abfluggeschw. v. Kugel)} \\ x(t_k) &= x_k && \text{Anfangsposition} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Lösen des AWP's (5.25) führt auf die Bewegungsgleichung für den Oszillator nach Stoß k :

$$x(t) = -\frac{g + F_A/M}{2}(t - t_k)^2 + \dot{x}_k^+(t - t_k) + x_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (5.26)$$

Nun gilt es zu bestimmen, wann der nächstfolgende Stoß auftritt: gesucht ist t_{k+1} . Dabei muss zwischen zwei möglichen Fällen unterschieden werden:

1. **Möglichkeit:** Stoß Kugel-Prallplatte zum Zeitpunkt t_{W_k} mit $t_k < t_{W_k} < t_{k+1}$
Stoßbedingung: $y(t_{W_k}) = 0$
2. **Möglichkeit:** Mehrfachstoß Kugel-Oszillator zum Zeitpunkt t_{k+1}
Stoßbedingung: $y(t_{k+1}) = u(t_{k+1})$

Unter der Annahme, nach dem Abflug der Kugel vom Oszillator geschieht der nächste Stoß der Kugel an der Prallplatte (*1. Möglichkeit*), wird t_{W_k} , also der Zeitpunkt des Stoßes zwischen Kugel und Prallplatte, aus folgender Kontaktbedingung berechnet:

$$y(t_{W_k}) = 0, \quad \text{gesucht: } t_{W_k}. \quad (5.27)$$

Die Bedingung führt auf ein quadratisches Polynom in $(t_{W_k} - t_k)$, das sich zu

$$t_{W_{k1,2}} = t_k + \frac{1}{g} \left[\dot{y}_k^+ \mp \sqrt{(\dot{y}_k^+)^2 + 2g \underbrace{(x_k - u_0 \cos \Omega t_k)}_{=u(t_k)>0}} \right] \quad (5.28)$$

löst. Die Minus-Lösung interessiert nicht, da sie zu einem t_{W_k} mit $t_{W_k} < t_k$ führen würde, was physikalisch nicht möglich ist.

Unter der Annahme, es komme zum Mehrfachstoß (*2. Möglichkeit*), also einem wiederholten Kontakt zwischen Kugel und Oszillator ohne zwischenzeitlichen Kontakt mit der Prallplatte, wird der Kontaktzeitpunkt t_{k+1}^{MFS} gesucht, an dem dieser Mehrfachstoß (MFS) auftritt. Die Bedingung für einen Oszillator-Kugel Kontakt ist

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}^{\text{MFS}}) &= u(t_{k+1}^{\text{MFS}}) \\ &= x(t_{k+1}^{\text{MFS}}) - \bar{u}(t_{k+1}^{\text{MFS}}). \end{aligned}$$

Hier werden die Bewegungs-Funktionen $y(t)$ (5.24), $x(t)$ (5.26) und $\bar{u}(t)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow -\frac{g}{2}(t_{k+1}^{\text{MFS}} - t_k)^2 + \dot{y}_k^+(t_{k+1}^{\text{MFS}} - t_k) + x_k - u_0 \cos \Omega t_k \\
 &\quad = -\frac{g + F_A/M}{2}(t_{k+1}^{\text{MFS}} - t_k)^2 + \dot{x}_k^+(t_{k+1}^{\text{MFS}} - t_k) + x_k - u_0 \cos \Omega t_{k+1}^{\text{MFS}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{F_A}{2M} (t_{k+1}^{\text{MFS}} - t_k)^2 + (\dot{y}_k^+ - \dot{x}_k^+) (t_{k+1}^{\text{MFS}} - t_k) \\
 &\quad = -u_0(\cos \Omega t_{k+1}^{\text{MFS}} - \cos \Omega t_k) \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

Gesucht ist nun das kleinste, reelle t_{k+1}^{MFS} mit $t_k < t_{k+1}^{\text{MFS}}$, welches die letzte Gleichung (5.29) löst, also:

$$t_{k+1}^{\text{MFS}} = \min \{t_{k+1}^{\text{MFS}} | t_k < t_{k+1}^{\text{MFS}} \wedge y(t_{k+1}^{\text{MFS}}) = u(t_{k+1}^{\text{MFS}})\} . \tag{5.30}$$

Diese Aufgabe stellt kein triviales Problem dar, da Gleichung (5.29) transzendent⁸ ist. Allgemein lässt sich der Problemtypus folgendermaßen formulieren: „Finde sämtliche Schnittpunkte zwischen einer Parabel und einem Kosinus.“ Die Anzahl der Schnittpunkte variiert in Abhängigkeit von den Parametern zwischen Null und unendlich. Die Behandlung dieses Problems wird im folgenden Unterkapitel 5.3 beschrieben.

Das aus Gleichung (5.29) gefundene t_{k+1}^{MFS} wird mit dem unter der Prallplattenstoß-Annahme (1. Möglichkeit) gefundenen t_{W_k} (Gleichung (5.28)) verglichen:

Falls

$$t_{k+1}^{\text{MFS}} < t_{W_k} ,$$

tritt ein Mehrfachstoß am Oszillator — und kein Prallplattenstoß — auf und t_{k+1} ist gefunden:

$$t_{k+1} = t_{k+1}^{\text{MFS}} .$$

Andernfalls ($t_{W_k} < t_{k+1}^{\text{MFS}} \vee t_{k+1}^{\text{MFS}} = \emptyset$) tritt ein Prallplattenstoß der Kugel zum Zeitpunkt t_{W_k} auf (1. Möglichkeit).

In diesem Fall muss noch der nachfolgende Stoßzeitpunkt t_{k+1} der Kugel mit dem Oszillator bestimmt werden. Zunächst wird angenommen, dass der dem Prallplattenstoß folgende Stoß der Kugel mit dem Oszillator erfolgt. (Es gibt seltene Situationen, in denen es zu einem Mehrfachstoß an der Prallplatte kommen kann. Dies kann insbesondere dann passieren, wenn die (Anpress)kraft F_A negativ ist. Siehe hierzu die Fußnote 13 auf Seite 77.)

⁸transzendente Gleichung: (lateinisch *transcendere*: überschreiten) Eine Gleichung, die keine algebraische Gleichung ist bzw. eine Gleichung, die unterschiedliche transzendente Funktionen (Logarithmus, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktion) enthält. Eine transzendente Gleichung lässt sich nur in impliziter Form darstellen. Lösungen können numerisch oder grafisch, jedoch im Allgemeinen nicht analytisch gefunden werden.

Die absorbierte Energie beim Stoß der Kugel mit der Prallplatte wird nach der Newtonschen Stoßhypothese über die Stoßzahl α_2 modelliert, welche wie folgt definiert ist:

$$\alpha_2 := \frac{|v_{\text{Kugel nach Stoß mit Prallplatte}}|}{|v_{\text{Kugel vor Stoß mit Prallplatte}}|} = \frac{\dot{y}_{W_k}^+}{-\dot{y}_{W_k}^-} \quad (5.31)$$

Darin ist $\dot{y}_{W_k}^- = \dot{y}(t_{W_k})$ die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Stoß mit der Prallplatte und $\dot{y}_{W_k}^+$ die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß mit der Prallplatte. Wegen $\dot{y}_{W_k}^- < 0$ (Flug in negative Richtung) und $|\dot{y}_{W_k}^+| < |\dot{y}_{W_k}^-|$ (aufgrund Energiedissipation in jedem realen Stoß) gilt $\alpha_2 \in (0, 1)$.

Aus Gleichung (5.31) folgt mit Gleichung (5.24)

$$\dot{y}_{W_k}^+ = \alpha_2 (g(t_{W_k} - t_k) - \dot{y}_k^+) . \quad (5.32)$$

Die Bewegung $y_2(t)$ der Kugel nach dem Stoß mit der Prallplatte wird durch das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2(t) &= -g \\ \dot{y}_2(t_{W_k}) &= \dot{y}_{W_k}^+ \\ y_2(t_{W_k}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

beschrieben, das von

$$y_2(t) = -\frac{g}{2}(t - t_{W_k})^2 + \dot{y}_{W_k}^+(t - t_{W_k}) \quad (5.34)$$

gelöst wird.

Für den Kontaktzeitpunkt t_{k+1} zwischen Oszillator und Kugel muss gelten:

$$y_2(t_{k+1}) = u(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) - u_0 \cos \Omega t_{k+1} \quad \wedge \quad y_2(t_{k+1}) > 0 . \quad (5.35)$$

Werden für $y_2(t)$ und $u(t)$ die jeweiligen Bewegungsfunktionen eingesetzt, folgt wieder eine transzendente Gleichung in t_{k+1} , das heißt, es müssen wieder alle (reellen) Schnittpunkte zwischen einer Kosinusfunktion und einer Parabel gefunden werden. Daraus folgt

$$t_{k+1} = \min \{t_{k+1} | t_{W_k} < t_{k+1} \quad \wedge \quad y_2(t_{k+1}) = u(t_{k+1}) \quad \wedge \quad y_2(t_{k+1}) > 0\} . \quad (5.36)$$

Also ist der kleinste, reelle Schnittpunkt t_{k+1} mit $t_{W_k} < t_{k+1}$ der gesuchte Stoßzeitpunkt. Wenn er nicht existiert (weil $y_2 = u$ keine Lösung besitzt oder weil $y_2(t_{k+1}) < 0$), so tritt der seltene Fall eines Mehrfachstoßes an der Prallplatte auf. Beachte hierzu die Fußnote auf Seite 77.

5.2.3 Berechnen der verbleibenden Zustandsgrößen

Bislang wurde für die beiden möglichen Fälle des Oszillator-Prallplatte-Oszillator Stoßes (1. Möglichkeit) und des Oszillator-Oszillator Mehrfachstoßes (2. Möglichkeit) die Stoßzeit t_{k+1} , an der die Kugel wieder

vom Oszillator abprallt, berechnet. Für die vollständige Angabe des Systemzustands fehlt noch die Berechnung der drei weiteren Zustandsgrößen Abfluggeschwindigkeit der Kugel vom Oszillator nach dem Stoß, Oszillatorschwerpunktsgeschwindigkeit nach dem Stoß sowie Oszillator- bzw. Kugel-Position beim Stoß.

Zur kinematischen Beschreibung des Stoßes am Oszillator wird die Stoßzahl α_1 eingeführt:

$$\alpha_1 := -\frac{v_{\text{Kugel}}^+ - v_{\text{Oszillatorspitze}}^+}{v_{\text{Kugel}}^- - v_{\text{Oszillatorspitze}}^-} = -\frac{\dot{y}_{k+1}^+ - \dot{u}_{k+1}^+}{\dot{y}_{(2)}(t_{k+1}) - \dot{u}(t_{k+1})} \quad (5.37)$$

mit $\dot{u}_{k+1}^+ = \dot{x}_{k+1}^+ - \dot{u}(t_{k+1})$.

Die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Stoß v_{Kugel}^- wird beim Mehrfachstoß am Oszillator durch $\dot{y}(t_{k+1})$ und beim Prallplattenstoß durch $\dot{y}_2(t_{k+1})$ erhalten. Die beiden Fälle wurden in der letzten Gleichung durch die eingeklammerte (2) im Index der Geschwindigkeit gekennzeichnet.

Eine zweite Gleichung für die zwei gesuchten Geschwindigkeiten folgt aus der Impulserhaltung:

$$m \cdot v_{\text{Kugel}}^- + M \cdot v_{\text{Oszillatorschwerpunkt}}^- = m \cdot v_{\text{Kugel}}^+ + M \cdot v_{\text{Oszillatorschwerpunkt}}^+,$$

bzw. mit den hier verwendeten Symbolen:

$$m \cdot \dot{y}_{(2)}(t_{k+1}) + M \cdot \dot{x}(t_{k+1}) = m \cdot \dot{y}_{k+1}^+ + M \cdot \dot{x}_{k+1}^+. \quad (5.38)$$

Darin sind m = Masse der Kugel, M = Masse des Oszillators.

Es sei erwähnt, das die Kugelmasse m erstmals in der Impulsbilanz (5.38) ins Modell miteinfließt. Die Oszillatormasse M hatte bei endlicher Anpresskraft F_A bereits Einfluss auf die Bewegungsgleichung des Oszillators.

Es wird das Massenverhältnis μ eingeführt:

$$\mu := \frac{M}{m}. \quad (5.39)$$

Die beiden in den gesuchten Geschwindigkeiten linearen Gleichungen (5.37) und (5.38) werden nun nach den Geschwindigkeiten aufgelöst:

$$\dot{x}_{k+1}^+ = \frac{1}{1 + \mu} [(1 + \alpha_1)(\dot{y}_{(2)}(t_{k+1}) + \dot{u}(t_{k+1})) + (\mu - \alpha_1)\dot{x}(t_{k+1})] \quad (5.40)$$

$$\dot{y}_{k+1}^+ = \frac{1}{1 + \mu} [\mu(1 + \alpha_1)(\dot{x}(t_{k+1}) - \dot{u}(t_{k+1})) - (\mu\alpha_1 - 1)\dot{y}_{(2)}(t_{k+1})]. \quad (5.41)$$

Schließlich kann die Position des Oszillators im Stoßmoment durch Einsetzen von t_{k+1} in die Bewegungsgleichung für $x(t)$ (5.26) angegeben werden:

$$x_{k+1} = x(t_{k+1}) = -\frac{g + F_A/M}{2}(t_{k+1} - t_k)^2 + \dot{x}_k^+(t_{k+1} - t_k) + x_k. \quad (5.42)$$

5.2.4 Zusammenfassung des Stoßkontaktmodells 4. Ordnung

Das Modell besitzt sieben Parameter, von denen sein Verhalten abhängig ist. Die Systemparameter des Stoßbohrermodells 4. Ordnung sind α_1 , α_2 und $\mu = M/m$ welche für die Stoßzahl zwischen Stoßmasse und Oszillator, die Stoßzahl zwischen Stoßmasse und Prallplatte und für das Verhältnis Oszillatormasse zu Stoßmasse stehen.

Die Prozessparameter des Stoßbohrermodells sind u_0 , Ω , F_A/M und g , die für die Schwingamplitude der Oszillatorspitze, die Anregekreisfrequenz, die Beschleunigung aus axialer Anpresskraft auf den Oszillator und den Anteil der Erdbeschleunigung in Längsrichtung stehen.

Die vier diskreten Zustandsgrößen des Stoßbohrermodells 4. Ordnung sind die Stoßkontaktzeit t_k der Kugel am Oszillator, die Position des Oszillatorschwerpunktes x_k im Stoßzeitpunkt, die Geschwindigkeit des Oszillatorschwerpunktes \dot{x}_k^+ unmittelbar nach dem Stoß und die Geschwindigkeit der Kugel \dot{y}_k^+ unmittelbar nach dem Stoß.

Ausgehend von dem Zustand $\mathbf{x}_k = [t_k, x_k, \dot{x}_k^+, \dot{y}_k^+]^T$, der einen Kontakt zwischen Stoßmasse und Oszillator beschreibt, wird die Abbildung des Zustands k auf den Zustand $k + 1$ als implizite Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0} \quad (5.43)$$

angegeben, die sich zusammensetzt aus den Gleichungen für t_{k+1} (5.30) bzw. (5.36), x_{k+1} (5.42), \dot{x}_{k+1}^+ (5.40) und \dot{y}_{k+1}^+ (5.41).

Die Berechnung des Folgezustands \mathbf{x}_{k+1} gliedert sich in zwei Schritte auf. Im ersten Schritt wird der Kontaktzeitpunkt t_{k+1} berechnet. Im zweiten Schritt werden die drei übrigen Zustandsgrößen x_{k+1} , \dot{x}_{k+1}^+ , \dot{y}_{k+1}^+ berechnet. Um im ersten Schritt die Kontaktzeit t_{k+1} zu berechnen, wird zwischen zwei möglichen Fällen unterschieden, nämlich dem Oszillator-Prallplatte-Oszillator Stoß (1. Möglichkeit) und dem Oszillator-Oszillator Mehrfachstoß (2. Möglichkeit). Um festzustellen, welcher Fall auftritt, werden zwei Zeitpunkte berechnet und miteinander verglichen. Einerseits ist dies die theoretische Kontaktzeit t_{W_k} der Kugel mit der Prallplatte (oder „Wand“)

$$t_{W_k} = t_k + \frac{1}{g} \left[\dot{y}_k^+ + \sqrt{(\dot{y}_k^+)^2 + 2g(x_k - u_0 \cos \Omega t_k)} \right], \quad (5.44)$$

siehe (5.28). Andererseits muss überprüft werden, ob ein Mehrfachstoß zwischen Kugel und Oszillator auftrat, bevor der Kugel-Prallplatte Stoß t_{W_k} stattfinden würde. Hierfür muss der Zeitpunkt t_{k+1}^{MFS} berechnet werden aus

$$t_{k+1}^{\text{MFS}} = \min \{ t_{k+1}^{\text{MFS}} | t_{k+1}^{\text{MFS}} > t_k \quad \wedge \quad y(t_{k+1}^{\text{MFS}}) = u(t_{k+1}^{\text{MFS}}) \}, \quad (5.45)$$

siehe (5.30). Die beiden Zeitpunkte t_{W_k} und t_{k+1}^{MFS} werden miteinander verglichen. Der Fall, in dem ein Kugel-Prallplatte Stoß direkt auf einen Kugel-Oszillator Stoß folgt (1. Möglichkeit), tritt auf, falls

$$t_{W_k} < t_{k+1}^{\text{MFS}} \quad \vee \quad t_{k+1}^{\text{MFS}} = \emptyset. \quad (5.46)$$

Für diesen Fall erhält man den Zeitpunkt für den nächsten Kugel-Oszillator Kontakt t_{k+1} aus

$$t_{k+1} = \min \{t_{k+1} | t_{k+1} > t_{W_k} \wedge y_2(t_{k+1}) = u(t_{k+1}) \wedge y_2(t_{k+1}) > 0\} , \quad (5.47)$$

wobei $u(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) - u_0 \cos \Omega t_{k+1}$ mit $x(t_{k+1}) = x_{k+1}$ aus Gleichung (5.42).

Im anderen Fall, wenn $t_{k+1}^{\text{MFS}} < t_{W_k}$, wenn also ein Kugel-Oszillator Mehrfachstoß auftritt, d. h. zwei aufeinanderfolgende Kugel-Oszillator Kontakte ohne einen zwischenzeitlichen Kugel-Prallplatte Stoß erfolgen, erhält man den gesuchten Zeitpunkt

$$t_{k+1} = t_{k+1}^{\text{MFS}} \quad (5.48)$$

aus Gleichung (5.45).

Nachdem der diskrete Zeitpunkt t_{k+1} bekannt ist, folgt der zweite der beiden Schritte, in dem die restlichen drei der vier diskreten Zustandsgrößen in expliziter Weise aus den Gleichungen (5.40)–(5.42) mit $\mu = M/m$ resultieren:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}^+ &= \frac{1}{1 + \mu} [(1 + \alpha_1)(\dot{y}_{(2)}(t_{k+1}) + \dot{u}(t_{k+1})) + (\mu - \alpha_1)\dot{x}(t_{k+1})] , \\ \dot{y}_{k+1}^+ &= \frac{1}{1 + \mu} [\mu(1 + \alpha_1)(\dot{x}(t_{k+1}) - \dot{u}(t_{k+1})) - (\mu\alpha_1 - 1)\dot{y}_{(2)}(t_{k+1})] , \\ x_{k+1} &= -\frac{g + \frac{F_A}{M}}{2}(t_{k+1} - t_k)^2 + \dot{x}_k^+(t_{k+1} - t_k) + x_k . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Als Ergebnis der gesamten Prozedur kann schließlich der Zustandsvektor $\mathbf{x}_{k+1} = [t_{k+1}, x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}^+, \dot{y}_{k+1}^+]^T$ aufgeschrieben werden.

5.3 Algorithmus zum Lösen transzendenter Stoßgleichungen

Eine besondere Schwierigkeit stellt das Finden der Schnittpunkte zwischen einer linearen Funktion (einer Geraden) und einer harmonischen Funktion (z. B. der Kosinusfunktion) dar. Im Fall der horizontalen (gravitationsfreien) Bewegung im Schwingstoßsystem 2. Ordnung finden keine Beschleunigungen statt. Daher bewegt sich die Stoßmasse auf einer geraden Flugbahn. Ihre gerade Flugbahn beginnt — falls ein sog. Mehrfachstoß auftreten wird (kein Erreichen der Prallplatte vor dem folgenden Oszillator-Stoß) — auf der Position der Oszillatorspitze im Stoßzeitpunkt (Kosinusfunktion), andernfalls an der Prallplatte mit jeweils gegebener Abfluggeschwindigkeit der Kugel vom Oszillator bzw. von der Prallplatte.

Wird das Modell 2. Ordnung zum Modell 4. Ordnung erweitert, indem mögliche Starrkörperbewegungen des Oszillators zugelassen werden und Anpress- und Gravitationskräfte wirken können, so haben die Flugbahnen parabelförmigen Verlauf. Im Zuge der Lösungsfindung der Bewegungsgleichungen dieses Modells müssen die Schnittpunkte zwischen einer

Kosinusfunktion und einer Parabel — also einem Polynom 2. Ordnung — gefunden werden, was ein ungleich schwierigeres Problem als das mit linearer Flugbahn darstellt.

Problembeschreibung

Bei den genannten Aufgaben existieren (Null-Geschwindigkeiten ausgeschlossen) jeweils endlich viele Lösungen. In allen Fällen ist es entscheidend, genau eine bestimmte Lösung zu finden, nämlich diejenige, die zeitlich dem Startpunkt der Flugbahn am nächsten liegt, also am frühesten auftritt. Sei der Startpunkt mit x_s bezeichnet, so ist also die kleinste Lösung x_c mit $x_s < x_c$ gesucht. Im Folgenden sollen die möglichen Verfahren beschrieben werden, durch die die gesuchte Lösung numerisch angenähert werden kann.

Schnittpunkte zwischen Gerade und Kosinusfunktion

Problem: Gesucht ist die kleinste Lösung x_c mit

$$x_c > x_s \quad \text{und} \quad bx + c = \cos(x), \quad b, c, x_s \in \mathbb{R}, b \neq 0.$$

Schnittpunkte zwischen Parabel und Kosinusfunktion

Problem: Gesucht ist die kleinste Lösung x_c mit

$$x_c > x_s \quad \text{und} \quad ax^2 + bx + c = \cos(x), \quad a, b, c, x_s \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Lösungsalgorithmus

Zunächst kann auf einfache Weise bestimmt werden, ob die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ den Wertebereich $[-1, 1]$ der Kosinusfunktion schneiden kann: Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet. Die Parabel kann die Kosinusfunktion höchstens dann schneiden, wenn für ihren Extremwert

$$y_e = \frac{-b^2}{4a} + c$$

folgendes gilt: $y_e > -1$. Es können daraufhin die Stellen des Ein- und Austritts der Parabel aus dem Wertebereich $[-1, 1]$ der Kosinusfunktion berechnet werden. Dadurch ergibt sich für $-1 < y_e < 1$ ein Intervall $[x_1, x_2]$ mit

$$x_1 = \frac{1}{2a} \left(-b - \sqrt{b^2 - 4a(c+1)} \right) \quad (5.50)$$

$$x_2 = \frac{1}{2a} \left(-b + \sqrt{b^2 - 4a(c+1)} \right) \quad (5.51)$$

bzw. für $y_e > 1$ ergeben sich zwei Intervalle $[x_1, x_2]$ und $[x_3, x_4]$ mit

$$x_1 = \frac{1}{2a} \left(-b + \sqrt{b^2 - 4a(c+1)} \right) \quad (5.52)$$

$$x_2 = \frac{1}{2a} \left(-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-1)} \right) \quad (5.53)$$

$$x_3 = \frac{1}{2a} \left(-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-1)} \right) \quad (5.54)$$

$$x_4 = \frac{1}{2a} \left(-b - \sqrt{b^2 - 4a(c+1)} \right) \quad (5.55)$$

in denen x_c höchstens liegen kann.

Ferner lässt sich zeigen, dass, wenn eine Funktion in $[x_1, x_2]$ den Wertebereich $[-1, 1]$ durchquert, ihre kleinste Schnittstelle mit der Kosinusfunktion auch in $[x_1, x_1 + 2\pi]$ liegen muss. Folglich liegt die kleinste Schnittstelle in $[x_1, x_2] \cup [x_1, x_1 + 2\pi]$ bzw. falls $y_e > 1$ in $[x_1, x_2] \cup [x_1, x_1 + 2\pi]$ oder in $[x_3, x_4] \cup [x_3, x_3 + 2\pi]$. Also kann die gesuchte Schnittstelle auf ein Intervall $[x_{li}, x_{re}]$ mit Breite $< 2\pi$ eingegrenzt werden, dessen Mitte an der Stelle $x_{mi} = \frac{x_{li} + x_{re}}{2}$ liegt.

In einem zweiten Schritt werden nun die Schnittstellen numerisch ermittelt. Hierzu wird die Problemstellung zunächst in ein neues Koordinatensystem mit

$$z = x - x_{mi}$$

transformiert. Durch diese Koordinatentransformation lässt sich das Problem wie folgt formulieren:

Schnittpunkte zwischen Parabel und Kosinusfunktion

Problem: Gesucht sind alle Lösungen z_c der Gleichung

$$a(z_c + x_{mi})^2 + b(z_c + x_{mi}) + c = \cos(z_c + x_{mi}) \quad (5.56)$$

innerhalb des symmetrisch zu $z = 0$ liegenden Intervalls

$$\left[-\frac{x_{re} - x_{li}}{2}, \frac{x_{re} - x_{li}}{2} \right] \quad \text{mit} \quad \frac{x_{re} - x_{li}}{2} \leq \pi.$$

Mit der trigonometrischen Umformung

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

lässt sich Gl. (5.56) schreiben als

$$a(z_c + x_{mi})^2 + b(z_c + x_{mi}) + c - \cos x_{mi} \cdot \cos z_c + \sin x_{mi} \cdot \sin z_c = 0. \quad (5.57)$$

In Gl. (5.57) ersetzen wir die beiden harmonischen Funktionen $\cos z_c$ und $\sin z_c$ nun durch ihre Potenzreihen. Die gesuchten Lösungen z_c liegen wie oben erläutert innerhalb des Radius r mit $r < \pi$ um $z = 0$. In dieser Umgebung ist der Fehler zwischen dem Taylorpolynom 8. Ordnung der harmonischen Funktionen und ihrem tatsächlichen Wert hinreichend klein („ $< 10^{-8}$ “).

Sämtliche Nullstellen des so gebildeten Polynoms lassen sich mittels Eigenwertberechnung der Companion-Matrix der Polynomkoeffizienten numerisch berechnen. Die kleinste reelle Nullstelle

$$z_c > z_s \quad \text{mit} \quad z_s = x_s - x_{mi}$$

wird bestimmt und zur x -Koordinate x_c zurücktransformiert.

Zur Erhöhung der Genauigkeit können ausgehend von der gefundenen Lösung x_c noch einige Schritte mit dem Newton-Verfahren durchgeführt werden.

Kapitel 6

Verhalten des Stoßbohrers

In diesem Kapitel wird das Bewegungsverhalten des Stoßbohrers beschrieben. Hierzu wurden im Labor Experimente mit einem Schwingstoßprüfstand, der dem Modell 2. Ordnung aus Unterkapitel 5.1 entspricht, und einem Prototypen des Ultraschall-Stoßbohrers, der in Kapitel 3 vorgestellt wurde, durchgeführt. Mit verschiedenen Messverfahren werden Starrkörperbewegungen der Stoßmasse und des Oszillators ermittelt. Das dynamische Verhalten beider in Kapitel 5 hergeleiteten Modelle wird simuliert und dem Verhalten der realen Laborsysteme gegenübergestellt.

Die Unterkapitel 6.1 und 6.2 beinhalten Experimente und Simulationen zum System 2. Ordnung. Die Unterkapitel 6.3 und 6.4 beinhalten Experimente und Simulationen zum System 4. Ordnung. Unterkapitel 6.5 vergleicht die theoretischen Simulationsergebnisse der Modelle mit den praktisch gewonnenen Daten der realen Laborversuche.

6.1 Experimentelle Untersuchungen am Schwingstoßprüfstand

Dieses Unterkapitel beschreibt die Experimente, die am System 2. Ordnung durchgeführt wurden. Nachdem der Aufbau des Prüfstands im Labor erläutert wird, werden die Messverfahren, mit denen ein Zugang zur Bewegung der Kugel möglich ist, vorgestellt. Der letzte Abschnitt gibt Messdaten für die Stoßzahlen wieder.

6.1.1 Aufbau des Schwingstoßprüfstands

Zur experimentellen Analyse der Stoßdynamik wurde ein Laborversuch aufgebaut, der sich an dem in Abschnitt 5.1 aufgestellten Modell 2. Ordnung orientiert. Bild 5.1 auf Seite 35 zeigt dieses Modell schematisch. Den Oszillator bildet im Laborexperiment ein Ultraschalltransducer, wie er links im Photo auf Seite 18 zu sehen ist. Der Stapelaktor aus vier Piezokeramikscheiben wird mit einer sinusförmigen Wechselspannung gespeist, die über einen Verstärker von einem Sinusgenerator erzeugt wird und in Frequenz und Amplitude eingestellt werden kann. Die Anregefrequenz wird auf

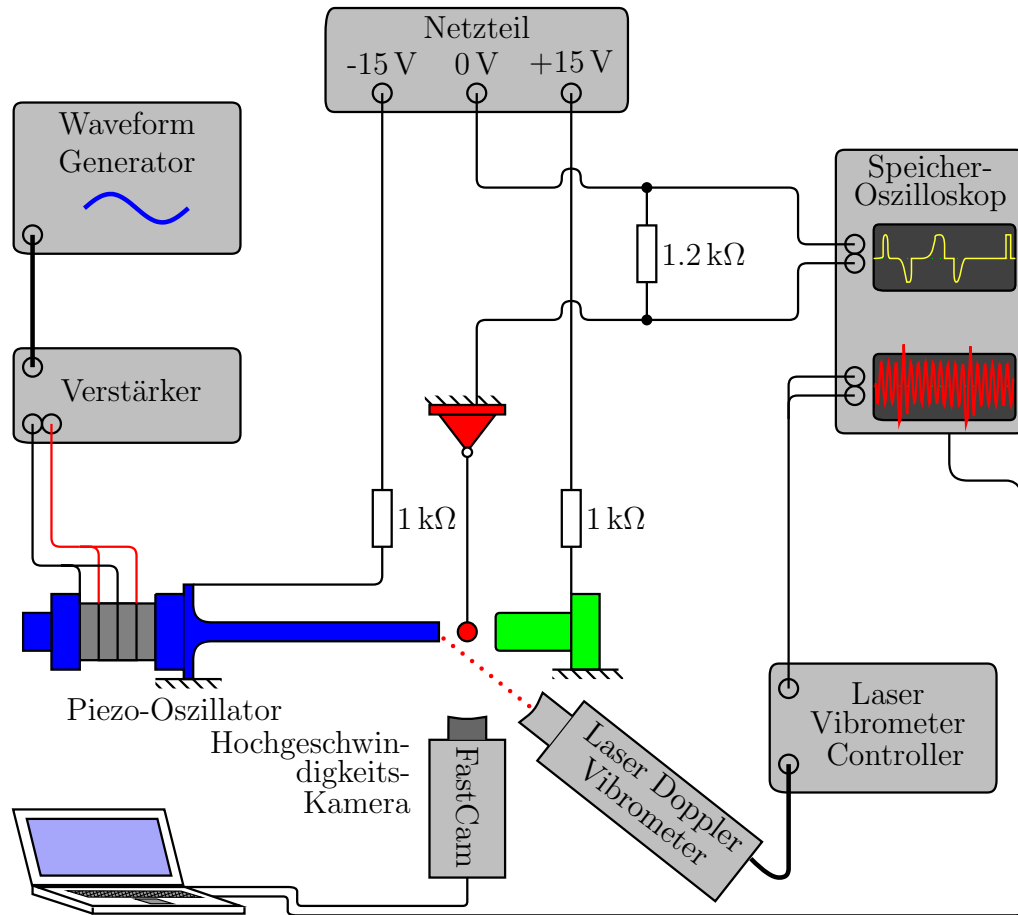


Bild 6.1: Skizze des Schwingstoßprüfstands

die erste Längseigenfrequenz eingestellt, die den Oszillator in seiner ersten Längseigenmode anregt. Für den verwendeten Oszillator beträgt diese Frequenz $f = 20.19 \text{ kHz}$. Die erste Längseigenmode ist auf Seite 41 in Bild 5.3 rechts des Oszillators gezeigt: an den Enden des Oszillatorstabes befinden sich Schwingungsbäuche, dazwischen ein Schwingungsknoten. Die Schwingungsbäuche lassen die Enden in Längsrichtung sinusförmig schwingen. Im Schwingungsknoten wird der Oszillatorstab gehalten und auf den Labortisch geschraubt.

Im Abstand von 11 mm in Längsrichtung von der Oszillatortspitze wird als Gegenpallelement („Prallplatte“; in den Skizzen grün dargestellt) eine Hammerbahn¹ auf den Labortisch geklemmt. Die Hammerbahn und die platte Schwingfläche des Oszillators stehen parallel zueinander. Im Zwischenraum wird als frei fliegende Masse eine Stahlkugel mit 6 mm Durchmesser pendelnd aufgehängt (in den Skizzen rot dargestellt). Sie kann sich horizontal in Schwingungsrichtung in einem Freiraum von $h = 5 \text{ mm}$ frei bewegen. Zum Start des Experiments werden Sinusgenerator und Verstärker eingeschaltet. Die frei pendelnde Kugel muss leicht angestoßen werden, gerade so stark, dass sie einmal mit dem Schwinger in Kontakt kommt.

¹Die *Hammerbahn* bezeichnet die flache Seite eines Hammerkopfes.

Nach einigen wenigen transienten Stößen stellt sich eine Bewegung der Kugel ein, bei der sie in ihrem Freiraum hin- und herfliegend abwechselnd Stöße am schwingenden Ende des Oszillators und an der Hammerbahn ausführt.



Bild 6.2: Stabführung gelochter Scheibe

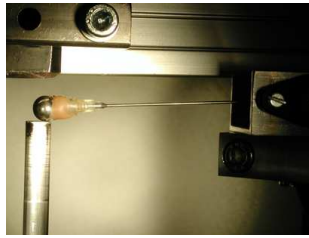


Bild 6.3: Führung über röhrenförmigen „Balken“



Bild 6.4: Führung durch Blattfeder

Um die Kugelbewegung auf eine 1-dimensionale und nahezu geradlinige Flugbahn zu begrenzen, ist eine 5-wertige Lagerung der Kugel notwendig (eine Kugelführung, die die Kugelbewegung in 5 ihrer 6 Freiheitsgrade verhindert): diese Führung soll die Bewegung der Kugel in Längsrichtung des Oszillators nicht beeinflussen, jedoch eine translatorische Bewegung entlang der zwei weiteren Raumdimensionen und eine rotatorische Bewegung um alle drei Raumrichtungen unterbinden. Die Bilder 6.2–6.4 zeigen einige realisierte Führungsmöglichkeiten. Als nachteilig im Sinne einer 1-dimensionalen Bewegung haben sich die Längsstabführung (Bild 6.2) und die Blattfederführung (Bild 6.4) erwiesen. Um die Stoßmasse auf einem Stab in Längsrichtung gleiten zu lassen, wurde eine kreisrunde, scheibenförmige Metallscheibe im Zentrum gelocht und auf einem runden Stab geführt. Die Reibung zwischen Stab und Loch der Scheibe lässt diese taumeln und sich verkanten. Die Bewegung der Scheibe entspricht anstelle eines geradlinigen Fluges einer komplizierten, 3-dimensional translatorischen und rotatorischen Bewegung um ihre Raumachsen. Somit ist diese Führungsvariante für eine Bewegungsstudie von begrenzter Komplexität ungeeignet. Eine klarere Bewegung führt die in einer Blattfeder gehaltene Kugel aus, die weit entfernt von deren statischer Gleichgewichtslage betrieben wird. Die in Bewegungsrichtung sehr biegeweich gewählte Blattfeder ist jedoch auch um ihre eigene Längsachse torsionsweich, sodass die Kugel eine schlackernde Bewegung ausführen kann. Eine passable Führung der Kugel konnte mit einem röhrenförmigen Balken² geringer Eigenmasse erzielt werden (Bild 6.3), der drehbar an einer

²Der *Balken* bezeichnet in der Kontinuumsmechanik ein elastisches Element, das Quer- und Längskräfte sowie Biege- und Torsionsmomente übertragen kann.

Welle gelagert ist. Nur geringfügig werden die Kugelbewegungen von den Biegeschwingungen des dünnen Metallröhrchens beeinflusst.

6.1.2 Messtechnik

Um die Bewegung der Kugel zu erfassen, ist eine berührungsfreie Messtechnik notwendig, die die Bewegung der Kugel nicht beeinflusst. Mögliche Messmethoden sind in Tabelle 6.1 aufgeführt.

Messmethode	Messziel
Laser-Doppler-Vibrometrie	Auslenkung der Oszillatorspitze
Strommessung Piezoaktor	Stoßzeitpunkte am Oszillator
Hochgeschwindigkeitsfilmen	Kontinuierliche Position der Stoßmasse
Elektrische Kontaktdetektion	Stoßzeitpunkte aller Stöße

Tabelle 6.1: Verschiedene Messmethoden zur Aufnahme der Kugelbewegung

Laser-Doppler-Vibrometrie

Der Einsatz eines *Laser-Doppler-Vibrometers*³ zur Aufnahme der Kugelbewegung gestaltet sich schwierig, weil das Messobjekt im makroskopischen⁴ Bereich seine Position ändert. So ist es nicht möglich, den Laserstrahl auf die Kugel zu fokussieren. Auch kann die Kugel nicht längs ihrer Bewegungsrichtung per Laserstrahl erfasst werden, da Oszillator und Gegenprallplatte die Kugel auf ihrer Flugachse „umschließen“. Das Laser-Doppler-Vibrometer wurde aber eingesetzt, um die ultraschallfrequente Schwingung des Oszillators in Frequenz und Amplitude zu erfassen. Hierfür wurde es unter einem Winkel von 45° auf die schwingende Oberfläche gerichtet. So wurde der Strahl nicht durch die Flugbahn der Kugel unterbrochen.

Bild 6.5 zeigt das Geschwindigkeitssignal der Oszillatorspitze und bestätigt eine Annahme, die für die Modellierungen getroffen wurde: in den Modellen wurde der Oszillator als eine kinematische Fußpunktanregung formuliert, dessen harmonische Bewegungen im Modell durch die Stöße am Oszillator unbeeinflusst bleiben. Das Messsignal zeigt, dass die Oszillatorschwingung durch die Stoßimpulse beeinflusst wird. Nach einem Stoß „erholt“ sich die Schwingbewegung jedoch sehr schnell und befindet sich vor dem nächsten Stoß wieder in ihrer stationären, freien Schwingungsmode.

³Die Laser-Doppler-Vibrometrie nutzt den Doppler-Effekt, nach dem die von einer bewegten Oberfläche reflektierte Welle eine von der ursprünglich ausgesandten Welle unterschiedliche Frequenz besitzt. Dadurch lässt sich die Geschwindigkeit einer bewegten Oberfläche messen.

⁴Die Bezeichnung *makroskopisch* besagt (im Ggs. zu *mikroskopisch*), dass etwas mit bloßem Auge, ohne optisch-vergrößernde Hilfsmittel erkennbar ist.

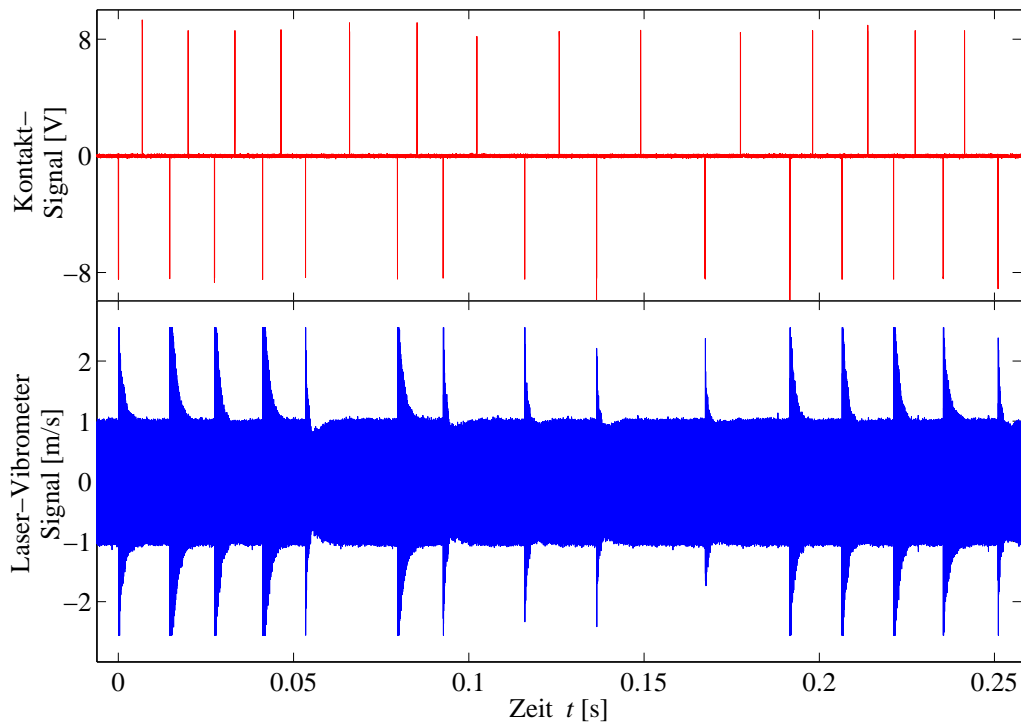


Bild 6.5: Kontaktsignal und Laservibrometersignal

Messung der Stromaufnahme

Die Messung des *Stromsignals* ist die mit Abstand einfachste und somit sicherste Möglichkeit, auf indirekte Weise Auskunft über die ungefähren Zeitpunkte der Kugel-Oszillator-Stöße zu erhalten. Lediglich eine Strommesszange wird verwendet, um den Stromfluss vom Verstärker zum Piezotransducer zu messen. Das Stromsignal lässt sich mit einem Speicheroszilloskop aufzeichnen. Die indirekte Ermittlung der Stoßzeitpunkte ist möglich, da die Stromaufnahme kurzzeitig ansteigt oder abfällt, wenn die Stoßwelle, die die Stoßmasse in den Transducerstab einbringt, die freie Resonanzschwingung des Piezotransducers überlagert. Die Laufzeit der Stoßwelle durch den 60 mm langen Transducerstab (ca. $12 \mu\text{s}$) entspricht etwa einer Viertelschwingungsperiode und ist für eine grobe Zeitpunktsbestimmung daher weitgehend vernachlässigbar. Den *exakten* Zeitpunkt des Stoßes nur anhand des Stromsignals festzustellen ist jedoch schwierig, da die Abweichung des Stromsignals vom bisherigen harmonischen Verlauf bewertet werden muss. Die Messmethode der Stromaufnahme trifft keine Aussage über die Bewegung der Kugel zwischen zwei Stößen am Oszillator. Bild 6.6 zeigt das Messergebnis des Stromsignals zusammen mit dem überlagerten Kontaktmesssignal.

Einsatz einer Hochgeschwindigkeitskamera

Aussagen über die Kugelbewegung zwischen ihren Stößen liefert allein die *Hochgeschwindigkeitskamera*, da sie die Kugelposition in direkter Weise optisch zu jedem Zeitpunkt erfasst. Ein weiterer, großer Vorteil dieser Messmethode ist, dass sämtliche makroskopischen Bewegungen zeitlich fein aufgelöst

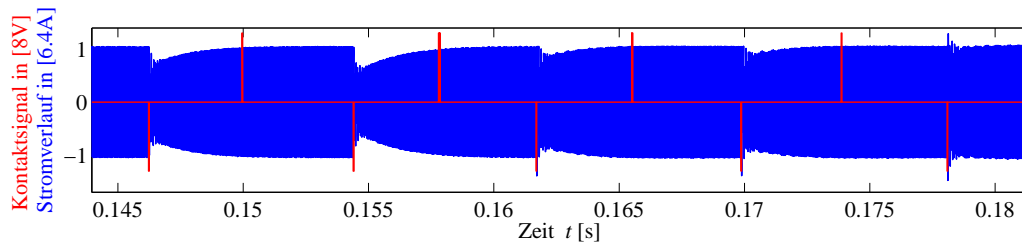


Bild 6.6: Kontaktsignal und Stromsignal: Deutlich zu sehen sind die Strom-einbrüche und -spitzen, die durch die Stöße am Oszillator hervorgerufen werden; vor dem jeweils folgenden Stoß befindet sich die Stromaufnahme wieder im harmonisch-stationären Zustand.

wiedergegeben werden können. Problemlos lassen sich die Schwingungen der umgebenden Struktur qualitativ analysieren und ihr Einfluss auf die Dynamik der Kugel beurteilen. So lässt sich schnell abwägen, welche Art der Kugelführung inwieweit nachteilig erscheint.

Auch zur quantitativen Analyse der Kugelbewegung können fein auflösende Bilder der Hochgeschwindigkeitskamera herangezogen werden: ein Formerkennungsalgorithmus in der Software *Photron Motion Tools* wurde genutzt, um die Position der Kugel auf jedem aufgenommenen Einzelbild zu quantifizieren. So entsteht eine genaue Zeitreihe der Kugelbewegung. Da pro Zeitschritt ein Bild erzeugt und zur späteren Auswertung digital gespeichert wird, ist der Speicherbedarf für diese Methode hoch und ermöglicht vergleichsweise kleine Aufnahmedauern.

Ein Einzelbild des Hochgeschwindigkeitsfilms der Kugelbewegung zeigt Bild 6.7. Die kleinen roten $+$ -Zeichen markieren den Verlauf des oberen Kugelrandes auf den ersten 63 Einzelbildern der Aufnahme, was bei einer Aufnahmezeit von 5000 fps (frames per second) einer Aufnahmedauer von 12.4 ms entspricht. Die Wellenform der Spur ist ein Hinweis auf eine nicht-geradlinige oder leicht bogenförmige Bewegung, wie man es von einem masselosen und unendlich steifen Führungsbalken erwartet hätte. Statt dessen übt die Biegeschwingung des Metallröhrchens, das die Kugel über eine 80 mm entfernte Drehachse führt, einen deutlichen Einfluss auf die Kugelbewegung aus.

Die Positionsbestimmung der Stoßmasse in allen aufeinanderfolgenden Bildern der Hochgeschwindigkeitsaufnahme führt zu einem kontinuierlichen Bewegungsablauf, der in Bild 6.8 über der Zeit aufgetragen ist. Die Auswertung von Hochgeschwindigkeitsdaten ist für einen derartigen Prüfstand die einzige Möglichkeit, berührungsfrei makroskopische Positionen aufzunehmen. Darüberhinaus ist es eine direkte Methode zur Positionsbestimmung. Die anderen hier genannten Messverfahren lassen nur indirekt auf die Bewegung der Stoßmasse schließen. Hierfür war bisher die Annahme Voraussetzung, dass die Stoßmasse zwischen den Stößen eine unbeschleunigte Bewegung ausführt. Die Analyse der Kameradaten in Bild 6.8 validiert nun diese Annahme.

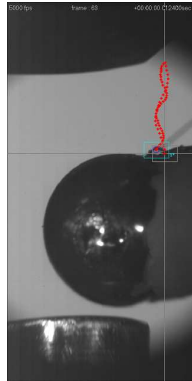


Bild 6.7: Einzelbild der Hochgeschwindigkeitskamera mit Spur (+++) der Positionsidentifizierung der Kugel während 12.4 ms; am unteren Bildrand ist die Oszillatorspitze zu sehen, am oberen Rand die Hammerbahn.

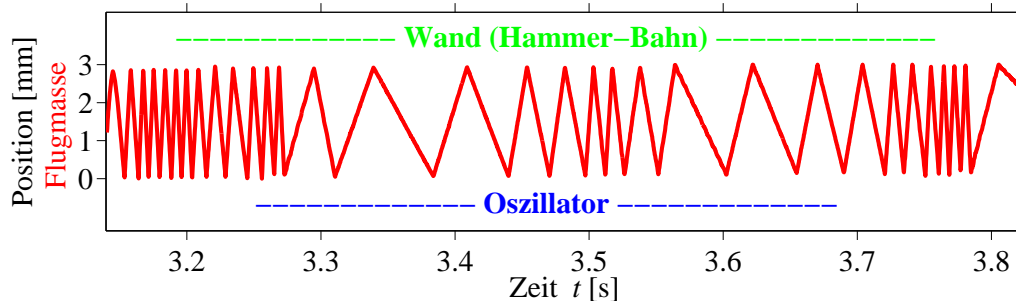


Bild 6.8: Position über Zeit der Stoßmasse aus der Positionserkennung der Hochgeschwindigkeitsaufnahme

Elektrische Kontaktmessung

Bei der elektrischen *Kontaktmessung* wird die Leitfähigkeit der metallischen Stoßpartner ausgenutzt, um durch Schließen und Öffnen elektrischer Kreise den Kontaktzustand zu übermitteln. Hierfür müssen der Oszillator, die Kugel sowie der Hammer elektrisch voneinander getrennt auf den Labortisch montiert werden. Dies lässt sich erreichen, indem man die Bauteile z. B. zwischen Pertinaxplatten einspannt oder sie mit Magnetfüßen ausstattet, die über Kunststofffolien vom metallenen Labor-Spanntisch isoliert werden. Zu beachten ist, dass der Transducerstab des Oszillators über die Wechselspannungserregung vom Verstärker immer geerdet ist. Die übrigen zwei Teile müssen daher vom ebenfalls geerdeten Labortisch elektrisch isoliert werden. Die Skizze 6.1 zeigt die elektrische Verschaltung der Bauteile. Dem Hammerkopf als Gegenprallfläche wird aus einem Gleichspannungsnetzteil ein Potential von +15 V, dem Oszillator ein Potential von -15 V auferlegt. Eine feine, auf die Kugel gelötete Einzellitze⁵ und der 0 V-Ausgang des Netzteils werden an einen Messkanal eines Speicheroszilloskops angeschlossen. Besteht während eines Stoßes elektrisch leitender Kontakt zwischen Kugel und Oszillator, so wird ein Stromkreis geschlossen, der aus einer Reihenschaltung aus

⁵Eine *Litze* ist ein sehr dünnes Metalldrähtchen. Flexible, elektrische Leitungen bestehen aus einem Verbund vieler Metalllitze.

der 15 V-Spannungsquelle, einem 1 k Ω - und einem 1.2 k Ω -Widerstand besteht. Der am größeren Widerstand entstehende Spannungsabfall von 8.3 V wird von einem potentialgetrennten Eingang des Oszilloskops aufgezeichnet. Die 1 k Ω -Widerstände dienen lediglich dem Vermeiden von Kurzschlüssen während Einstellarbeiten am Versuchsaufbau. Der 1.2 k Ω -Widerstand beschleunigt das Entladen von oszilloskopseitigen Kapazitäten nach Trennung der Kontakte.

Während einer Messung wird der Spannungsverlauf dieses Messkanals im Oszilloskop mit einer hohen Abtastrate⁶ von 5 MS/s aufgezeichnet, aus dem sich mit hoher zeitlicher Genauigkeit auf die Stoßzeitpunkte und die Kontaktdauern schließen lässt.

Ein derart entstandener Kontaktspannungsverlauf ist in roter Farbe in Bild 6.5 und Bild 6.6 zu sehen; Bild 6.9 zeigt den Kontaktspannungsverlauf eines einzelnen Stoßes zusammen mit dem Auslenkungssignal der Oszillatortspitze, das aus Integrieren des Laservibrometersignals gewonnen wurde. Rot gezeichnet ist in Bild 6.9 die Zeitspanne, während der metallischer Kontakt zwischen beiden Stoßpartnern besteht. Beginn und Ende des Kontaktes lassen sich aus der Kontaktspannung ableiten. Deutlich sieht man den exponentiellen Anstieg und das Abklingen der Spannung, bedingt durch Induktivitäten und Kapazitäten in Kabeln und Oszilloskop. Als Kontaktbeginn und -ende werden jeweils die Startzeitpunkte der Spannungsanstiege bzw. -abfälle ausgewertet.

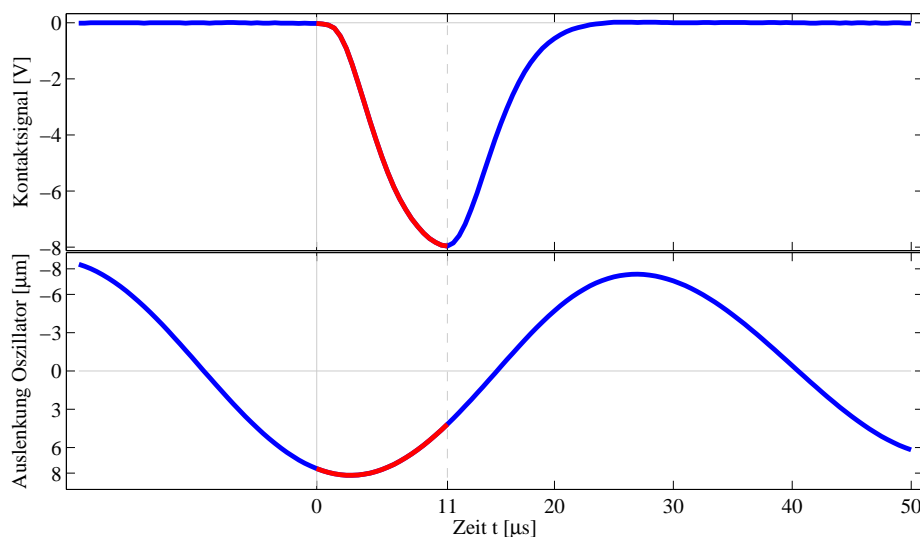


Bild 6.9: Messdaten während eines Stoßes (rot) am Oszillator: Kontaktspannungsverlauf (oben) und Auslenkung der Oszillatortspitze (unten)

⁶Die Abtastfrequenz oder engl. *Samplingrate* wird in der Einheit *samples per second* (S/s) angegeben.

Paralleler Einsatz verschiedener Messmethoden

Die unterschiedlichen hier vorgestellten Messmethoden schließen sich gegenseitig nicht aus, sondern sind synchron nebeneinander einsetzbar. Allein die spannungsliefernden Messverfahren machen sich gegenseitig Konkurrenz bei der hochfrequenten zeitlichen Abtastung der Spannungssignale in den Oszilloskopeingängen. Bei einer hohen Abtastrate können nicht alle vier Messsignale aufgezeichnet werden. Die Bilddaten der Kamera werden in einem kamerainternen 40 GB großen RAM (Speicher) erfasst. Zur Synchronisation aller Aufzeichnungen ist es jedoch nötig, auch einen Triggerkanal mit aufzuzeichnen, der so einen weiteren Datenfluss erzeugt. Die zeitsynchrone Auswertung der Messdatenverläufe ergab, dass sich die unterschiedlichen Methoden gegenseitig verifizieren können. Die Hochgeschwindigkeitsfilmaufnahmen haben gezeigt, dass die Annahme nichtbeschleunigter Kugelbewegungen gerechtfertigt ist.

6.1.3 Stoßzahlen aus Labormessungen

Der Parametersatz des hier untersuchten Stoßschwingers 2. Ordnung umfasst die zwei Prozessparameter u_0 und Ω sowie die drei Systemparameter h , α_1 und α_2 . Die Stoßzahlen α_1 und α_2 beschreiben die Dämpfungseffekte während der Stöße. Es ist nicht möglich, den Wert der Stoßzahlen allein aus Krümmungsradien der Oberflächen, Oberflächenbeschaffenheit, Materialzusammensetzung, Härte und Temperatur der Stoßpartner zu berechnen, vielmehr ist er in der Praxis auch von Stoß zu Stoß leicht schwankend. Aus einer Serie von Messreihen, die für die Flugweiten $h = 3$ mm und $h = 5$ mm unter nach Möglichkeit ansonsten konstanten Bedingungen durchgeführt wurden, wurden Abweichung und Mittelwert der Stoßzahl α_2 für den Stoß zwischen der frei fliegenden Kugel („Stoßmasse“) und der eingespannten Hammerbahn („Prallplatte“) experimentell bestimmt.

Da für die Stoßzahl der Zusammenhang (5.4) (Seite 37) gilt, waren die Geschwindigkeiten vor und nach jedem Stoß zu bestimmen. Die Kugelgeschwindigkeiten sind nicht *direkt* messbar. Sie wurden indirekt aus den Laufzeiten zwischen dem Oszillatorstoß und dem Prallplattenstoß bestimmt.

Bild 6.10 gibt im oberen Diagramm die Verteilung der Stoßzahlen aus 520 Messungen in einem Histogramm wieder. Das Maximum der Häufigkeitsverteilung liegt bei $\alpha_{2,\max} = 0.84$, der Mittelwert bei $\alpha_{2,\text{Mittelw.}} = 0.81$. Physikalisch möglich und sinnvoll sind nur Stoßzahlen im Intervall $[0, 1]$. 4% der Messdaten liegen außerhalb dieses Intervalls im grau unterlegten Bereich. Eine Erklärung für diese Messwerte liegt in der Natur des Messverfahrens. Liegen Stoßzahlen oberhalb von Eins, so lässt sich mit Gewissheit ein Laufzeitenverhältnis größer Eins ableiten. Das heisst, die Kugel brauchte für den Hinweg zum Hammer weniger Zeit als für den Weg zurück zum Oszillator. Das Laufzeitenverhältnis mit dem Stoßgeschwindigkeitenverhältnis gleichzusetzen setzt aber eine konstante Geschwindigkeit der Kugel auf ihrem Weg vom Oszillator zum Hammer und zurück voraus. Eine Zeitlupenanaly-

se mittels Hochgeschwindigkeitskameraaufnahme enthüllte aber, dass diese Voraussetzung nicht ausnahmslos Gültigkeit beansprucht. Die Biegeschwingu-
 ngen der röhrenförmigen Aufhängung der Kugel überlagern sich zur
 Flugbewegung der Kugel. Dieser Effekt ist in Bild 6.8 kaum ersichtlich, ist
 in der 2-Dimensionalität der roten Positionsspur in Bild 6.7 jedoch deutlich
 erkennbar.

Bild 6.10 zeigt im unteren Diagramm die gleichen Messdaten wie im
 Histogramm darüber. Hier ist zusätzlich die Information enthalten, bei wel-
 chen Geschwindigkeiten und bei welchen Flugabständen die Messdaten er-
 zeugt wurden. Untersuchungen in der Literatur ist zu entnehmen, dass

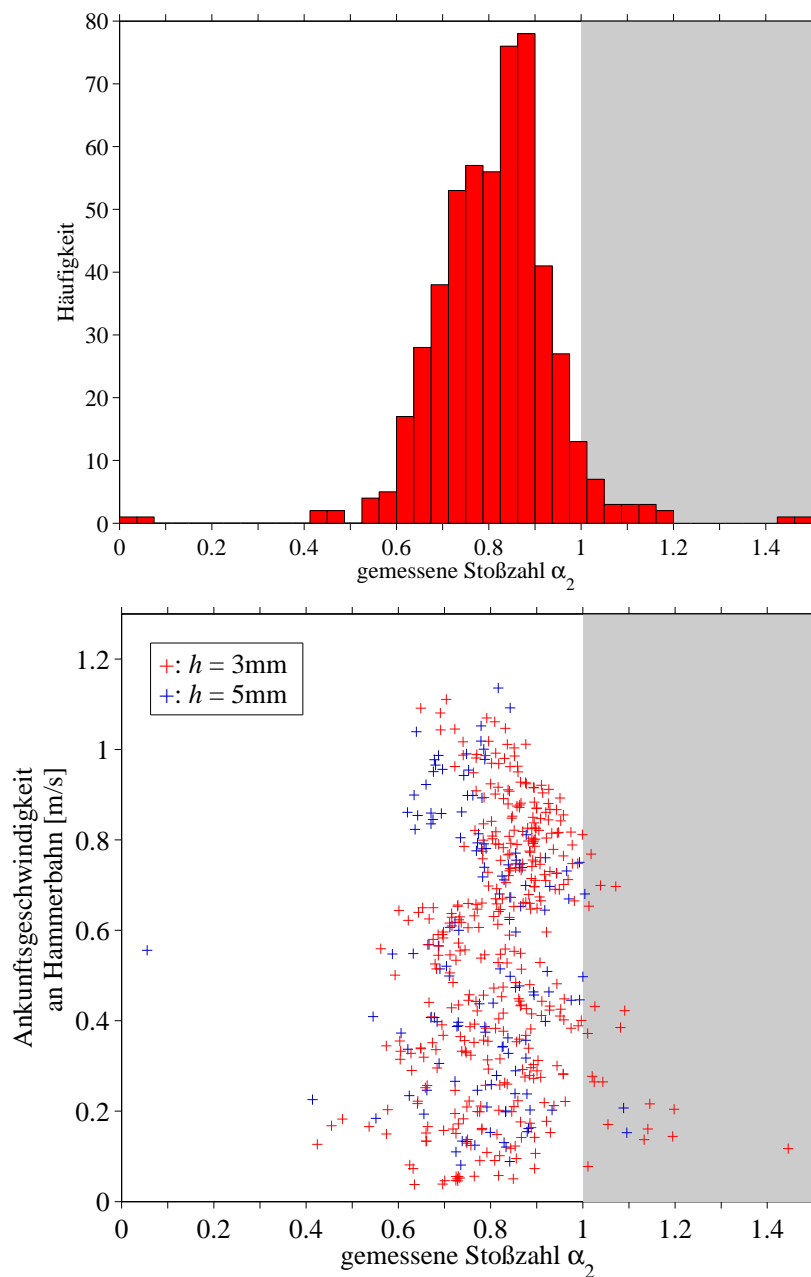


Bild 6.10: Experimentelle Messung der Stoßzahl α_2 an der Hammerbahn

Stoßzahlen auch von der Stoßgeschwindigkeit abhängig sind. Ein Zusammenhang zwischen Stoßzahl und Geschwindigkeit, über den unter Miteinbeziehung von Wellenausbreitungsvorgängen im stabförmigen Stoßpartner in [Seifried, Schiehlen, Eberhard 2004] berichtet wurde, kann in den erhaltenen Messwerten nicht beobachtet werden. Die Modelle, die in Kapitel 5 aufgestellt wurden, beschreiben die kinematischen Zusammenhänge in den Stoßzeitpunkten durch die Stoßzahlenhypothese nach Newton. Hier wird eine zeitlich konstante Stoßzahl angenommen, die sich für einen Parametersatz nicht ändert. Dieses in der Literatur gängige Vorgehen (siehe Unterkapitel 4.3) vernachlässigt die in der Praxis beobachtete Streuung der Stoßzahlenwerte. Abschnitt 6.2.3 wird die qualitative Auswirkung einer Stoßzahlenstreuung auf den Lösungstypus betrachten.

6.2 Simulation des Modells 2. Ordnung

Dieses Unterkapitel betrachtet das Verhalten des Modells 2. Ordnung. Wir werden *Fixpunkte* analytisch bestimmen und *Zeitverläufe* für sowohl periodische als auch chaotische Lösungen sehen. Um die Parameterabhängigkeit von periodischen Lösungen zu verstehen, werden wir eine *Bifurkationsanalyse* für die Systemparameter Flugabstand h sowie die Stoßzahl α_1 durchführen.

6.2.1 Analytische Fixpunktbestimmung

Die Analyseergebnisse in Kapitel 7.1 werden zeigen, dass für einen effizienten Betrieb des Stoßbohrsystems ein periodisches Verhalten der Stoßmasse angestrebt wird. Ein Fixpunkt der Abbildung, die das Modell 2. Ordnung definiert, stellt eine periodische Bewegung der Stoßmasse dar, denn bei jedem Stoß wird das System wiederholt den gleichen Zustand annehmen. Dies motiviert die Bestimmung von Fixpunkten.

Aufgrund der impliziten Natur der Abbildungsgleichung (5.9) ist es nicht möglich, Fixpunkte von mehrperiodischen Bewegungen analytisch zu bestimmen. Dies geschieht auf numerische Weise in Abschnitt 6.2.3 mittels einer Bifurkationsanalyse. Im Folgenden wird gezeigt, dass Fixpunkte $[t^*, V^*]^T$ zu 1-periodischen Lösungen analytisch gefunden werden können.

Eine Anmerkung sei vorab zur Angabe der ersten Komponente eines Zustandswertes gegeben: bisher war die erste Zustandskomponente die Stoßzeit t_k . Im Folgenden wird bei der Angabe eines Zustands oft anstelle der absoluten Stoßzeit t_k deren relative Phasenlage ϕ_k in Bezug zur harmonischen Anregung durch den Oszillator angegeben. Aus t_k wird somit ϕ_k durch die Transformation

$$\phi_k = (t_k \bmod T) \cdot \Omega . \quad (6.1)$$

Ein Zustand $[\phi^*, V^*]^T$ heißt genau dann Fixpunkt der Abbildung \mathbf{T} , wenn

$$\mathbf{T}([\phi^*, \mathbf{V}^*]^T) = [\phi^*, \mathbf{V}^*]^T .$$

Für eine 1-periodische Bewegung folgt hieraus die Periodizitätsbedingung

$$\phi_{k+1}^* = \phi_k^* \quad \wedge \quad V_{k+1}^* = V_k^* \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Transformation (6.1) folgt für die Zustandsgröße „Stoßzeitpunkt“ t_k

$$t_{k+1}^* = t_k^* + nT, \quad n \in \mathbb{N},$$

weil der Zeitverzug eines nachfolgenden Stoßes dem Vielfachen einer Anregeperiodendauer $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ gleichen muss. Damit gilt für die Auslenkung $u(t) = u_0 \cos \Omega t$ der Oszillatorspitze

$$u(t_k^*) = u(t_{k+1}^*).$$

Unter Ausnutzung diesen Zusammenhangs folgt aus der Differenzgleichung (5.6) des Stoßzeitpunktes die Flugdauer $\Delta t = t_{k+1}^* - t_k^*$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen

$$\Delta t = \left(1 + \frac{1}{\alpha_2}\right) \frac{h - u_0 \cos \Omega t^*}{V^*} = nT. \quad (6.2)$$

Mit der Differenzgleichung (5.7) ergibt sich für die periodische Abfluggeschwindigkeit die Bedingung

$$V^* = \alpha_1 \alpha_2 V^* - (1 + \alpha_1) u_0 \Omega \sin \Omega t^*. \quad (6.3)$$

Umstellen von Gleichung (6.2) und Gleichung (6.3) nach V^* und Gleichsetzen führt auf

$$\frac{h}{u_0} = \cos \Omega t^* - b \sin \Omega t^* \quad (6.4)$$

oder

$$1 = a \sin \left(\Omega t^* - \arctan b^{-1} \right) \quad (6.5)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{u_0}{h} \sqrt{1 + b^2} \\ b &= 2\pi n \frac{1 + \alpha_1}{(1 - \alpha_1 \alpha_2) \left(1 + \frac{1}{\alpha_2}\right)}, \quad \alpha_{1,2} \in (0, 1). \end{aligned}$$

Aus Gleichung (6.5) folgt

$$\Omega t^* = \arcsin \frac{1}{a} + \arctan \frac{1}{b} \quad (6.6)$$

und aus Gleichung (6.3) kann V^* berechnet werden:

$$V^* = -\frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2} u_0 \Omega \sin \Omega t^*. \quad (6.7)$$

Die Fixpunkte $[t^*, V^*]^T$ sind gefunden. Aufgrund der nicht-expliziten Formulierbarkeit der Abbildungsgleichungen ist es nicht möglich, die Stabilität der Fixpunkte analytisch zu bestimmen. In den folgenden Abschnitten wird sich mittels numerischer Zeitreihenintegration zeigen, dass für bestimmte Parameterbereiche einer der Fixpunkte stabil ist.

6.2.2 Periodische und chaotische Lösungen

In Abschnitt 5.1 wurde ein Modell 2. Ordnung aufgestellt, welches die Dynamik des zentralen Elements des Ultraschall-Stoßbohrers simulieren soll. Genauer gesagt interessieren die Bewegungen der Kugel, die durch Stöße des schwingenden Oszillators angeregt und durch Kontakt mit einer Prallplatte in ihrem Aktionsradius begrenzt wird. Um einen ersten Eindruck von der Bewegung der Kugel zu erhalten, wollen wir ihre Dynamik in diesem Abschnitt simulieren.

Das Modell 2. Ordnung wurde mit dem Differenzgleichungssystem (5.9) auf Seite 38 definiert. Der Zustandsvektor $[t_{k+1}, V_{k+1}]^T$ wurde dort iterativ aus einer Abbildung

$$\begin{bmatrix} t_{k+1} \\ V_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \left(\begin{bmatrix} t_k \\ V_k \end{bmatrix} \right) \quad (6.8)$$

erzeugt, wobei die Funktion $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ nicht explizit definierbar ist. Um diese zeitdiskreten Bewegungsgleichungen über der Zeit zu „integrieren“, berechnet man eine Folge aufeinanderfolgender Zustände. Diese Folge von Zustandspunkten ergibt einen sog. *Orbit* bzw. eine sog. *Trajektorie*. Man beginnt die Iterationen bei einem Anfangszustand $[t_0, V_0]^T$ bzw. $[\phi_0, V_0]^T$ und iteriert diesen Zustand über die Abbildung (6.8).

Wir wählen einen Parametersatz⁷

Oszillator–		Stoßzahl an		Flug–
Ampl.	Kreisfrequenz	Osz.	Bohrer	abstand
u_0	Ω	α_1	α_2	h
$10 \mu\text{m}$	$2\pi \cdot 20.19 \text{ kHz}$	0.6121	0.7879	5 mm

(6.9)

und iterieren eine Zeitreihe ausgehend von einer zufällig gewählten Anfangsbedingung, etwa

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.265518 \pi \text{ rad} \\ 17.349077 \text{ m/s} \end{bmatrix} .$$

In Bild 6.11, obere Hälfte, ist der so entstandene Bewegungsverlauf gezeichnet. Die iterierten Zustandswerte geben die Stoßzeiten t_k bzw. die Abfluggeschwindigkeiten V_k der Stoßmasse am Oszillator wieder, der in Bild 6.11 am unteren Bildrand in blauer Farbe dargestellt ist. Die kontinuierliche Flugbahn wurde unter Annahme beschleunigungsfreier Bewegung, also konstanter Geschwindigkeit aus der Geschwindigkeit V_k fortgesetzt bis zum Erreichen der Prallplatte (grüne Farbe, oberer Bildrand) im Abstand von $h = 5 \text{ mm}$. Mit der Stoßgleichung (5.4) wird die Abfluggeschwindigkeit U_{k+1}

⁷Flugabstand, Anregfrequenz und Anregeamplitude wurden entsprechend den in Laborversuchen eingestellten Werten gewählt. Die Stoßzahlen liegen im Bereich der Werte, die im vorigen Kapitel experimentell ermittelt wurden und somit für den Prüfstand realistisch sind.

Die hohe Genauigkeit, mit der die Stoßzahlen und die Anfangsbedingungen hier angegeben wurden, ist für die Praxis wenig sinnvoll, für die rein mathematische Untersuchung und die Erzeugung von Periodizität hier jedoch zwingend notwendig und gilt auch für die übrigen Parameter.

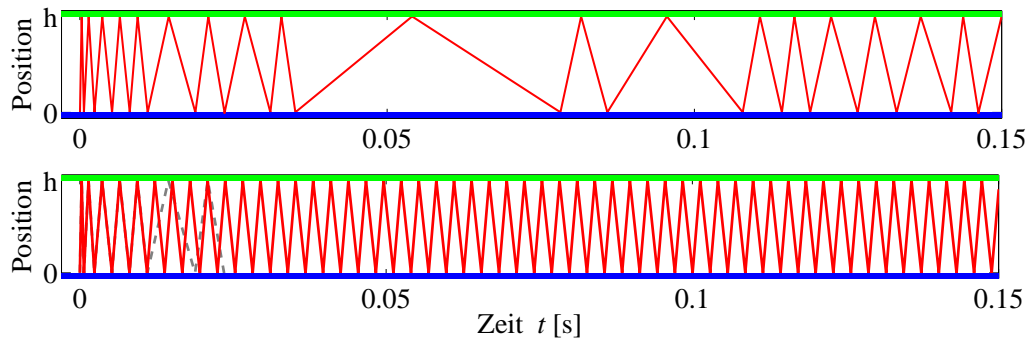


Bild 6.11: Zeitreihe aus dem Modell 2. Ordnung; oben: chaotische Bewegung; unten: periodische Bewegung — mit chaotischer Bewegung - - - zum Vergleich (Das rasche Auseinanderstreben der zwei Zeitverläufe mit nahezu identischem Anfang, d. h. das Entstehen der chaotischen Lösung ist erkennbar.)

nach dem Stoß an der Prallplatte berechnet und ebenfalls als Fluggerade in den Zeitverlauf eingezeichnet. Aus dem Zeitverlauf lässt sich eine erste Vorstellung der simulierten Bewegung der Kugel für einen kleinen Zeitraum und für diesen einen Parametersatz und die speziellen Anfangsbedingungen gewinnen. Eine Regelmäßigkeit der Bewegung lässt sich nicht erkennen. Da sich diese Behauptung durch bloßes Betrachten eines Zeitverlaufes noch nicht mit Sicherheit aufstellen lässt, werden wir im nächsten Abschnitt in einer Bifurkationsanalyse eine andere Sichtweise auf die Art der Bewegung bekommen.

Vorher wollen wir mit dem gleichen Parametersatz eine weitere Zeitreihe bilden, die von anderen Anfangsbedingungen ausgeht. Zur Wahl der Anfangswerte übernehmen wir die obige Startbedingung und erhöhen lediglich die Anfangsgeschwindigkeit in der letzten bezifferten Stelle:

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.265518 \pi \text{ rad} \\ 17.349078 \text{ m/s} \end{bmatrix}.$$

Das Resultat der Bewegung, ausgehend von den vorgegebenen Bedingungen, ist in Bild 6.11, untere Hälfte, dargestellt. Augenscheinlich stellt sich nach zwei Oszillatorstößen eine ein-periodische Bewegung ein⁸. Tatsächlich kann man zeigen, dass die Fixpunktbedingung

$$\mathbf{T} \left(\begin{bmatrix} \phi^* \\ V^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \phi^* \\ V^* \end{bmatrix} \quad \text{von} \quad \begin{bmatrix} \phi^* \\ V^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.49542278921781 \pi \text{ rad} \\ 3.94968938856343 \text{ m/s} \end{bmatrix}$$

erfüllt wird. Die Periodendauer der Stoßbewegung ist hier 2.87 ms bzw. entspricht einer Frequenz von $1/2.87 \text{ ms} = 348$ Oszillatorstößen pro Sekunde.

⁸Die Startwerte zu der periodischen Lösung mit einer — verglichen mit der Fixpunktgeschwindigkeit — hohen Geschwindigkeit von 17 m/s wurden für dieses Beispiel ermittelt, indem ein Lösungsalgorithmus für die inverse Abbildungsvorschrift \mathbf{T}^{-1} aufgestellt und programmiert wurde. Ausgehend von dem zu diesem Zeitpunkt bereits bekannten Fixpunkt als Startbedingung wurden auf der instabilen Mannigfaltigkeit von \mathbf{T} einige Schritte rückwärts iteriert.

Plausibel erscheint dieses Ergebnis im Vergleich mit Untersuchungen des Ultraschall-Stoßbohrers am Jet Propulsion Laboratory in Pasadena: die Stoßfrequenz liegt im Bereich, der dort festgestellt wurde, siehe [Bar-Cohen et al. 2001a].

Bei exakt gleich gehaltenen Parametern führen zwei sich minimal unterscheidende Anfangsbedingungen nach kurzer Zeit auf zwei voneinander verschiedene Lösungen. Diese für deterministisch chaotische Systeme typische Eigenschaft weist auf mindestens zwei koexistierende Lösungen hin, die nebeneinander existieren [Strogatz 1994]. Jede der beiden möglichen Lösungsformen besitzt ihr eigenes Einzugsgebiet von Anfangsbedingungen. Wie sich die Einzugsgebiete über den Zustandsraum erstrecken, werden wir in Kapitel 7.1 untersuchen.

Die rasche Separation der beiden dicht beieinander beginnenden Trajektorien aus Bild 6.11 verdeutlicht Bild 6.12, in dem die periodische Lösung (durchgezogen —) und die chaotische (gestrichelt ---) in das selbe Achsensystem übereinander gelegt wurden. Der erste Vergrößerungsausschnitt **a** hebt den dritten Stoß, der bei einer Phasenlage des Oszillators von etwa $\phi_k=1.355\pi$ rad stattfindet, hervor. Die periodische Lösung erreicht den Oszillator wenig später, was der Oszillatormaximalgeschwindigkeit (bei Phase 1.5π) geringfügig näher liegt. Daher ist der Impuls auf die Kugel, die sich auf der chaotischen Flugbahn bewegt, geringer. So erreicht sie den Oszillator im nächsten Zyklus bereits deutlich später als die periodische Flugbahn (Ausschnitt **b**) und hinkt der Periodizität einen weiteren Stoß später bereits eine dreiviertel Phase hinterher (Ausschnitt **c**). Die Oszillatorgeschwindigkeit ist in diesem Stoßmoment aber nahezu Null, genau genommen sogar negativ, wodurch die Abfluggeschwindigkeit sogar leicht gebremst wird. Dies verursacht die lange sechste Flugdauer und begründet die Irregularität der weiteren Bewegung, siehe Bild 6.11 oben.

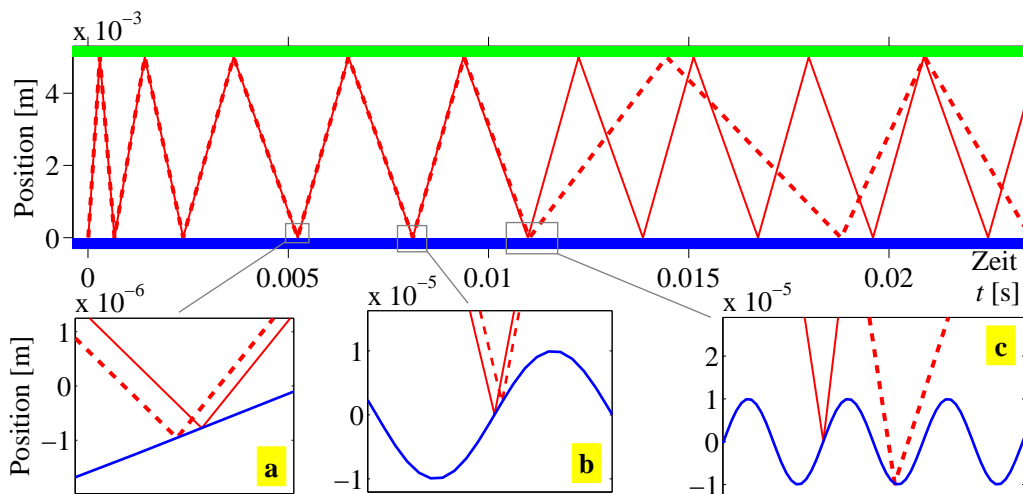


Bild 6.12: Transiente Phase der periodischen Zeitreihe — mit überlagerter chaotischer Lösung ---; darunter drei Detailvergrößerungen.

6.2.3 Bifurkationsanalyse

Bevor wir die Dynamik des Modells 2. Ordnung detailliert unter Anwendung der mengenorientierten Methoden für einen ausgewählten Parametersatz im folgenden Kapitel 7 analysieren und interpretieren werden, soll dieser Abschnitt einen Überblick über die Abhängigkeit der Dynamik von den Parametern des Modells geben. Wie wir später genauer sehen werden, ist die am häufigsten anzutreffende Form der Bewegung eine irreguläre, d. h. chaotische. Unter gewissen Parameterkonstellationen koexistieren auch chaotische und periodische Bewegungen von unterschiedlicher Periodizitätszahl. Im vorigen Abschnitt wurde ein solcher Parametersatz (siehe (6.9)) gewählt und die sensible Abhängigkeit des Lösungstypus von den Anfangsbedingungen anhand eines Beispiels gezeigt. Wie verhält sich das System aber, wenn sich Prozess- oder Systemparameter ändern? In welchen Parameterbereichen existieren periodische Lösungen neben chaotischen? Gibt es Parameter, für die periodisches Verhalten nicht möglich ist? Wie verschieben sich die Fixpunkte periodischer Lösungen, wenn sich ein Parameter verändert? Diesen Fragen soll in diesem Abschnitt auf numerischem Wege nachgegangen werden.

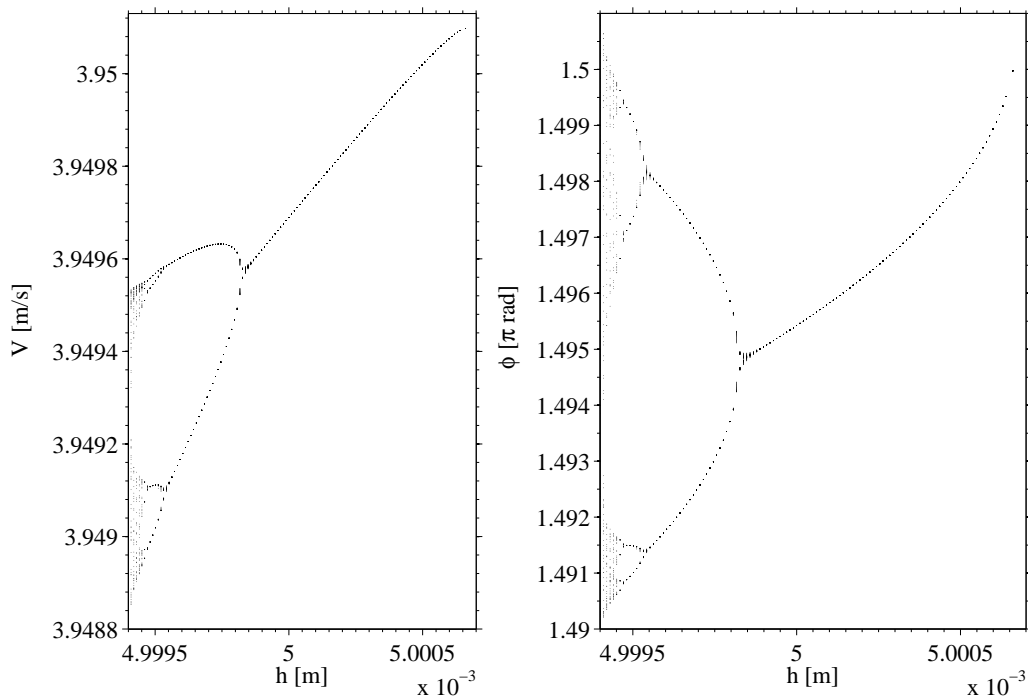


Bild 6.13: Bifurkationsdiagramm mit Bifurkationsparameter h : erkennbar ist die Kaskade von Pitchfork-Bifurkationen für minimal abnehmendes h . Der Ausschnitt zeigt einen Bereich von nur ca. $1\mu\text{m}$ Breite!

Die Verzweigungs- oder *Bifurkationsanalyse* entschlüsselt die Existenz von periodischer versus chaotischer Dynamik in Abhängigkeit eines Prozess- oder Systemparameters. Man erstellt ein sogenanntes Bifurkationsdiagramm, in welches man eine (beliebig) gewählte Zustandsvariable über

den interessierenden Parameter aufträgt, dessen Abhängigkeit untersucht werden soll (siehe auch Abschnitt 4.1.6). Die Wahl der Zustandsvariablen ist weitestgehend frei. Die Abszisse⁹ des Diagramms wird in feine Parameter-Schritte unterteilt. Für jeden Parameterwert wird daraufhin die Trajektorie von einem Anfangszustand aus integriert. Nachdem transiente Einschwingvorgänge abgeklungen sind, wertet man den Systemzustand \mathbf{x} wiederholt an einzelnen Zeitpunkten aus, die im Abstand einer Periodendauer T aufeinander folgen, wobei t_0 das geschätzte Ende der Einschwingzeit kennzeichnet:

$$\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_0 + T), \mathbf{x}(t_0 + 2T), \mathbf{x}(t_0 + 3T), \dots$$

Etwa 100 Zustandspunkte ermittelt man so. Die Werte der gewählten Zustandsvariablen aus jedem der Zustandspunkte plottet man als einzelne Punkte in das Diagramm über die Stelle des Systemparameters. Falls sich das System bei diesem Systemparameter 1-periodisch verhält, so wird die Zustandsvariable nach jeder Periode T wieder den gleichen Wert annehmen. Im Bifurkationsdiagramm entsteht nur ein Punkt. Liegt eine 2-periodische Lösung vor, so werden zwei diskrete Punkte entstehen, da das System erst wieder nach stets 2 Periodendauern T zum ersten Zustandspunkt zurückkehrt. Findet dagegen chaotisches Verhalten statt, so liegen die Punkte verstreut¹⁰. Nachdem für den festgehaltenen Parameter die etwa 100 Zustandspunkte geplottet wurden, rückt man ihn ein kleines Inkrement oder Dekrement¹¹ weiter und wiederholt den Vorgang.

Bei zeitkontinuierlichen, nichtautonomen¹² Systemen bietet sich bei periodischer Anregung als Zeitmaß T die Wahl der Anregeperiode an, zu dem die integrierte Trajektorie wiederholt ausgewertet wird.

Im Falle des zeitdiskreten Modells liegt bereits eine Abbildungsvorschrift vor, die von einem Zustandspunkt in einem diskreten Schritt zum nächsten Punkt abbildet. Diese Schrittweite wird als ein Periodenzeitschritt (T) angesehen. Genauso wie beim zeitkontinuierlichen System lassen sich so 1-periodische von 2-periodischen von mehr-periodischen von chaotischen („unendlich-periodischen“) Attraktoren unterscheiden.

Bedingt durch die komplizierte Dynamik, die nichtglatte Stoßsysteme aufweisen, koexistieren oft mehrere Attraktoren nebeneinander. Die Analyse des vorliegenden Systems zeigte, dass für alle Parameterkombinationen stets ein chaotischer Attraktor existiert. Dies erzeugt eine Schwierigkeit bei

⁹ *Abszisse*: (lateinisch: die abgeschnittene Linie) horizontale Achse eines Koordinatensystems

¹⁰ In einer Poincaré-Abbildung, in der sehr viele solcher Zustandspunkte im Zeitabstand T stroboskopähnlich in ein Zustandsdiagramm eingezeichnet werden, erkennt man eine seltsame Struktur, die den Determinismus, also die Vorherbestimmtheit, des nur oberflächlich zufällig wirkenden Chaos nachweist. Diese Struktur nennt man „seltsamen Attraktor“.

¹¹ Das *Inkrement*: (lateinisch „Zuwachs“) Betrag, um den eine Größe zunimmt. Das *Dekrement*: Verminderung.

¹² Ein *nichtautonomes* Differentialgleichungssystem verhält sich von der Zeit abhängig, meist durch einen zeitabhängigen Erregerterm auf der rechten Seite. Beispiel: rechte Seite = $u_0 \cos \Omega t$.

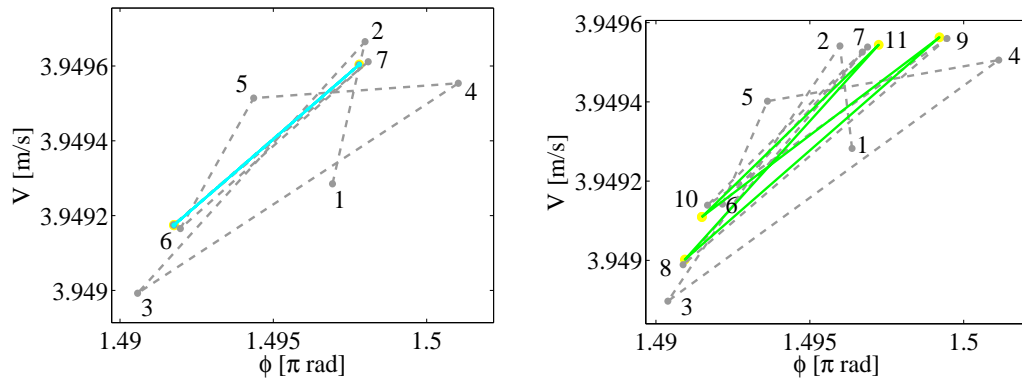


Bild 6.14: Trajektorien für mehrperiodische Lösungen; links: 2-periodisch ($h = 4.9996$ mm), rechts: 4-periodisch ($h = 4.99949$ mm)

der Bestimmung der Bifurkationen von periodischen Lösungen: es ist notwendig, dass die Anfangsbedingungen zum Nachweis periodischer Lösungen stets innerhalb des Einzugsgebietes der periodischen Lösungen liegen. Mit weiterrückendem Bifurkationsparameter verändert sich auch das Einzugsgebiet geringfügig. Für das vorliegende System wurde daher eine Strategie implementiert, die als Anfangsbedingung den Fixpunkt aus der Rechnung mit dem vorigen Parameter verwendet. Bei n -periodischen Lösungen ($n \geq 2$) wird derjenige der n Fixpunkte mit dem betragsmäßig größten Zahlenwert im Geschwindigkeitszustand gewählt, da dieser maximal weit entfernt vom chaotischen Attraktor liegt, der typischerweise in Bereichen kleinerer Geschwindigkeiten residiert. Durch dieses Vorgehen kann bei genügend kleiner Parameterschrittweite nahezu sichergestellt werden, dass die Anfangsbedingungen mit dem Einzugsgebiet der periodischen Lösungen mitwandern.

Bifurkationsparameter h

Im vorigen Abschnitt 6.2.2 wurde eine 1-periodische Lösung bei einem Flugabstand von $h = 5$ mm mit dem Fixpunkt

$$\begin{bmatrix} \phi^* \\ V^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.49542278921781 \pi \text{ rad} \\ 3.94968938856343 \text{ m/s} \end{bmatrix}$$

gefunden. Im Labor lässt sich der Flugabstand zwar einstellen, jedoch ist dies nur mit begrenzter Präzision möglich. In der folgenden Bifurkationsanalyse soll daher untersucht werden, welchen Einfluss h auf die Lage und die Art des Fixpunktes hat. Bild 6.13 zeigt zwei Bifurkationsdiagramme mit dem Bifurkationsparameter h . Das linke Diagramm wurde für die Zustandsvariable V_k , das rechte für die Zustandsvariable ϕ_k erzeugt. Für den Parameterwert $h = 5$ mm finden wir den zuvor gefundenen Fixpunkt $[\phi_k, V_k]^T$ in den Diagrammen wieder. Ausgehend von $h = 5$ mm wurde der Flugabstand in feinen Schritten zunächst erhöht, dann verringert. Wächst h an, so steigt die Fixpunktgeschwindigkeit, und die Phasenlage des Fixpunktes nähert sich von unten dem Oszillatorgeschwindigkeitsmaximum bei $\phi_k = 3/2 \pi$ rad. Die periodische Lösung existiert mit Periode eins weiterhin, lediglich der Fixpunkt

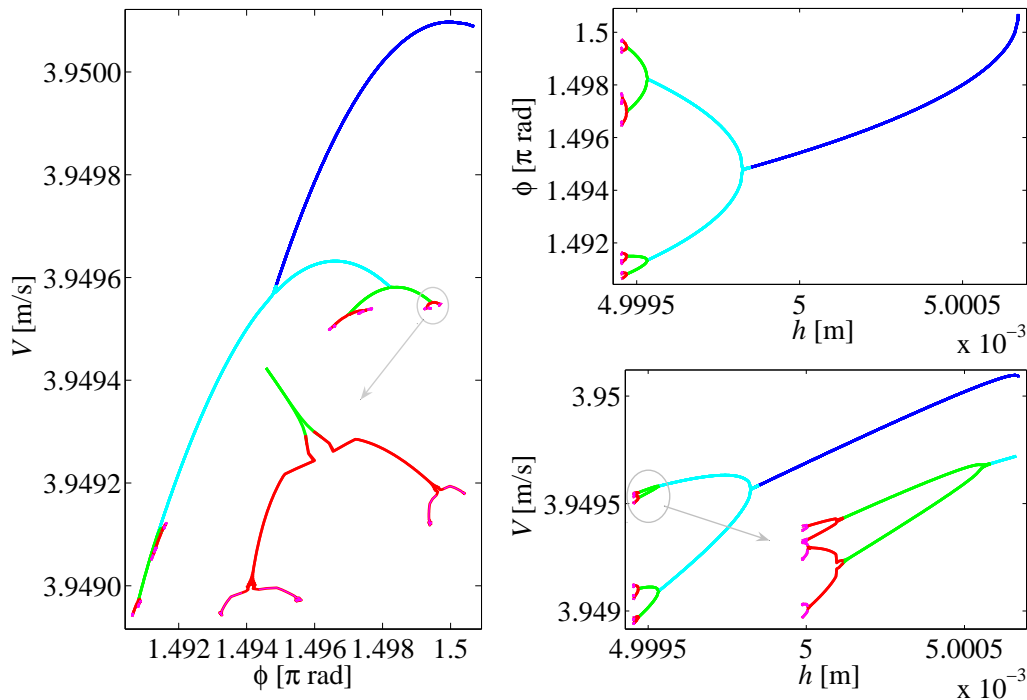
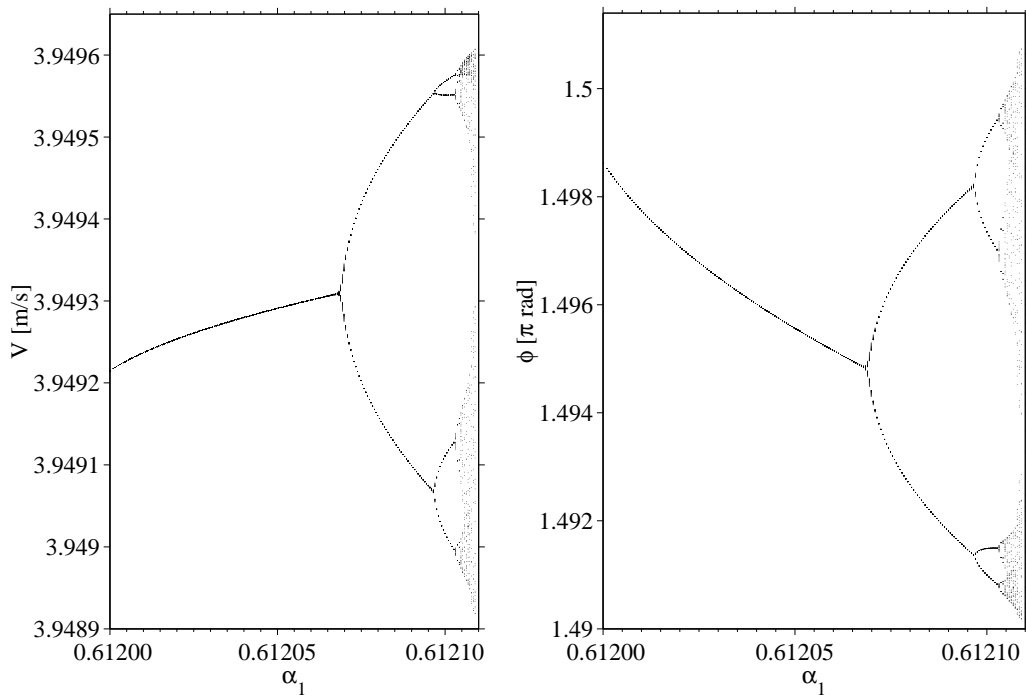


Bild 6.15: Ortskurve des Bifurkationsdiagramms für den Laufparameter h

verschiebt sich mit steigendem h etwas im Zustandsraum. Sobald der Parameter jedoch den Flugabstand von 5.00066 mm übersteigt, verschwindet die stabile Fixpunktlösung plötzlich und weicht der alleine dominierenden chaotischen Lösung. Für $h > 5.00066$ mm breitet sich die Punktewolke, die das Chaos beschreibt, bei Geschwindigkeitszuständen, die unterhalb des gezeigten Ausschnitts im Bild links liegen und sind im Diagramm daher nicht sichtbar.

Verringert man den Parameter ausgehend von der 1-periodischen Lösung bei $h = 5$ mm schrittweise, so passiert Überraschendes bei $h \approx 4.9998$ mm: der Ast periodischer Lösungen verzweigt sich. Der Ast vormals stabiler 1-periodischer Lösungen wechselt seine Stabilität hin zu einem weiterlaufenden Ast von instabilen Fixpunkten. Da die instabilen Lösungen durch das beschriebene Vorgehen nicht erhalten werden, wird der Ast 1-periodischer Lösungen im Diagramm nicht fortgesetzt. Wie aus dem Nichts verzweigen sich aus dem Ast 1-periodischer Lösungen zwei Zweige. Sie enthüllen die Existenz 2-periodischer Lösungen. Dieses Phänomen nennt man Periodenverdoppelung bzw. *Heugabel-Verzweigung* (engl. pitchfork bifurkation).

Startet das System von einem Anfangszustand aus dem Einzugsbereich der 2-periodischen Lösung, so konvergiert die Reihe in wenigen Schritten gegen die zwei Fixpunkte. Diesen Vorgang zeigt die Trajektorie in Bild 6.14, linke Hälfte. Im Zustandsdiagramm ist die Reihenentwicklung als Punkt-Reihe V_k über ϕ_k eingezeichnet. Die Ziffer „1“ markiert die Startbedingung, von der aus etwa 15 Schritte iteriert wurden. Die Trajektorie der ersten transienten Stöße (grau gestrichelt) nähert sich etwa ab dem 6. Schritt der stationären, stabilen periodischen Lösung. Die periodische Trajektorie, die


 Bild 6.16: Bifurkationsdiagramm für Parameter α_1

zwischen den zwei gelb hinterlegten Fixpunkten hin- und herspringt, ist türkis gefärbt. Weiteres Verringern von h führt zu weiteren Periodenverdoppelungen. Bild 6.14, rechte Hälfte, zeigt die transiente Trajektorie hin zur stabilen 4-periodischen Lösung.

Mit weiterer schrittweiser Verkleinerung des Flugabstands ergibt sich eine Kaskade immer öfter auftretender Periodenverdoppelungen, die schließlich für etwa $h < 4.9994$ mm in Chaos münden.

Die Darstellungsweise in den Bifurkationsdiagrammen in Bild 6.13 bewährt sich, um den Grad der Periodizität der Lösungen zu erkennen. In Bild 6.15 ist die Ortskurve der periodischen Fixpunkte mit dem Laufparameter h gezeigt, die der Darstellung im Bifurkationsdiagramm entspricht. Farben kennzeichnen den Grad der Periodizität von 1-periodisch (blau) bis 16-periodisch (lila). Ablesen lässt sich hier leicht, dass die Bewegungsform mit größter Abfluggeschwindigkeit V die 1-periodische Bewegung ist.

Bifurkationsparameter α_1

In einer weiteren Bifurkationsanalyse wollen wir die Periodizitätsexistenz beleuchten, wenn eine der Stoßzahlen variiert wird. In Unterkapitel 6.1 sahen wir, dass die Stoßzahlen in der Praxis schwankende Größen sind. Dies motiviert das Interesse der Wahl von α_1 für die Parameterstudie. Mit dem folgenden Parametersatz, für den wir im vorigen Abschnitt Periode-4-Verhalten

sahen, beginnen wir die Variation von $\alpha_1 = 0.6121$ aus:

Oszillator–		Stoßzahl an		Flug- abstand
Ampl.	Frequenz	Oszillator	Bohrer	
u_0	f	α_1	α_2	h
10 μm	20.19 kHz	[0.6120 0.61211]	0.7879	4.9995 mm

(6.10)

Bild 6.16 zeigt das Bifurkationsdiagramm für α_1 , Bild 4.1 hebt mit einer 200-Schritt-Auflösung des rechten Randes die Periodenverdoppelungskaskade hervor. Je höher α_1 , desto geringer ist die Systemdämpfung. Entsprechendes lässt sich aus den Diagrammen ablesen: Bewegungen mit großen Stoßgeschwindigkeiten ergeben sich für größere Stoßzahlen. Jenseits von $\alpha_1 = 0.61211$ herrscht jedoch wieder Chaos vor. Der Bereich, in dem die Stoßzahl variieren kann, um Periodizität zu ermöglichen, ist weit schmaler als die Streuung der Werte in der Praxis. Dies erklärt, warum periodische Lösungen in der Praxis so gut wie nie beobachtet werden.

6.3 Experimentelle Untersuchungen am Stoßbohrer

Im bisherigen Teil dieses Kapitels wurde das dynamische Verhalten der zentralen Komponente des Ultraschall-Stoßbohrers — der freien Stoßmasse — untersucht. Der Bohrer, der als Gegenprallelement für die Stoßmasse auf der einen Seite fungiert, wurde festgehalten und durch eine Hammerbahn ersetzt. Der Antrieb des Bohrers — der Ultraschall-Transducer, auch Oszillator genannt — wurde mit einem konstanten Abstand zum Gegenprallelement im Prüfstand eingespannt. Die Auswirkungen des in Schwingungsrichtung frei beweglichen Oszillators auf die dynamischen Eigenschaften des Bohrersystems werden in diesem Unterkapitel experimentell und im folgenden simulierend untersucht.

6.3.1 Prüfstand für Messungen am Stoßbohrer

Wie im bisherigen Prüfstand stellt die Führung der Stoßmasse eine Schwierigkeit dar, denn sie soll die Kugel in Flugrichtung nicht beeinflussen, quer dazu jedoch begrenzen. Bild 6.2 auf Seite 55 zeigt den Aufbau eines Stoßbohrers, bei dem als Stoßmasse eine runde Scheibe mit zentralem Loch zur Führung gewählt wurde. Ein Führungsstab in Längsrichtung verhindert Querbewegungen der Scheibe. Die Reibung an seinem Umfang führt jedoch zum Verkanten und Taumeln der Scheibe.

Eine verbesserte Version der Führung wurde von Dipl.-Ing. Christian Potthast aufgebaut, zu sehen auf den Bildern 6.17 und 6.18 [Potthast et al. 2007a]. Als Stoßmasse bewegt sich eine Stahlkugel mit Durchmesser 8 mm in einer Aluminiumhülse mit geringfügig größerem Durchmesser. Eine Aussparung in der Hülse ermöglicht das optische Erfassen der Kugelposition. Während der Messung sitzt der Bohrer auf einem

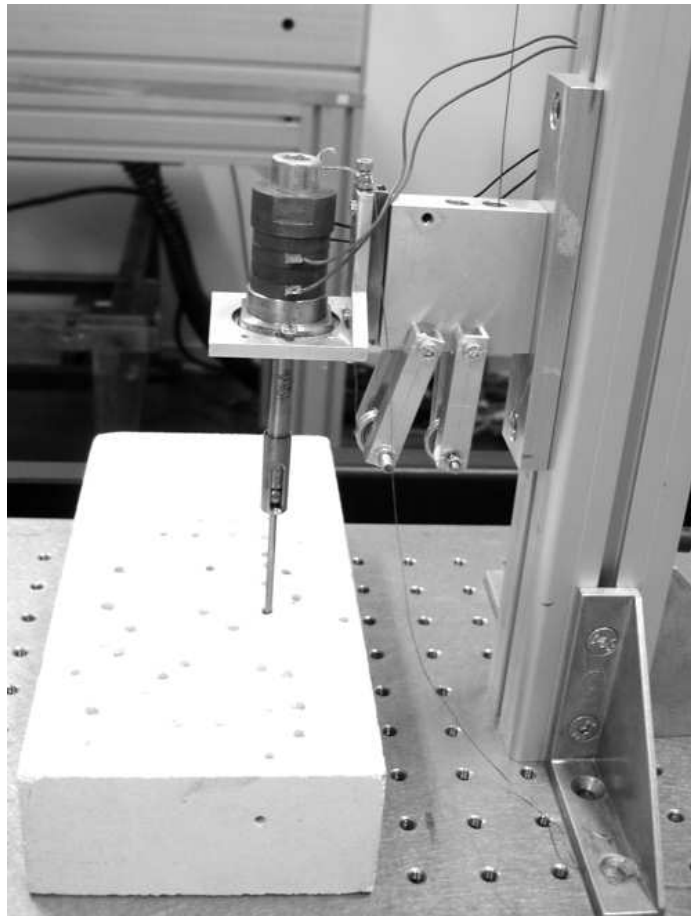


Bild 6.17: Gesamter Prüfstand mit Linearführung für den Stoßbohrer; Prüfstandskonzeption und Bild: C. Potthast

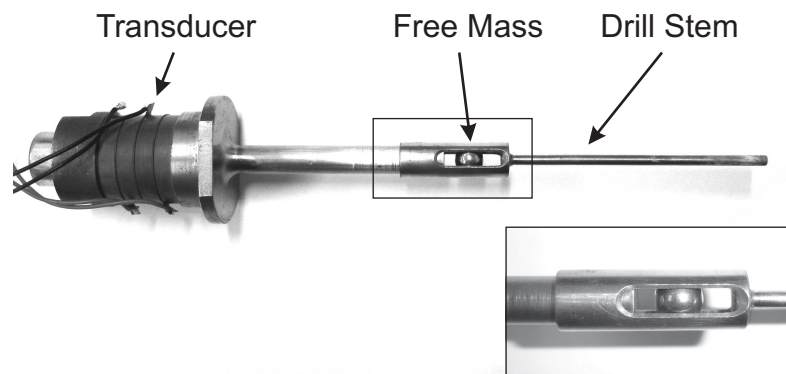


Bild 6.18: Stoßbohrer aus Prüfstand: Oszillator, Kugel und Bohrer mit Führungshülse; Bild: C. Potthast

Kraftmesser, auf dem er in vertikaler Richtung nicht fixiert ist. Für die Messdatenaufzeichnung wurde eine Hochgeschwindigkeitskamera verwendet, die mit einer Frequenz von 9000 Bildern pro Sekunde Photographien speicherte.

6.3.2 Messergebnisse am Stoßbohrer

Die Messung am Stoßbohrer mit dem oben beschriebenen Prüfstand wurde von Dipl.-Ing. Christian Potthast mit dem Parametersatz

Ampl.	Oszillator- Frequenz	Masse	Kugel- Masse	Anpress- Kraft	Gravitations- Beschl.
u_0	f	M	m	F_A	g
$5\ \mu\text{m}$	20.19 kHz	264.7 g	2.1 g	3 N	$9.81\ \text{m/s}^2$

(6.11)

durchgeführt. Einen Ausschnitt von 63 ms der Hochgeschwindigkeitskameraauswertung zeigt Bild 6.19. Sichtbar ist eine Starrkörperbewegung des Bohrers (grün), der seinerseits Stöße mit dem Untergrund (im Prüfstand war dies ein Kraftsensor) ausführt.

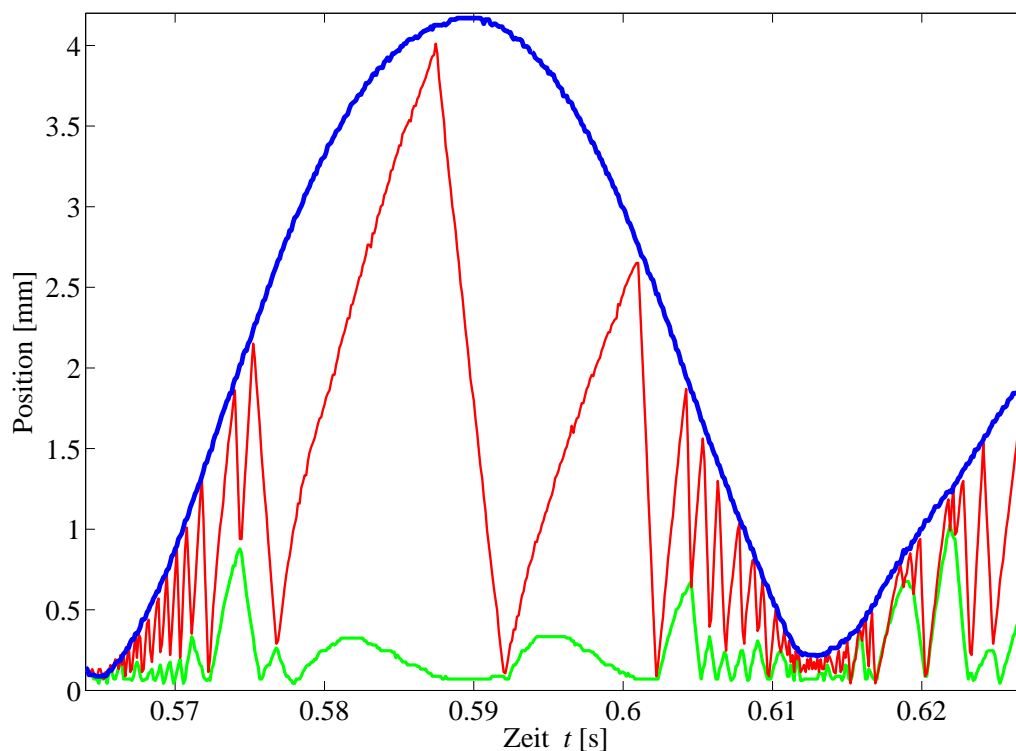


Bild 6.19: Gemessene Bewegung von Oszillator, Kugel und Bohrer

6.4 Simulation des Modells 4. Ordnung

In den Unterkapiteln 6.1 und 6.2 wurden die möglichen Bewegungsabläufe der Stoßmasse (Kugel) im Inneren des Bohrsystems mithilfe eines auf zwei Zustandsvariablen reduzierten Grundmodells studiert. In Unterkapitel 5.2 wurde durch Verfeinern des vorigen Modells die Fesselung des Oszillators ans Inertialsystem aufgehoben: wie die Stoßmasse kann er sich frei bewegen. Auch wurde der Einfluss der Schwerkraft und einer Anpresskraft mit in das Modell aufgenommen. Diesen Aspekten wird in einer Erweiterung des vormals untersuchten Modells 2. Ordnung Rechnung getragen. Im Gegensatz

zu diesem Modell ist es von Ordnung vier und simuliert ebenfalls diskrete Zeitschritte. Zusätzlich zu den beiden Zustandsgrößen des ersten Modells (Stoßphase und Abfluggeschwindigkeit der Kugel) berücksichtigt das erweiterte Modell die Geschwindigkeit und Position des beweglichen Oszillators im Zeitpunkt jedes Stoßes zwischen Stoßmasse und Oszillator.

Durch eine einfache Zeitreihensimulation ist es wie zuvor hilfreich und nützlich, sich zunächst einen Überblick über die zu studierende Dynamik zu machen. Hierzu iterieren wir das Modell 4. Ordnung ausgehend von einem festgelegten Anfangszustand. Die Bewegungen von Stoßmasse und Oszillator halten wir in einer Zeitreihendarstellung fest, wie auch schon auf Seite 66 in Bild 6.11 für das reduzierte Modell 2. Ordnung. Die Gleichungen (5.43) bis (5.49) iterativ angewendet liefern x_k , \dot{x}_k und \dot{y}_k jeweils zu den Stoßzeitpunkten t_k . Die Positionen des Oszillatorschwerpunktes $x(t)$, der Oszillatortspitze $u(t)$ und der Stoßmasse $y(t)$ in kontinuierlicher Zeit zwischen den Stoßereignissen werden aus den Anfangswertproblemlösungen (5.24), (5.26) und (5.34) berechnet.

Für die Simulationen werden der Parametersatz

Oszillator– Ampl.		Stoßzahl an Osz.		Massen– verhältn.	Beschleunigung aus Anpresskraft	
Frequ.	Osz.	Bohrer			Anpresskraft	Gravitat.
u_0	f	α_1	α_2	$M/m = \mu$	F_A/M	g
$15 \mu\text{m}$	20.19 kHz	0.5	0.6	$\frac{264.7 \text{ g}}{2.0 \text{ g}}$ $= 132$	$\frac{3 \text{ N}}{0.2647 \text{ kg}}$ $= 11 \text{ m/s}^2$	9.81 m/s^2

sowie als Anfangsbedingungen für die Zustandsvariablen

Startzeit	Startgeschwindigkeit		Startpos.
	Stoßmasse	Oszillator	
t_0	\dot{y}_0^+	\dot{x}_0^+	x_0
$37.7 \mu\text{s}$	-3.33 m/s	0 m/s	1.42 mm

benutzt.

Die erste halbe Sekunde der mit den angegebenen Parametern und Startbedingungen simulierten Zeitreihe zeigt Bild 6.20. Im unteren Teil der Zeitreihe ist die Entwicklung der Stoßfrequenzen aufgetragen, d. h. über jede Stoßzeit ist der Kehrwert der Dauer bis zum nächsten Stoß aufgetragen. Die gepunktete Linie (\cdots) bei 1.3 kHz kennzeichnet die mittlere Stoßfrequenz, wobei die (extrem kurzen) Flugdauern von Mehrfachstößen hier und auch im Diagramm nicht auftauchen.

Das Histogramm in Bild 6.21 zeigt die Häufigkeitsverteilung der Frequenzen: die meisten Stöße folgen mit einer Frequenz von 500 Hz aufeinander. An der Lage der lokalen Maxima der Stoßfrequenzverteilung unter der Zeitreihendarstellung erkennen wir, dass dichte Stoßfolgen auftreten, wenn die Oszillatorlage ein lokales Minimum einnimmt, bedingt durch minimale Flugwege für die Stoßmasse.

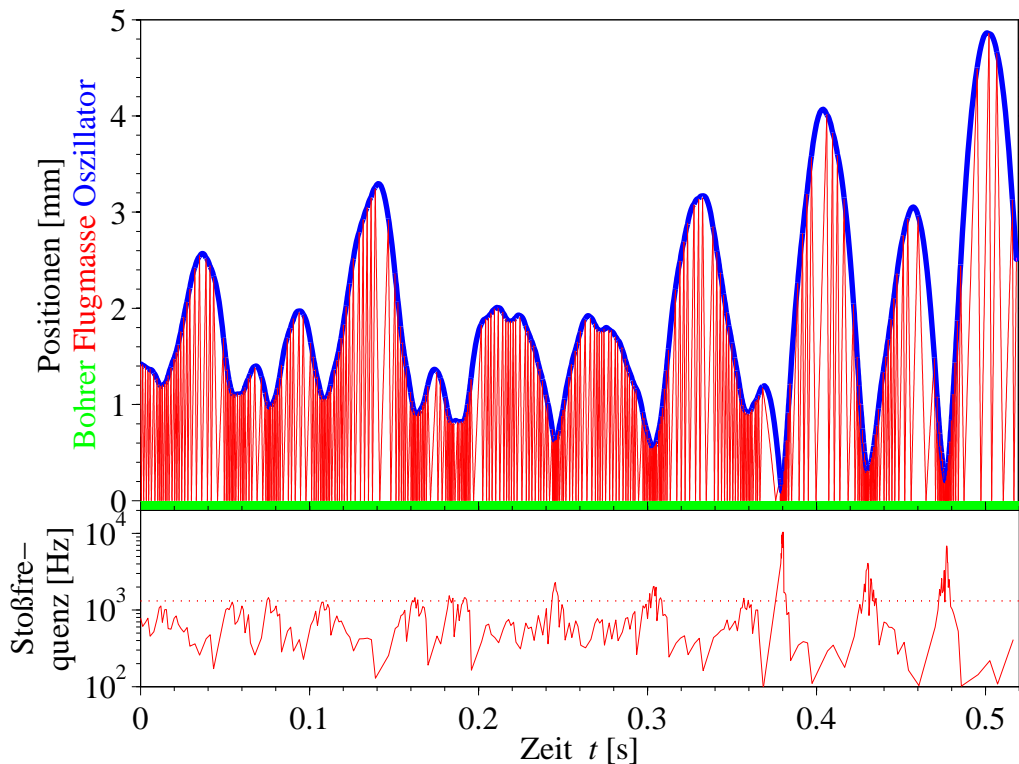


Bild 6.20: Zeitreihensimulation (oben): **Oszillator**, **Kugel** und **feststehender Bohrer**; Stoßfrequenzen (unten) mit Markierung (\dots) der mittleren Stoßfrequenz

Detaillierteren Einblick in die Flugbahnen der Kugelmasse zeigen die Bilder 6.22 bis 6.24. Bild 6.22 hebt einen Ausschnitt von 70 ms aus der iterierten Zeitreihe hervor, Bilder 6.23 und 6.24 zeigen Detailausschnitte aus Bild 6.22. Lilafarbene Abschnitte der Fluggeraden markieren Mehrfachstöße der Kugel am Oszillator. Mehrfachstöße treten auf, wenn die Kugel nach ihrem Oszillatorstoß noch weiter in dessen Richtung fliegt oder wenn sie sich zu langsam in Richtung auf den Bohrer bewegt und von der gleichen Schwingphase des Oszillators eingeholt wird. Selten kommt es vor, dass die Kugel mit geringer Geschwindigkeit den Schwingradius des Oszillators verlässt, viele Periodendauern später vom Oszillator aber ein weiteres Mal getroffen wird. Auch diese Möglichkeit muss im Modell berücksichtigt werden.

Vereinzelt kommt es zu Mehrfachstößen am Bohrer. Sie mathematisch zu beschreiben führt auf das Paradoxon von Zeno, wenn die Kugel unendlich oft auf den Bohrer trifft, bevor sie wieder in Kontakt mit dem Oszillator kommt.¹³ Trifft der Oszillator erst nach dieser endlichen Zeit unendlich vieler

¹³Eines von Zeno von Eleas vier Paradoxen von Zeit und Bewegung war, dass Zeit unendlich unterteilbar ist. Die Dichotomie besagt: Um das Intervall $[0, 1]$ zu durchschreiten, muss zunächst einmal die erste Hälfte dieser Distanz, also das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ traversiert werden. Hierzu ist es jedoch wiederum notwendig, dessen erste Hälfte, sprich das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ zu durchmessen, usw. Folglich sind zunächst unendlich viele Reise-Einheiten notwendig, um sich überhaupt vom Start zu entfernen. Dies ist in endlicher Zeit nicht möglich — daher kann der Reisende nie am Ziel ankommen. Aristoteles erklärte, Achilles könne die Schildkröte niemals einholen, die 10m vor ihm starte und 10

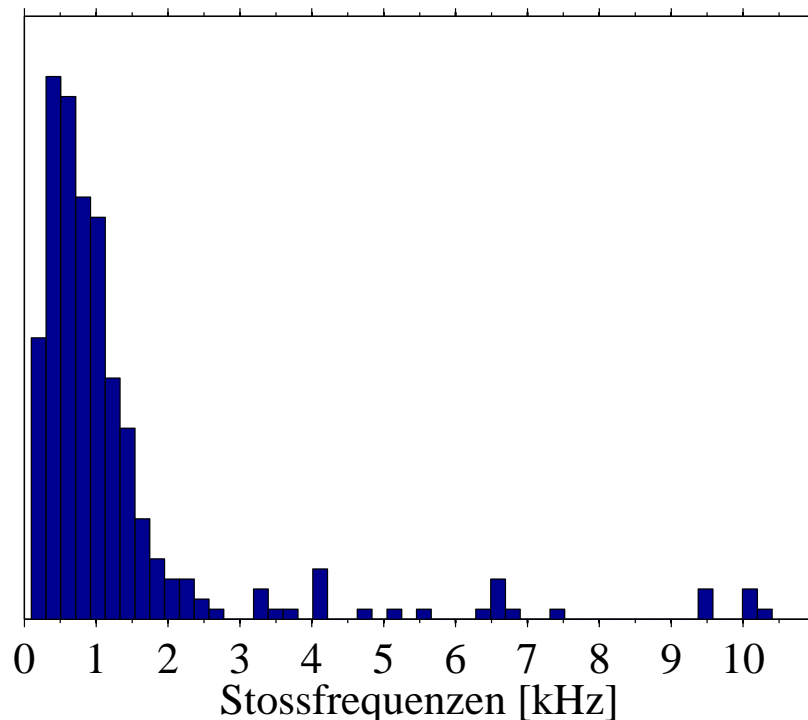


Bild 6.21: Histogramm-Verteilung der Stoßfrequenzen: die typische Stoßfrequenz liegt bei 500 Hz.

Stöße auf die dann ruhende Kugel, so kann er sie gemäß dem in Unterkapitel 5.1 aufgestellten Starrkörpermodell nie mehr in Bewegung versetzen. Laborversuche zeigen jedoch, dass dies möglich ist. Für diese Situation versagt das Modell folglich — es muss auf ein elastostatisches Modell gewechselt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde in solchen Fällen — anstelle einer Anpassung des Modells — von weiteren Iterationen abgesehen.

6.5 Vergleich von Modellen und Messungen

Im Sichtvergleich der Zeitsimulation in Bild 6.22 mit dem Ausschnitt aus der Messaufzeichnung in Bild 6.19 lässt sich eine hohe Übereinstimmung

mal langsamer sei. Denn nachdem Achilles die ersten 10 m gelaufen war, hatte sich die Schildkröte um 1 m weiterbewegt. In der Zeit, die Achilles aber für diesen Meter gebraucht hatte, war die Schildkröte um $\frac{1}{10}$ m voran gekrochen, usw.. Die unendlich vielen Etappen, die Achilles zurücklegen muss, addieren sich jedoch auf nicht mehr als $10^1 + 10^0 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 10 + \frac{1}{1-\frac{1}{10}}$. Kommen wir auf die frei fliegende Kugel zurück, für die Whitrow die gleiche Dichotomie („Zweiteilung“) formulierte: Angenommen, die Kugel pralle mit der Geschwindigkeit v_0 in vertikaler Richtung vom feststehenden Bohrer ab und beschleunigt, ohne den Oszillator zu treffen, mit der Erdbeschleunigung g wieder zum Bohrer zurück, so wird diese Flugdauer $\frac{2v_0}{g}$ dauern. Für den nächsten Stoß beträgt die Abprallgeschwindigkeit nur noch $v_0 \cdot \alpha_2$, usw. Die Kugel wird unendlich viele sich verkleinernde und dichter folgende Stöße mit der Prallplatte ausüben, also scheinbar nie zur Ruhe kommen. Allerdings benötigen diese unendlich vielen sich verkürzenden Stöße nur eine Zeitspanne von $\frac{2v_0}{g} + \frac{2v_0\alpha_2}{g} + \frac{2v_0\alpha_2^2}{g} + \dots = \frac{2v_0}{g} \frac{1}{1-\alpha_2}$, wonach die Kugel bewegungslos auf dem Bohrer liegen muss.

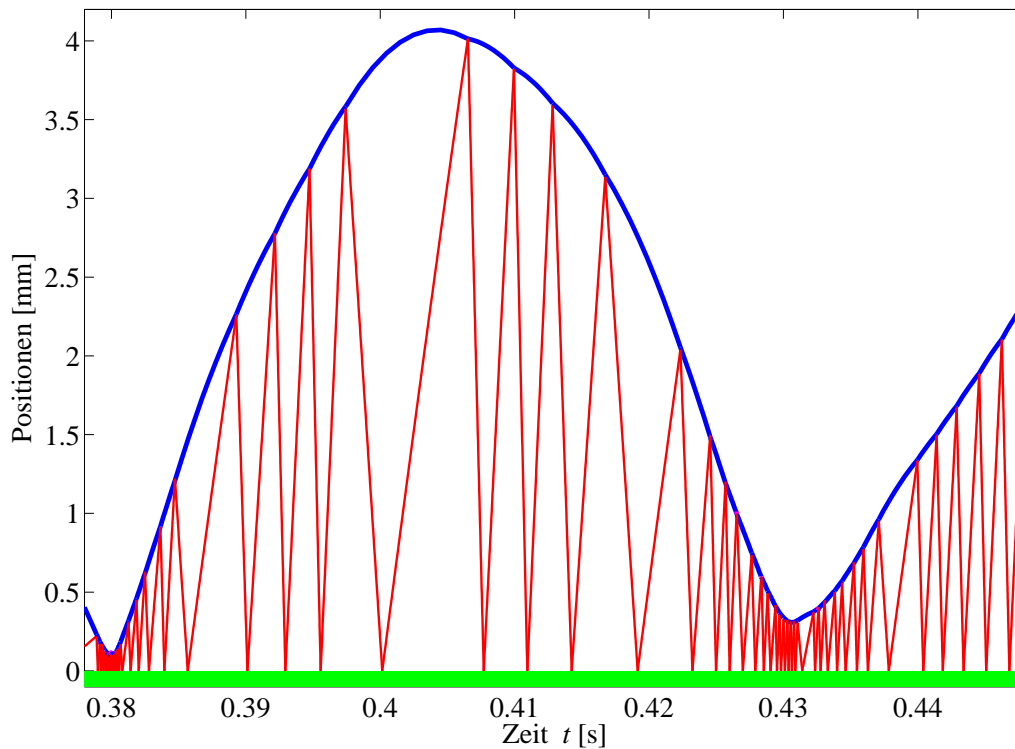


Bild 6.22: Ausschnitt aus einer Zeitreihensimulation: **Oszillator**, **freie Stoßmasse** und **feststehender Bohrer**

zwischen Messung und Modell feststellen. Allerdings muss der Vergleich mit Vorsicht gezogen werden, da die Bedingungen des Gegenpralls am Bohrstab unterschiedlich sind. Das Modell berücksichtigt weder die Wellenausbreitungsvorgänge im Bohrstab, noch dessen Starrkörperbewegungen. Die Vor- und Nachgeschichte der Bewegungsabläufe von Simulation und Messung gleichen sich nicht in gleichem Maße wie die gezeigten Ausschnitte, sondern verlaufen ihren deterministischen Regeln folgend chaotisch. Die mittlere Höhe, in die sich der Oszillator hebt, liegt zwischen Messung und Simulation dicht beieinander. Einen leichten Unterschied gibt es in der Stoßfrequenz. In der Simulation liegt sie — wie auch durchschnittlich im gezeigten Ausschnitt — über der Stoßfrequenz in der Messung. Dies wird auf den Bohrer mit seiner höheren Aufnahmefähigkeit kinetischer Energie und Dämpfung am Untergrund zurückzuführen sein. Die Stoßzahlen des Modells wurden für die Simulation so angepasst, dass die vom Oszillator erreichten mittleren Höhen sich in Messung und Simulation gleichen.

Messungen der Kontaktkräfte des Bohrers in [Potthast et al. 2007a] zeigen, dass die Kraftspitzen und vermutlich die größten Bohrraten dann erfolgen, wenn die Oszillatorposition ein lokales Minimum einnimmt. Dieses Verhalten ist in der Simulation insofern wiederzufinden, als dass die Stoßfrequenz in solchen Phasen Maximalwerte erreicht. Die Mechanismen, die diesem Phänomen jeweils zugrunde liegen, können aber in Realität und Simulation unterschiedliche sein. Im Laborversuch ist es möglich, wenn auch nur für sehr kurze Zeiträume, dass Oszillator, Kugel und Bohrer

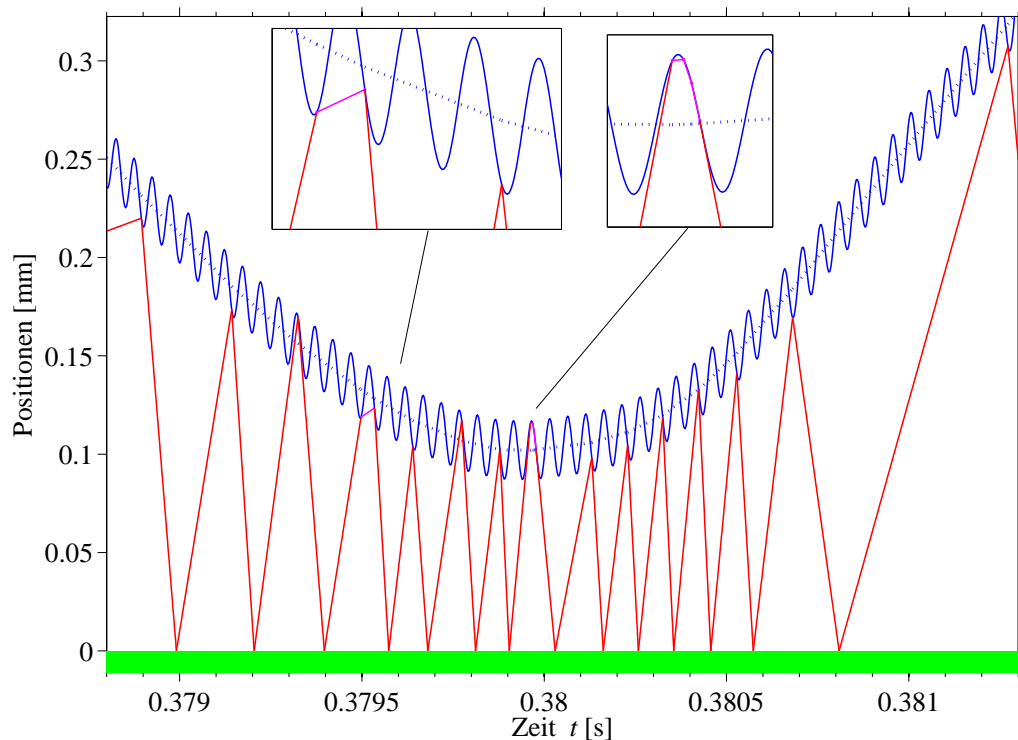


Bild 6.23: Detail aus Bild 6.22 bei $t = 0.38$ s: in dieser Vergrößerung ist die harmonische Schwingung des Oszillators $u(t)$ sichtbar. Die Flugbahn der freien Masse ist lilafarben gezeichnet, während die Stoßmasse einen Mehrfachstoß am Oszillator erfährt.

aufeinander liegen, also alle gleichzeitig die Position 0 m einnehmen. Somit überträgt der schwerere Oszillator seinen Stoßimpuls gelegentlich direkt an den Bohrstab, was die Stoßkraftmaxima in [Potthast et al. 2007a] erklärt. Im Modell hingegen entspricht der Zustand eines Dreierkontaktes dem Flugabstand „Null“, der einem unendlich kleinen zeitlichen Stoßabstand gleichbedeutend ist, was wiederum eine unendlich hohe Stoßfrequenz symbolisiert. Diese Überlegungen würden in der Theorie jedoch nur mit einem nicht-schwingenden Oszillator harmonisieren. Die Schwingungen des Oszillators begrenzen die Dauer solch eines Dreierkontaktes und limitieren auch die Stoßwiederholrate maximal auf die Anregfrequenz.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass zwischen beiden simulierten Modellen und dem realen Verhalten in Laborprüfständen eine große qualitative Übereinstimmung festgestellt wurde. Quantitativ bewegen sich die Zustände in Theorie und Praxis in den gleichen Größenordnungen. In beiden Modellen sind die Stoßzahlen die einzigen Parameter, die im Labor nicht eingestellt oder abgelesen werden können. Eine messtechnische Bestimmung der Stoßzahlen von über 500 Stößen hat eine Streuung der Werte gezeigt. Obwohl im Modell zeitlich konstante Stoßzahlen eingesetzt werden, war es möglich, sie so einzustellen, dass sich die Oszillatorbewegungen in Simulationen und Experimenten in annähernd gleicher Flughöhe bewegen. Der Grund für unterschiedliche Stoßfrequenzen der Stoßmasse im Modell 4. Ordnung und im Ver-

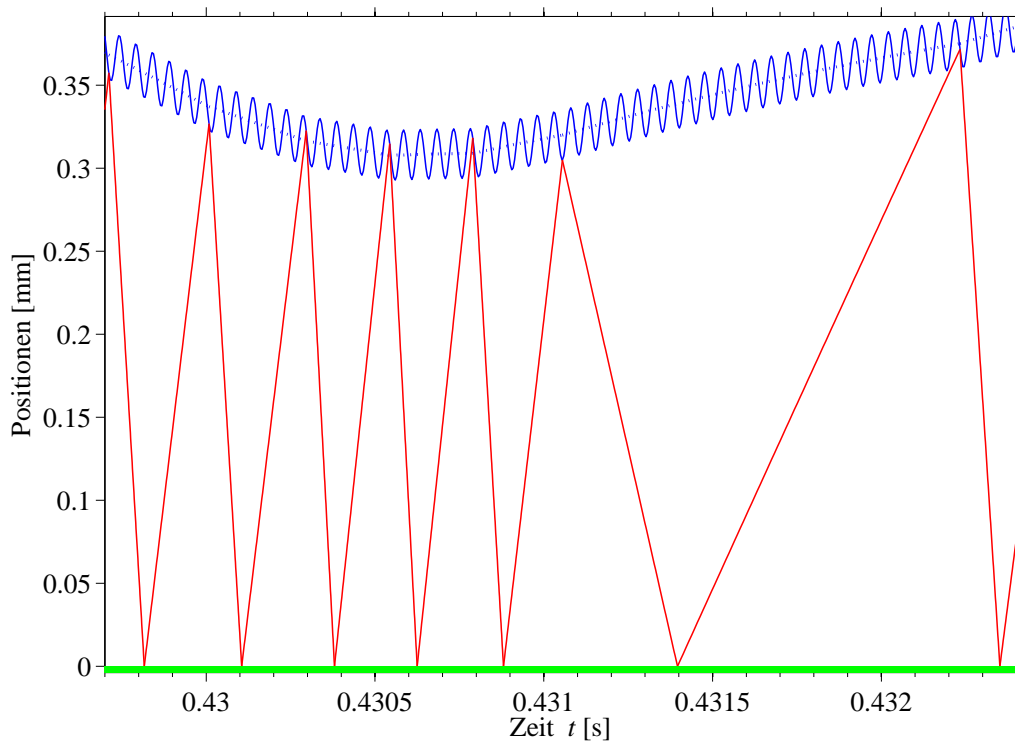


Bild 6.24: Detail aus Bild 6.22 bei $t = 0.43$ ms: durch die hier geringe Höhe des Oszillators über dem Bohrer (Flugabstand für Kugelmasse nur 0.3 mm) erhöht sich die Stoßfrequenz der Kugelmasse auf 3 kHz, wodurch die Fallbewegung des Oszillators gebremst wird.

such am Stoßbohrsystem resultieren aus den verschiedenen Bohrerbedingungen: im Labor war dieser beweglich geführt und konnte somit durch sprunghaftes Ändern seiner Starrkörpergeschwindigkeit im Stoßzeitpunkt mit der Stoßmasse von dieser mehr kinetische Energie abführen als im Modell, in dem der Bohrer als starre, teilelastische Prallplatte modelliert wurde. Für die exakte Abbildung des beweglichen Bohrstabes im Modell könnte eine weitere Verfeinerungsstufe gewählt werden, die aber nicht mehr im Umfang dieser Arbeit lag.

Kapitel 7

Numerische Analyse mit Hilfe der mengenorientierten Methoden

Kapitel 7 behandelt den Schwerpunkt dieser Arbeit, nämlich die Anwendung der *mengenorientierten numerischen Methoden*. Ihr vielversprechender Einsatz wurde bereits durch mehrere Anwendungen der Methoden auf Systeme mit komplizierter Dynamik nachgewiesen. Die zugrundeliegenden Modelle konnten in solchen Fällen durch explizite Bewegungsgleichungen in wenigen Zeilen formuliert werden und waren glatter und kontinuierlicher Art, also ohne sprunghafte Wechsel der Bewegungsgleichungen. Ihre Anwendbarkeit auf diskrete, also nicht-kontinuierliche Systeme bzw. solche mit Sprungphänomenen wurde bislang noch nicht demonstriert. Weiterhin ist die Verwendung bei Modellen mit transzendenten Bewegungsgleichungen nicht bekannt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Einsatz der mengenorientierten Methoden erstmals auf ein nichtglattes, zeitdiskretes System demonstriert und beschrieben. Insbesondere wird ein System aus der Praxis behandelt. Dies stellt bereits an die mathematische Modellbildung hohe Anforderungen, auf die in Kapitel 5 eingegangen wurde.

Kapitel 7 ist in zwei Teile unterteilt. Im ersten Teil wird das Analyseverfahren anhand des Systems 2. Ordnung demonstriert, das in Unterkapitel 5.1 aufgestellt wurde. Dieses bewusst einfach gehaltene und auf zwei Dimensionen beschränkte Modell ermöglicht ein eingehendes Verständnis der Funktionsweise der Methodik. Die Ergebnisse der Analyse lassen sich bequem im 2-dimensionalen Zustandsraum auf der Papierebene darstellen, und die Eigenschaften und Vorteile der Methoden werden daran besprochen.

Der zweite Teil dieses Kapitels demonstriert, wie sich der Einsatz der Methoden auf höherdimensionale Systeme, wie sie der Realität näher kommen, eignet. Hierzu verwenden wir das Modell 4. Ordnung, das in Unterkapitel 5.2 hergeleitet wurde. Seine höhere Dimensionszahl erschwert die Interpretation der Ergebnisse, die nur unter Verwendung geeigneter Projektionen auf die 2-dimensionale Papierebene visualisiert werden können.

7.1 Analyse des Stoß-Modells 2. Ordnung

Die Algorithmen, welche die mengenorientierten Methoden ausmachen, sind alle im Softwarepaket GAIO implementiert [Dellnitz, Froyland, Junge 2001]. GAIO steht für *Global Analysis of Invariant Objects*. Die Software wird in der Arbeitsgruppe „Angewandte Mathematik — Numerische Mathematik und dynamische Systeme“ am Institut für Mathematik der Universität Paderborn entwickelt und stetig erweitert. Die Softwarepakete sind in der Programmiersprache C geschrieben, daher müssen die zu untersuchenden Modellgleichungen in dieser Sprache kodiert werden. Hierfür steht eine Schnittstelle zur Verfügung, in der die rechte Seite des Differentialgleichungssystems erster Ordnung definiert wird. Das geschieht in der C-Funktion „`right hand side`“

```
void rhs(double *x, double *u, double *y).
```

Im Vektor x werden die Zustandsgrößen dem Modell übergeben; der Vektor y wird während der Modellauswertung berechnet und enthält danach den berechneten Zustand einen Zeitschritt dt später (bei kontinuierlichen Modellen) bzw. bei diskreten Modellen einen Iterationsschritt später. Im Kopf der Modell-Datei lassen sich die Modellparameter definieren und Einstellungen vornehmen: hier wird angegeben, um welche Art der Modellbeschreibung (diskrete Abbildungsvorschrift „`map`“ oder kontinuierliches Differentialgleichungssystem „`ode`“) es sich handelt.

7.1.1 Der zylindrische Zustandsraum

An dieser Stelle ist es nötig, den für die vorliegende Art von Schwingstoßsystemen angebrachten Phasen- oder Zustandsraum einzuführen. Der Zustandsraum für den betrachteten Fall hat zwei Dimensionen. Dies sind die Stoßzeit t_k und die Abfluggeschwindigkeit V_k . Man könnte die Zeit herkömmlicherweise auf die Abszisse auftragen und die Geschwindigkeit auf die Ordinate. Ein Systemzustand entspräche einem Koordinatenpunkt in diesem Koordinatensystem und würde durch einen Abbildungsschritt auf einen weiter rechts liegenden Zustand abgebildet werden. Durch diese Darstellungsweise von Zustandspunkten könnte periodisches oder anders strukturelles Verhalten nicht identifiziert werden. Die (Uhr-)Zeit der aufeinanderfolgenden Stoßzustände spielt in der Analyse eine untergeordnete Rolle, nämlich nur zur Bestimmung der Stoßfrequenzen (Stoßwiederholraten); vielmehr ist es entscheidend, in welcher Phasenlage der harmonischen Oszillatorschwingung ein Stoß am Oszillator auftritt. Daher ist es naheliegend, die Stoßzeit t_k [s] mit

$$\tilde{\varphi}_k = t_k \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit} \quad T = 1/f$$

zunächst auf das Winkelmaß $\tilde{\varphi}_k$ [rad] zu konvertieren und dieses dann mit

$$\varphi_k = \tilde{\varphi}_k \text{ modulo } 2\pi$$

auf eine einzige Periodendauer zurückzumodulieren¹. Anstelle des kartesischen Phasenraumes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ benutzen wir folglich den zylindrischen Phasenraum $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, der zur besseren Anschauung in Bild 7.1 skizziert ist. Die Bewegungsgleichung des Systems 2. Ordnung ist eine Abbildung des Zylinders auf sich selbst.

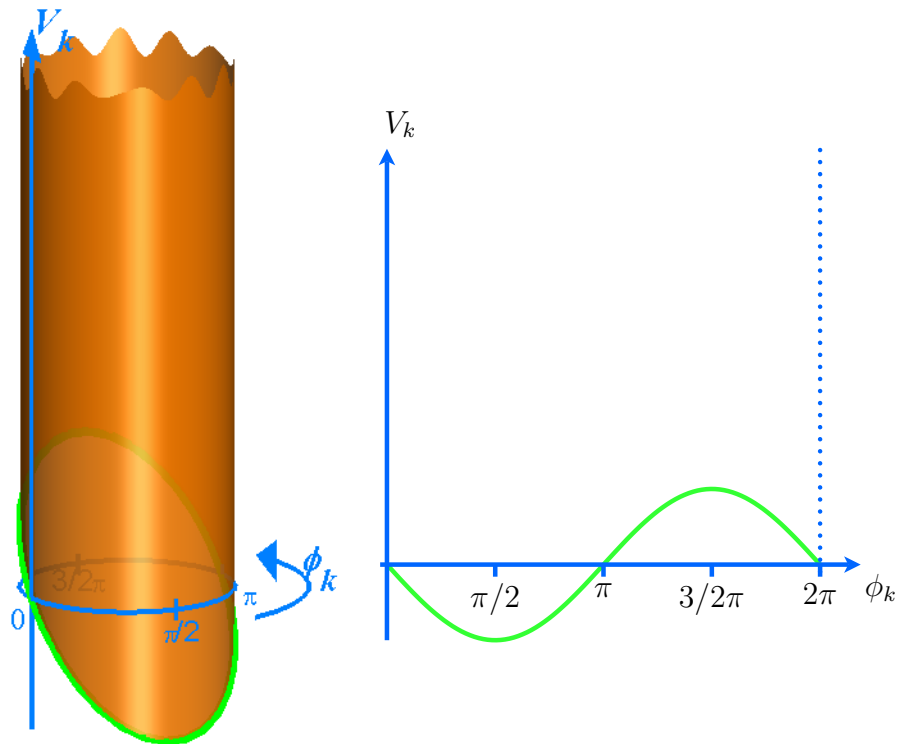


Bild 7.1: Zylinderförmiger Zustandsraum für Phasen- und Geschwindigkeitszustand, nach unten durch grüne Sinuslinie begrenzt. rechts: abgerollter Zustandsraum.

Die topologische „Zylindrisierung“ des Phasenraumes ermöglicht es nun, die Unendlichkeit der zeitlich fortschreitenden Entwicklung innerhalb einer Periodendauer darzustellen. Alle Phasendiagramme zum Modell 2. Ordnung in diesem Unterkapitel nutzen diese Darstellung, bei der sie, aufgeschnitten an der $\varphi \equiv 0$ -Ordinate $\equiv 2\pi$ -Ordinate², flach abgerollt wiedergegeben sind. Der stets in Rechteckform gezeichnete Zustandsraum ist über seine rechte Seite hinaus in seine linke Seite hinein (und umgekehrt) fortgesetzt zu lesen. Somit liegt ein Zustandspunkt an der rechten Seite einem Punkt an der linken Seite sehr nahe. Der abgerollte, flach dargestellte Zustandsraum zeigt sich in der Phasendimension zu beiden Seiten begrenzt. Beim Stoßbohrer ist er außerdem in der Geschwindigkeitsdimension begrenzt: die Ab-

¹Modulofunktion: für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $a \bmod b = \text{Rest von } \frac{a}{b}$; für den vorliegenden Fall ist die allgemeinere Definition nötig: für $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ gilt: $a \bmod b = a - nb$ mit $n = \frac{a}{b}$, wobei n auf die nächst-tiefere ganze Zahl abgerundet werde. In Worten: a modulo b ist der verbleibende Rest, nachdem man b sooft wie möglich (n mal) von a subtrahiert hat, wobei man sich in den positiven reellen Zahlen bewege.

²Ordinate: senkrechte Koordinatenachse, oft „y-Achse“ genannt.

fluggeschwindigkeiten V_k können niemals kleiner als die Oszillatorgeschwindigkeit im Stoßmoment sein. Andernfalls müsste die Stoßmasse nach dem Stoß in den Oszillator eindringen, was physikalisch nicht möglich ist. Die Nicht-Eindringbedingung lautet dementsprechend:

$$V_k \geq -u_0\Omega \sin \Omega t_k. \quad (7.1)$$

Diese untere Schranke ist in Bild 7.1 und in den Zustandsdiagrammen als grüne Kurve eingezeichnet. Sie begrenzt die physikalisch möglichen Zustände nach unten hin. Der gesamte Zustandsraum ist also nur noch nach oben in Richtung $+V_k$ unbeschränkt und ähnelt somit einer Litfaßsäule³ mit schräg abgeschnittenem Boden und unbegrenzter Höhe. Bild 7.1 zeigt diesen sogenannten Zustandsraum, der von

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(\varphi, V) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, -u_0\Omega \sin \varphi < V < \infty\}$$

beschrieben wird. Die Darstellungsweise auf dem Zylinder ermöglicht das Erkennen von Fixpunkten, mehr-periodischen Lösungen und seltsamen Attraktoren.

7.1.2 Bestimmung eines relativen globalen Attraktors

Unterkapitel 2.2 beschreibt, wie sich der relative globale Attraktor eines dynamischen Systems approximieren lässt. Relativ zu einer Untermenge \mathcal{Q} des globalen Zustandsraumes nähert er die attraktive Menge an. Diese umfasst jene Systemzustände, die vom System aufgrund seiner periodischen oder chaotischen Dynamik eingenommen werden können. Folglich bildet ein Attraktor eine Teilmenge des Zustandsraumes. Startet das System mit Anfangsbedingungen, die weit außerhalb des begrenzten Attraktorgebietes liegen, so entwickelt sich das System innerhalb weniger Iterationsschritte hin zum Attraktor, auf dem alle zukünftigen Zustände verbleiben.

Zielsetzung dieser Arbeit ist das Aufzeigen der Analysemöglichkeiten durch Bestimmung relativer globaler Attraktoren $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ mit mengenorientierten Methoden. Für zwei verschiedene Parametersätze wird in diesem und den folgenden Abschnitten das Vorgehen anhand des Systems 2. Ordnung erläutert, das in Bild 5.1, Seite 35, skizziert und in Gleichung (5.9), Seite 38, modelliert ist. Zunächst werden die fünf Parameter wie folgt gesetzt:

u_0	Ω	α_1	α_2	h
$1 \mu\text{m}$	$2\pi \cdot 22 \text{ kHz}$	0.9	0.9	$20 \mu\text{m}$

(7.2)

Der Boxunterteilungs-Algorithmus (siehe Unterkapitel 2.2) zur Annäherung des relativen globalen Attraktors wurde 14 mal angewandt. Das heißt, in jeder Dimension wurde der zu untersuchende Anfangsbereich (Startbox \mathcal{Q} ;) 7 mal unterteilt. Dies führt auf eine Auflösung von 2^{14} Boxen bezogen auf die Startbox. Die 5821 Boxen, die den Attraktor überdecken,

³*Litfaßsäule*: Eine Anschlagssäule, benannt nach dem Berliner Buchdrucker E. Litfaß.

zeigt Bild 7.2. Innerhalb der untersuchten Startbox nimmt der Attraktor etwa 36% der Zustände ein. Hätte man die Startbox zu Beginn in 2^{14} Boxen unterteilt, wären 64% der Zellabbildungen unnötig vorgenommen worden. (Allerdings waren zur Approximation des Attraktors 14 Unterteilungsschritte nötig; in jedem Schritt wurden die vorhandenen Unterboxen untersucht. Dies erhöht die Anzahl abzubildender Boxen.) Zur Abbildung der Boxen wurde ein Gitter mit 30×30 Testpunkten in jede Box gelegt und deren Bildpunkte berechnet.

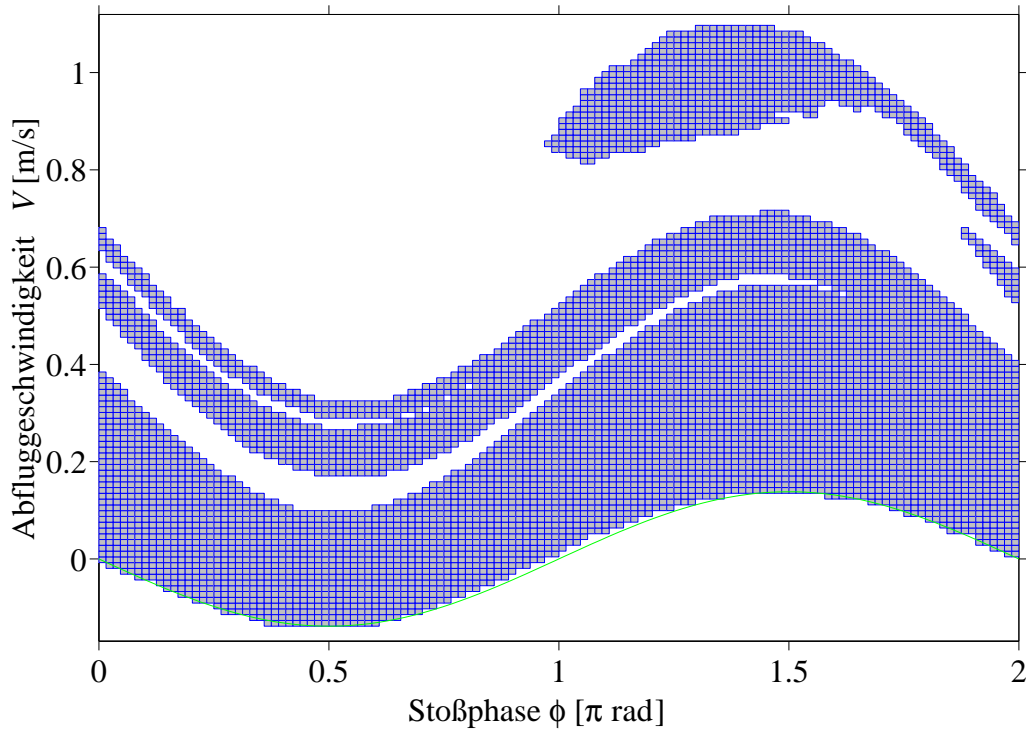


Bild 7.2: Ein relativer globaler Attraktor \mathcal{A}_Q , der nach 14 Unterteilungsschritten durch Überdeckung mit 5821 Boxen angenähert wurde.

7.1.3 Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Im vorigen Abschnitt wurde der globale Attraktor zum Parametersatz (7.2) durch Überdeckung mit Boxen bestimmt. Wir lesen an ihm ab, welche möglichen Zustände das System in seinen sämtlichen, möglichen Bewegungsformen einnehmen kann, nachdem transiente Einschwingvorgänge abgeklungen sind. Im vorliegenden Fall wird ersichtlich, dass Abfluggeschwindigkeiten größer 1.1 m/s nie auftreten. Nachdem wir wissen, welche Zustände vom System während seiner zeitlichen Evolution prinzipiell eingenommen werden, stellt sich die Frage, ob es Prioritäten bezüglich bestimmter Zustände, die dem Attraktor angehören, gibt.

Es ist möglich, die Information, welche Zustände wie wahrscheinlich eingenommen werden, zu erhalten. Anders ausgedrückt lässt sich berechnen, wie oft sich im Durchschnitt jeder Systemzustand einstellen wird. Die Genauigkeit für diese Angabe ist die Feinheit der Boxen. Für jede Box wer-

den wir den Wert ihrer „Aufenthaltswahrscheinlichkeit“ erhalten. Da diese berechnete Information bezüglich der zeitlichen Entwicklung der Dynamik unveränderlich ist, bildet die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ein „invariantes Maß“, siehe Unterkapitel 2.3.

Wie in Unterkapitel 2.3 beschrieben, wird zur Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten die sogenannte *Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix* \mathbf{P} benötigt. Im entsprechenden Abschnitt auf Seite 13 wurde definiert, dass die Übergangswahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der das System innerhalb eines Iterationsschrittes (also von einem Stoß zum nächsten) von einem bestimmten Zustandsbereich in einen anderen (oder den selben) Zustandsbereich wechselt. Jede der Boxen umfasst einen Zustandsbereich. Hier wurden 30^2 Testpunkte auf einem rechtwinkligen Gitter in jeder Box gewählt, um ihr Bild zu approximieren (vgl. schematische Darstellung 2.2, Seite 14). Da jede der 5821 Boxen des relativen globalen Attraktors auf jede andere Box abbilden kann, besitzt die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix die Größe 5821×5821 . Die meisten Boxen bilden nur auf wenige Boxen ab, weshalb viele Einträge der Matrix verschwinden. Die Matrix ist daher dünnbesetzt (engl.: sparse), wofür es spezielle Eigenwertlöser innerhalb der Software MATLAB⁴ gibt. Diese werden genutzt, um die in Gleichung (2.9) formulierte Eigenwertaufgabe zu lösen. Das Ergebnis davon zeigt, dass die hiesige Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix zwei Eigenvektoren \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 mit jeweils dem Eigenwert Eins besitzt. Folglich existieren innerhalb des relativen globalen Attraktors \mathcal{A}_Q für den einen festen Parametersatz zwei Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilungen, die jede für sich für eine eigene Art der Dynamik stehen. Aus der Theorie der Eigenwerte ist aber bekannt, dass jede Linearkombination der zwei Eigenwerte,

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

wiederum einen gültigen Eigenvektor mit Eigenwert Eins liefert. Genau zwei voneinander linear unabhängige⁵ Vektoren dieser unendlich vielen, möglichen *neuen* Eigenvektoren beschreiben die zwei Bewegungsmöglichkeiten. Zwei Bedingungen müssen für diese zwei neuen Eigenvektoren gelten, damit ihre Einträge im Kontext zweier konkurrierender Attraktoren physikalisch sinnvolle Aufenthaltswahrscheinlichkeiten enthalten. Mit Hilfe dieser beiden Bedingungen können die Linearfaktoren α und β bestimmt werden. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass die Einträge \bar{y}_{1k} bzw. \bar{y}_{2k} der Eigenvektoren je eine von zwei möglichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Box \mathcal{B}_k des relativen globalen Attraktors \mathcal{A}_Q enthalten.

Die zwei Bedingungen lauten:

1. Ausschlussbedingung:

Liegt der Systemzustand aufgrund einer Bewegung gemäß des *einen* Attraktors mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit in einer bestimmten

⁴Matlab: Rechenumgebung mit großer Bibliothek numerischer Algorithmen der Firma The MathWorks, Inc., Boston, zur Programmierung sowie numerischen und symbolischen Rechnung mit komplexwertigen Matrizen.

⁵Lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren bedeutet, dass die Vektorpfeile nicht durch Verlängern oder Verkürzen ineinander überführbar sind.

Box, so kann der Systemzustand aufgrund einer Bewegung gemäß des *anderen* Attraktors nie, also mit verschwindender Wahrscheinlichkeit, in dieser Box liegen. Einfacher ausgedrückt: wo der eine Attraktor eine von Null verschiedene und positive Zahl enthält, muss der andere Attraktor eine Null enthalten. Gleiches gilt umgekehrt und muss für jede der N Boxen des relativen globalen Attraktors erfüllt sein. Erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{1k} \neq 0 &\Rightarrow \bar{y}_{2k} = 0 && \text{und} \\ \bar{y}_{2k} \neq 0 &\Rightarrow \bar{y}_{1k} = 0, && k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.3)$$

2. Summenbedingung:

Durch die attraktive Eigenschaft jedes Attraktors befindet sich der Systemzustand (im stationären Verhalten) 100%ig auf dem Attraktor. Da die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand *irgendwo* auf dem Attraktor liegt, gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten aller den Attraktor überdeckenden Boxen ist, gilt immer

$$\sum_k \bar{y}_{ik} = 1, \quad i = 1, 2. \quad (7.4)$$

Weitere Details zur Wahl geeigneter Linearfaktoren sind [Dellnitz & Junge 1999] zu entnehmen.

7.1.4 Analyseergebnisse aus Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Im vorigen Unterkapitel haben wir zwei mögliche Verteilungen der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten auf das in Boxen unterteilte Attraktorengbiet berechnet. Die Resultate haben wir in den Vektoren \bar{y}_1 und \bar{y}_2 abgelegt. Zur Interpretation der Daten werden wir die Wahrscheinlichkeitswerte einer Farbskala zuordnen und die Boxen entsprechend den in \bar{y}_1 bzw. in \bar{y}_2 abgelegten Wahrscheinlichkeitswerten einfärben. Für den in (7.2) gegebenen Parametersatz sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in den Bildern 7.3 bzw. 7.4 gezeigt. Bild 7.3 enthält für beinahe alle Boxen die Nullwahrscheinlichkeit (dunkelblau gefärbte Boxen). Die auftretenden Systemzustände beschränken sich gemäß der Grafik nur auf einen kleinen Bereich des globalen Attraktors um den Zustand 0.96 m/s und 1.24π rad. Nach dem Abklingen instationärer Vorgänge konzentriert sich der Systemzustand nur noch um einen einzigen Punkt, dem er sich spiralförmig asymptotisch nähert. Hierbei handelt es sich um einen *periodischen Punkt*: Stoß für Stoß läuft unter immer wiederkehrend gleichen Bedingungen ab, also bei gleicher Phase und mit gleicher Geschwindigkeit.

Von den Anfangsbedingungen oder Störungen, die auf das System einwirken, hängt es ab, ob die periodische Lösung eingenommen wird oder die, über welche Bild 7.4 Auskunft gibt. Dort sind all jene Boxen eingefärbt, deren Zustände unter der periodischen Bewegung nicht eingenommen werden. Demnach befindet sich der Systemzustand mit unterschiedlicher

Wahrscheinlichkeit auf dem überwiegenden Teil des globalen Attraktors. Im Vergleich der beiden Bilder sehen wir die Erfüllung der Ausschlussbedingung 1, Gleichung (7.3): farbige, nicht dunkelblaue Boxen in Bild 7.3 besitzen in Bild 7.4 Nullwahrscheinlichkeit (dunkelblau und umrandet) und umgekehrt.

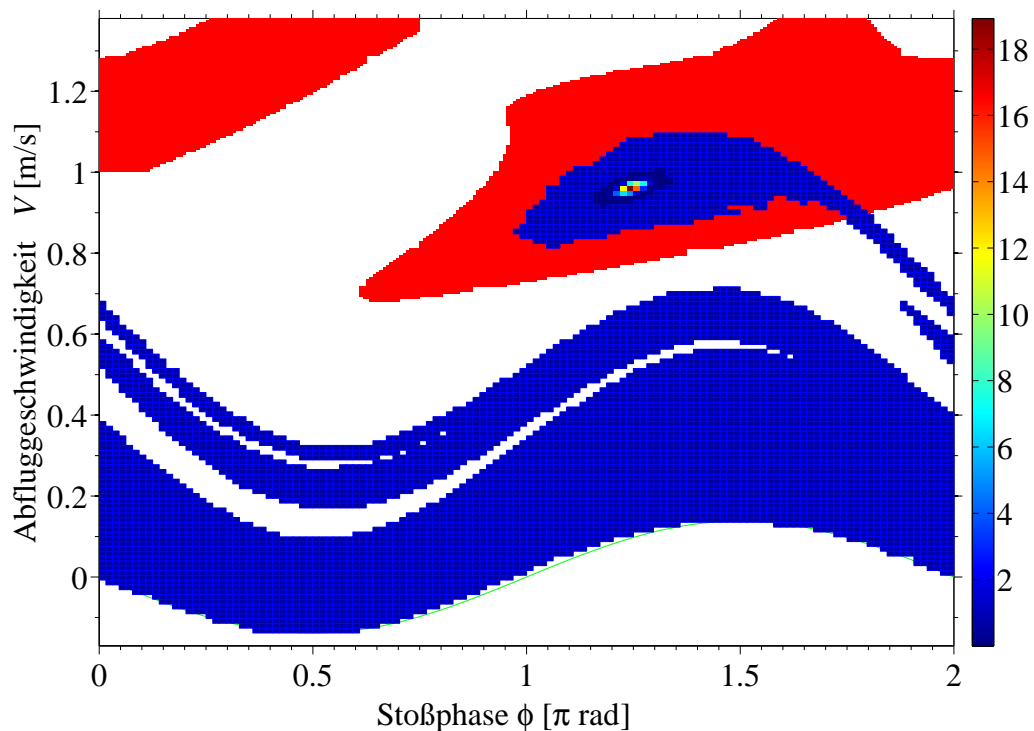


Bild 7.3: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten [%] des *periodischen* Attraktors \bar{y}_1 innerhalb des relativen globalen Attraktors \mathcal{A}_Q . Rot im Hintergrund ist das Einzugsgebiet der periodischen Lösung dargestellt.

Die Ermittlung eines globalen Attraktors und die Berechnung des Aufenthaltswahrscheinlichkeitsfeldes vermittelt neuartige Einblicke in das dynamische Verhalten eines Prozesses. Die komplizierte Dynamik wird in räumlicher und zeitlicher Dimension ausgedehnt berücksichtigt und mit tiefergehender Übersicht visualisiert. Die Begrenzung des globalen Attraktors gibt schnell einen Eindruck der vom System nie eingenommenen Zustände. In Bild 7.4 erkennen wir, dass in einer chaotischen Bewegung nie Abfluggeschwindigkeiten oberhalb von 0.67 m/s zu erwarten sind, und dies ist unabhängig von den Anfangsbedingungen. Unter Berücksichtigung der periodischen Fortsetzung des Zustandsraums in Phasendimension („Zylindrisierung“) erkennt man weiterhin, dass der Attraktor ein zusammenhängendes Gebiet beschreibt. Die Farbkodierung gibt wieder, wie unterschiedlich oft die in Boxen gefassten Bereiche auftreten. Aus diesen Erkenntnissen folgt der Schluss, dass der zweite Attraktor eine deterministisch chaotische Dynamik repräsentiert. Innerhalb des farbigen Gebietes springt der Zustand scheinbar regellos. Doch auch im Chaos gibt es Struktur: Zustände hoher Geschwindigkeiten und Phasen um $3/2\pi$ treten bevorzugt auf. Auf die Anwendung des Stoßbohrers übertragen stehen hohe Stoßgeschwindigkeiten für

große Stoßenergien; die Phase $3/2\pi$ entspricht dem Maximum der Oszillatorschwingungsgeschwindigkeit, welches die hohen Abfluggeschwindigkeiten begründet. Durch Langzeitsimulationen der chaotischen Dynamik wäre diese Struktur nicht erkennbar gewesen; das häufige Auftreten von Zuständen, die den Bohrfortschritt begünstigen, erhält erst in dieser Analyse statistische Quantität.

Eine Bemerkung sei zu den Zahlenwerten der Wahrscheinlichkeitswerte für die einzelnen Boxen gegeben. Die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten infolge der chaotischen Dynamik in Bild 7.4 gibt auf der Farbskala kleine Zahlen wieder. Sie liegen zwischen 0 und 0.14%. Diese Zahlen stehen jede für sich für eine relative Wahrscheinlichkeit. Sie bezieht sich auf die Größe (genauer: das „Volumen“) der einzelnen Box, für die sie gilt. Je kleiner die Box, desto *seltener* fällt der Zustand in *genau den* Zustandsbereich, der von der Box umfasst wird. Dementsprechend kleiner wird der angezeigte Wahrscheinlichkeitswert für diese Box. Durch Erfüllung der Summenbedingung (7.4) ergibt die Integration der Wahrscheinlichkeitsverteilung über den gesamten Zustandsraum stets Eins.

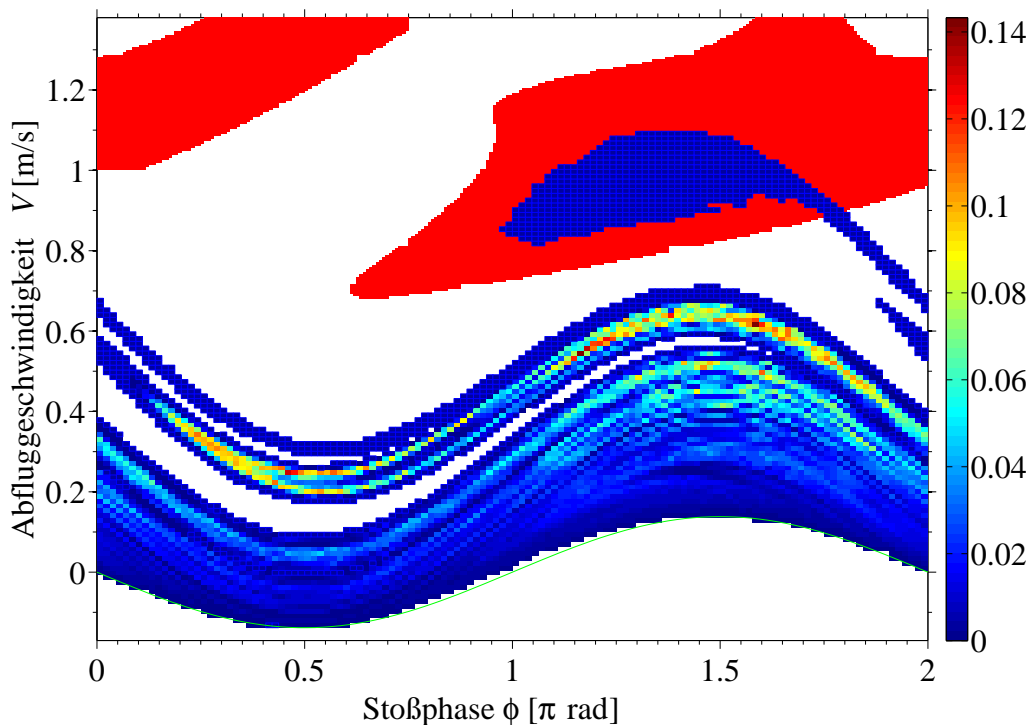


Bild 7.4: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten [%] des *chaotischen* Attraktors \bar{y}_2 innerhalb des relativen globalen Attraktors \mathcal{A}_Q . Der Bereich weißen Hintergrunds markiert das Einzugsgebiet dieses chaotischen Attraktors.

Die bisherigen Ergebnisse wurden mit dem Parametersatz (7.2) erzielt. Im Folgenden wird die Bestimmung des globalen Attraktors und der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten an einem zweiten Parametersatz demonstriert. Die Anregeamplitude u_0 sowie der Flugabstand h werden auf größere Werte gesetzt, die in Unterkapitel 6.2 für Laborversuche und Simulationen einge-

stellt wurden:

Oszillator–		Stoßzahl an		Flug–
Ampl.	Kreisfrequenz	Os.	Bohrer	abstand
u_0	Ω	α_1	α_2	h
$10 \mu\text{m}$	$2\pi \cdot 20.19 \text{ kHz}$	0.6121	0.7879	5 mm

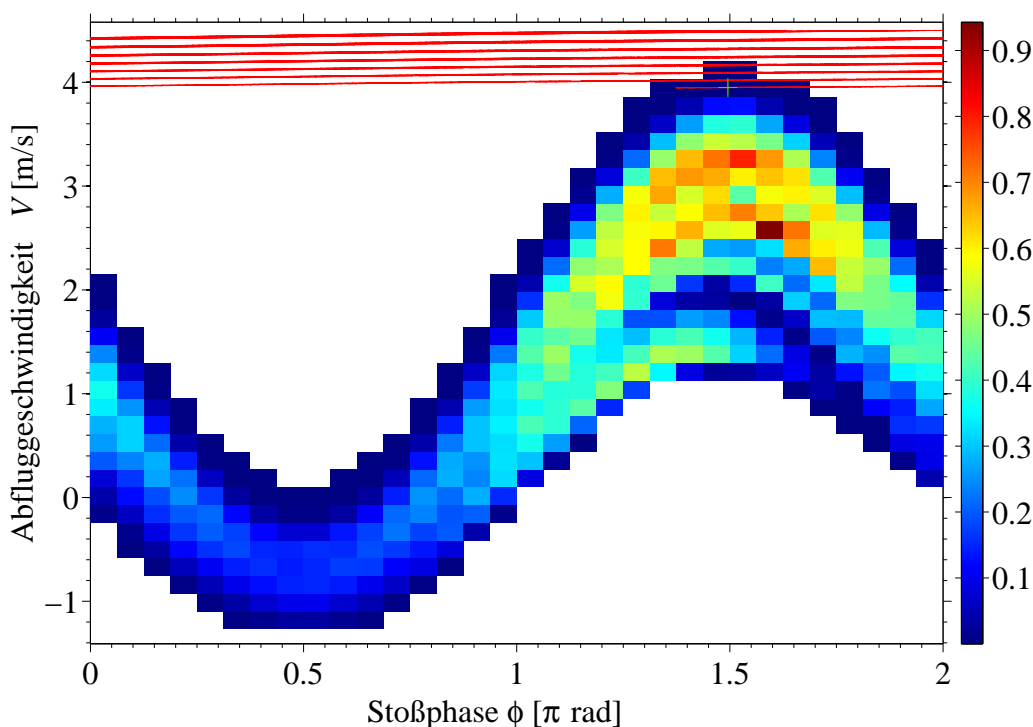
(7.5)


Bild 7.5: Boxüberdeckung des relativen globalen Attraktors für den Parametersatz (7.5). Die Farbkodierung zeigt die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten [%] des chaotischen Attraktors. Darüber liegt in roter Farbe das Einzugsgebiet des periodischen Attraktors, dessen Fixpunkt mit einem $+$ markiert ist.

Bild 7.5 zeigt den durch die Boxüberdeckung angenäherten, relativen globalen Attraktor. Es wurden 10 Unterteilungsschritte angewandt, wodurch der gezeigte Zustandsraumausschnitt in vertikaler und horizontaler Richtung in $2^5 = 32$ Boxen unterteilt ist. Für die Boxabbildungen wurde jeweils ein Gitter von 20×20 Testpunkten in die Boxen gelegt. Der globale Attraktor zeigt, dass sich mit den eingestellten Parametern Geschwindigkeiten über 4.2 m/s im Langzeitverhalten nie beobachten lassen. Die Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten wurde wieder farbkodiert, und es zeigt sich eine Dominanz von Zuständen mit hoher Kugelabfluggeschwindigkeit bei einer Phase um $3/2 \pi$. Bei der Suche nach Lösungen der speziellen Eigenwertgleichung (2.9) $\mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ lässt sich genau ein Eigenvektor \mathbf{y}_1 finden. Er ist in Bild 7.5 durch die Farbwerte dargestellt. Es kann über Trajektorienberechnung für den Parametersatz (7.5) gezeigt werden, dass einer der Fixpunkte stabil ist. Demzufolge ist zu erwarten, dass es einen zweiten Eigenvektor \mathbf{y}_2 gibt, der der Eigenwertgleichung genügt.

Zur Erklärung, warum in dem hier gezeigten Fall kein zweiter Eigenvektor gefunden werden kann, müssen wir das Einzugsgebiet der periodischen Lösung betrachten. Ein Verfahren zur Berechnung von Einzugsgebieten wird im folgenden Abschnitt erläutert. In Bild 7.5 ist das Einzugsgebiet der periodischen Lösung rot über den Attraktor gelegt. Nehmen wir an, es existiere ein Eigenvektor \bar{y}_2 , der $\bar{y}_2 = \mathbf{P} \bar{y}_2$ erfüllt und dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stabilen, periodischen Lösung entspricht. Nehmen wir weiter an, der Fixpunkt der periodischen Lösung befände sich innerhalb der Box Nr. j . In guter Näherung wäre folglich zu erwarten, dass $y_{2,j} = 1$, denn sämtliche (oder die meisten) Testpunkte aus der Box Nr. j werden erwartungsgemäß in Box Nr. j hinein abbilden. Anders ausgedrückt erwartet man, dass das Bild der Box Nr. j innerhalb dieser Box selbst liegt. Der Eintrag $p_{j,j}$ auf der Hauptdiagonalen in der Zeile j der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix wäre dann $p_{j,j} = 100\%$. Voraussetzung für die getroffenen Annahmen der Selbstabbildung ist, dass die Box mit dem Fixpunkt vollständig innerhalb des Einzugsgebietes der periodischen Lösung liegt. Der stabile Fixpunkt ist in Bild 7.5 durch ein $+$ markiert. Das rot dargestellte Einzugsgebiet der periodischen Lösung besitzt für den aktuellen Parametersatz eine filigrane Struktur, die sich als dünne Fäden beschreiben lässt, die sich spiralförmig um den Zylinderzustandsraum herum winden und dabei wiederholt teilen. Das Einzugsgebiet ist im Bereich des Fixpunktes so dünn, dass es einen großen Teil der Box mit dem Fixpunkt nicht abdeckt. Infolgedessen liegt ein Großteil der Bildpunkte aus dieser Box innerhalb des chaotischen Attraktors, weshalb $y_{2,j} \ll 1$ gilt und kein Eigenwert \bar{y}_2 existiert. Der globale Attraktor muss in einem solchen Fall durch häufigere Boxunterteilungen in wesentlich feinere Boxen unterteilt werden, um die zweite Eigenlösung finden zu können.

Zur globalen Analyse des Stoßsystems 2. Ordnung wurden relative globale Attraktoren berechnet. Für Parametersätze, bei denen innerhalb des berechneten Attraktors zwei Lösungen — eine chaotische und eine periodische Bewegung — existieren, wurde eine Boxüberdeckung des Attraktors gezeigt. Durch Berechnen der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilungen für die Boxmenge des Attraktors wurden in einem Fall beiden Lösungen statistische Informationen hinzugefügt, im anderen Fall wurde gezeigt, dass sehr hohe Boxauflösungen notwendig sein können.

Aus der statistischen Verteilung der Zustände auf dem chaotischen Attraktor ließ sich eine Grenzgeschwindigkeit ablesen, oberhalb derer das System im stationären Verhalten nie existieren wird. Die Geschwindigkeiten der periodischen Punkte sind größer als die Grenzgeschwindigkeit der chaotischen Attraktoren. Hieraus resultiert für die Praxis, dass eine Betriebsart des Bohrersystems mit periodischem Stoßverhalten für eine große Bohrrate anstrebenswert ist. Die in der Praxis beobachteten Bohrerfolge [Bar-Cohen et al. 2001a] lassen sich aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zustände auf dem chaotischen Attraktor erklären: die Wahrscheinlichkeit für Zustände von großer Stoßmassengeschwindigkeit (woraus eine hohe Abbaurate folgt) ist wesentlich höher als für die übrigen Bereiche des At-

traktors.

7.1.5 Analyseergebnisse aus Einzugsgebieten

Im vorigen Abschnitt studierten wir das Lösungsverhalten zu Parametersätzen, bei denen zwei Lösungen nebeneinander existieren. Offen war, unter welchen Bedingungen das System welche Lösung einnimmt. Von Interesse ist ferner, welche Wahrscheinlichkeit dem Erreichen der periodischen und welche der chaotischen Lösung zuzuordnen ist, wenn man das Schwingstoßsystem unter nicht festgelegten oder zufälligen Bedingungen betreibt.

Um auf die Fragestellungen einzugehen, wollen wir die *Einzugsgebiete*⁶ der jeweiligen Lösungen ermitteln. In den vorigen drei Bildern wurden die Einzugsgebiete in roter Farbe in die Zustandsdiagramme mit hineingezeichnet. Verantwortlich dafür, nach welcher der möglichen stabilen Lösungen sich das Systemverhalten richtet, ist alleine die Anfangsbedingung, bei der das System startet, bzw. die das System als Trajektorie durchläuft. Das Einzugsgebiet einer Lösung beschreibt genau jenes Gebiet von Anfangsbedingungen im Zustandsraum, von denen aus das System in diese Lösung „eingezogen“ wird. Der Zustandsraum eines Systems, dessen Parametersatz zwei koexistierende Lösungen besitzt, lässt sich in genau zwei zusammenhängende Gebiete unterteilen.

Einige transiente Trajektorien, die von Startzuständen aus dem Einzugsgebiet nahe um den Fixpunkt herum ausgehen, sind in Bild 7.6 zu sehen. Sie zeigen auch die Entstehung des Punktes an der Parameterstelle $h = 5.00066$ mm am rechten Rand im Bifurkationsdiagramm Bild 6.13. Dort war zu sehen, dass bei nur minimal größerem Abstand h die periodische Lösung abrupt verschwindet und ganz der chaotischen Bewegung weicht.

Um das Einzugsgebiet etwa der periodischen Lösung zu ermitteln, könnte man einen großen Teil des gesamten Zustandsraumes in kleine Unterboxen einteilen (diskretisieren) und für jede der Unterboxen bestimmen, ob sie Teil des Einzugsgebietes ist. Hierzu könnte man eine oder mehrere Trajektorien mit Startbedingungen aus der Unterbox heraus iterieren und jeweils ihren Verlauf untersuchen. Nähert sich die Mehrheit der Trajektorien aus einer Unterbox asymptotisch dem Fixpunkt der periodischen Lösung, so weist man diese Unterbox dem Einzugsgebiet der periodischen Lösung zu. Die verbleibenden Unterboxen sind folglich dem Einzugsgebiet der chaotischen Lösung zuzurechnen.

Das geschilderte Verfahren ist ein mögliches, jedoch für hohe Detailgenauigkeit ein sehr rechenaufwändiges. Auf der Grundlage des oben beschriebenen Boxunterteilungsalgorithmus der mengenorientierten Methoden wurde der Fortsetzungsalgorithmus `gum` („global unstable manifold“) entwickelt, der innerhalb der Software `GAIO` implementiert ist

⁶Einzugsgebiet: engl.: *basin of attraction* oder *domain of attraction*

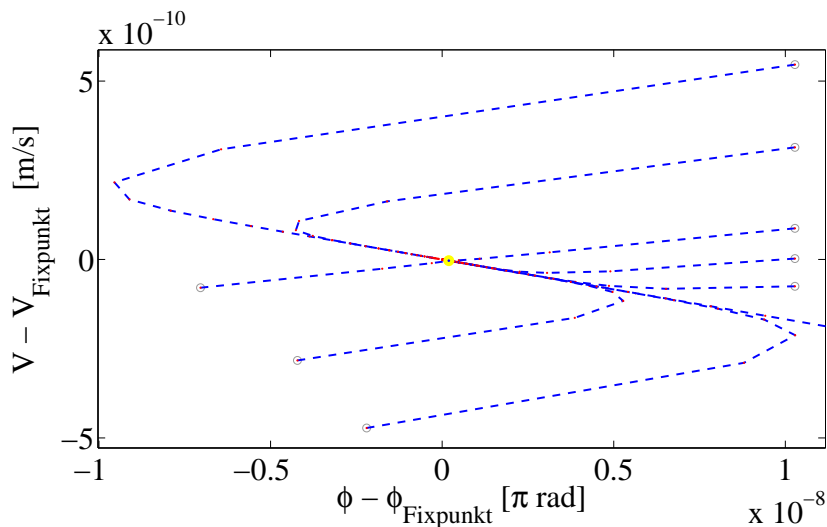


Bild 7.6: Transiente Trajektorien für 1-periodische Lösung von verschiedenen Anfangszuständen des 1-periodischen Einzugsgebietes ausgehend

[Dellnitz, Froyland, Junge 2001]. Er nähert das Einzugsgebiet als instabile Mannigfaltigkeit per Rückwärtsiteration durch eine Boxmenge an. Für die Rückwärtsiteration der Abbildungsvorschrift ist das Aufstellen der Umkehrabbildung \mathbf{T}^{-1} notwendig, was nicht in allen Fällen oder nur unter großem Aufwand möglich ist.

Zum Berechnen der instabilen Mannigfaltigkeit wird der betrachtete Zustandsraum zunächst in Zustandsboxen diskretisiert. Sodann fügt man diejenige Box, die den Fixpunkt enthält, zur bislang noch leeren Boxmenge des Einzugsgebietes hinzu. Ausgehend von dieser Box wird die Mannigfaltigkeit durch Fortsetzung bestimmt. Dies geschieht in zwei Schritten, die wiederholt ausgeführt werden:

1. Rückwärtsabbildung derjenigen Boxen, die im letzten Schritt neu zur Boxmenge hinzugekommen sind.
2. Hinzufügen derjenigen Boxen zur Boxmenge, in denen wenigstens ein Bildpunkt eines Testpunktes aus einer der Abbildungen von Schritt 1 liegt und die noch nicht der Boxmenge angehören.

Der Algorithmus stoppt selbständig, sobald keine neuen Boxen mehr hinzugefügt wurden.

Bild 7.7 zeigt die auf diese Weise approximierten Einzugsgebiete für die periodische (rotes Gebiet) und die chaotische Lösung (weißes Gebiet). Stellt man sich das Einzugsgebiet um den zylinderförmig dargestellten Zustandsraum (Bild 7.1) herum gelegt vor, so fällt auf, dass beide Zustandsgebiete aus einem *zusammenhängenden* Gebiet bestehen. Zur leichteren Betrachtung der zylindrischen Fläche des Zustandsraumes in der Papierebene ist das Zustandsgebiet in der Abbildung über drei Zyklen fortgesetzt dargestellt.

Wie bereits die chaotischen Attraktoren des hier untersuchten Systems nach genügend vielen Boxunterteilungen zeigen, besitzt auch das Einzugs-

gebiet der periodischen Lösung Züge fraktaler Gebilde, wenn man auf die selbstähnliche Fortsetzung schaut: der Beginn der Entstehung des Gebietes

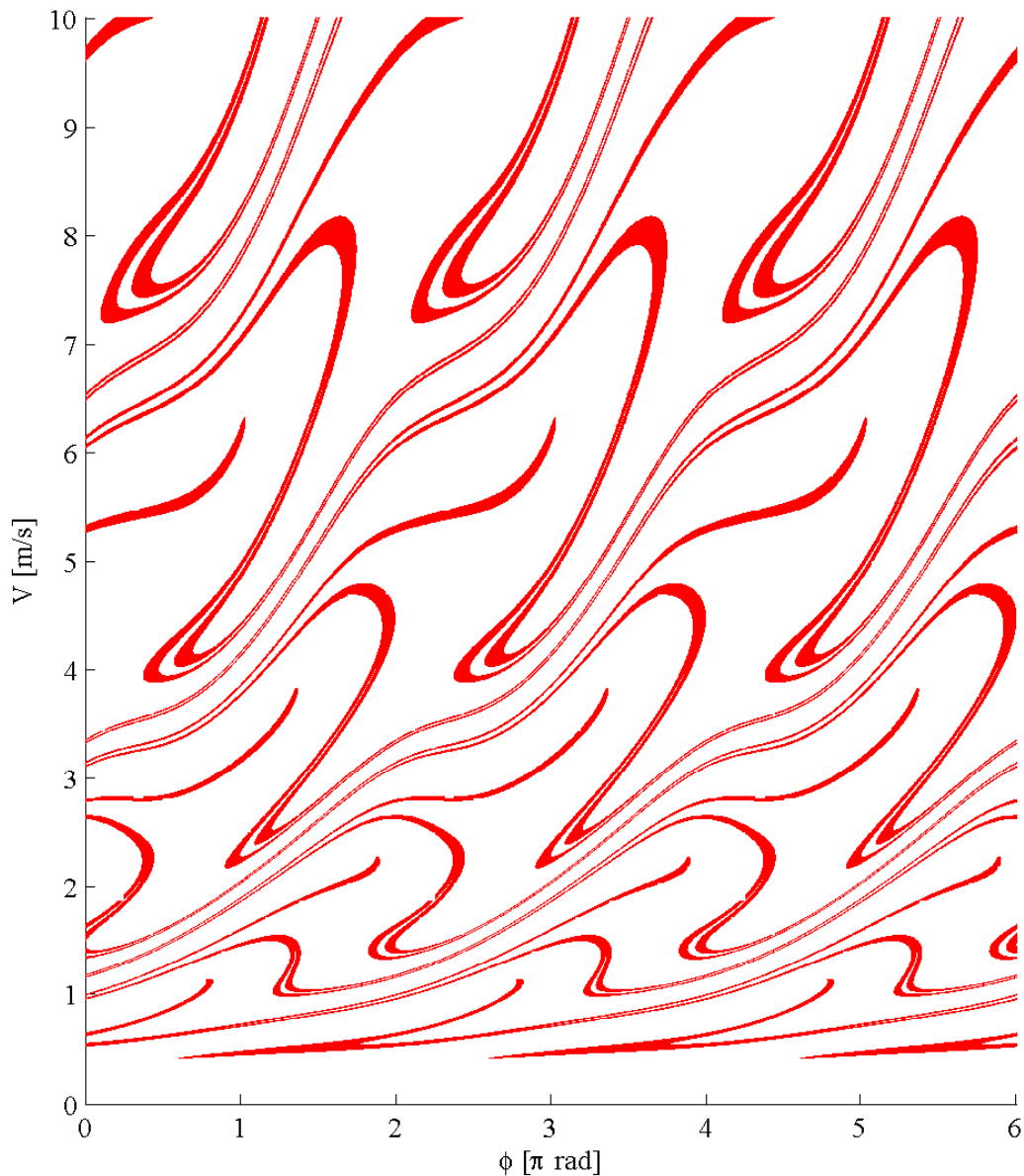


Bild 7.7: Einzugsgebiet zu chaotischer (weiß) und zu periodischer (rot) Lösung

liegt im Bereich des Fixpunkts. Das rotgefärbte Einzugsgebiet entwickelt sich in positiver Drehrichtung spiralförmig um den Zustandsraumzylinder herum weiter. Für ansteigende Phase verzweigt es sich fortwährend in zwei Äste, von denen der obere Ast größerer Abfluggeschwindigkeit wenig später endet und der untere Ast sich wiederholt verzweigt.

Um auf die Frage der Wahrscheinlichkeit des Erreichens der einen oder anderen Lösung zu antworten, nehmen wir uns das Einzugsgebiet zu Hilfe: die Wahrscheinlichkeit, mit der die periodische Lösung bei zufälliger Anfangsbedingung erreicht wird, gleicht dem Flächenanteil, den das dunkle

Einzugsgebiet am gesamten Zustandsraum hat. Da sich dieser in positive V -Richtung des Zustandsraumes ins Unendliche ausdehnt, ist ein begrenzter Bereich zu wählen, innerhalb dessen die flächenmäßige Aufteilung der Einzugsgebiete gewertet wird.

Für das in Bild 7.7 dargestellte Einzugsgebiet ist die Wahrscheinlichkeit, von einem rot gefärbten Zustand aus zu starten, 7.89%, wohingegen ein Anfangszustand mit komplementären 92.11% im hellen Teil beginnen wird. Die hohe Wahrscheinlichkeit, bei nicht exakt steuerbarem Ausgangszustand in den chaotischen Attraktor hineinzulaufen, liefert eine weitere Erklärung dafür, dass in der Praxis nie reguläre Bewegungen beobachtet wurden.

Die Ermittlung der Einzugsgebiete der einzelnen, koexistierenden Attraktoren ist ein wichtiger Bestandteil einer umfassenden Systemanalyse. Sie liefert ein Maß für die Wahrscheinlichkeiten, mit der die einzelnen Attraktoren bei einem Iterationsstart mit zufälligen Anfangsbedingungen erreicht werden. Es wurde gezeigt, dass die Einzugsgebietsberechnung für Schwingstoßsysteme sehr effizient durch die Anwendung eines Box-Fortsetzungsalgorithmus durchgeführt werden kann.

7.2 Analyse des Stoß-Modells 4. Ordnung

Dieses Unterkapitel enthält die Untersuchung des Modells 4. Ordnung mit den mengenorientierten numerischen Methoden. Im ersten Abschnitt wird wieder eine Startbox im Zustandsraum gewählt und ihr relativer globaler Attraktor bestimmt. Der zweite Abschnitt bespricht die Analyseergebnisse, die aus der Bildung der Attraktoren abgeleitet werden können.

7.2.1 Approximation des relativen globalen Attraktors

Wie für das zuvor behandelte, einfachere Modell sollen auch anhand des deutlich komplexeren Modells 4. Ordnung die mengenorientierten Methoden demonstriert werden, um Informationen über die globale Dynamik des Systems zu gewinnen. Wieder wird der in GAIO implementierte rga-Algorithmus (Boxunterteilungsalgorithmus) zur Bestimmung relativer globaler Attraktoren auf die in C-Code übersetzte Modelldatei angewendet. Wir verwenden für sämtliche Analysen innerhalb dieses Unterkapitels die selben System- und Prozessparameter, die in Unterkapitel 6.4 benutzt wurden:

Oszillator-		Stoßzahl an		Massen-	Beschleunigung aus	
Ampl.	Frequ.	Osz.	Bohrer	verhältn.	Anpresskraft	Gravitat.
u_0	f	α_1	α_2	$M/m = \mu$	F_A/M	g
15 μm	20.19 kHz	0.5	0.6	$\frac{264.7\text{ g}}{2.0\text{ g}}$ = 132	$\frac{3\text{ N}}{0.2647\text{ kg}}$ = 11 m/s^2	9.81 m/s^2

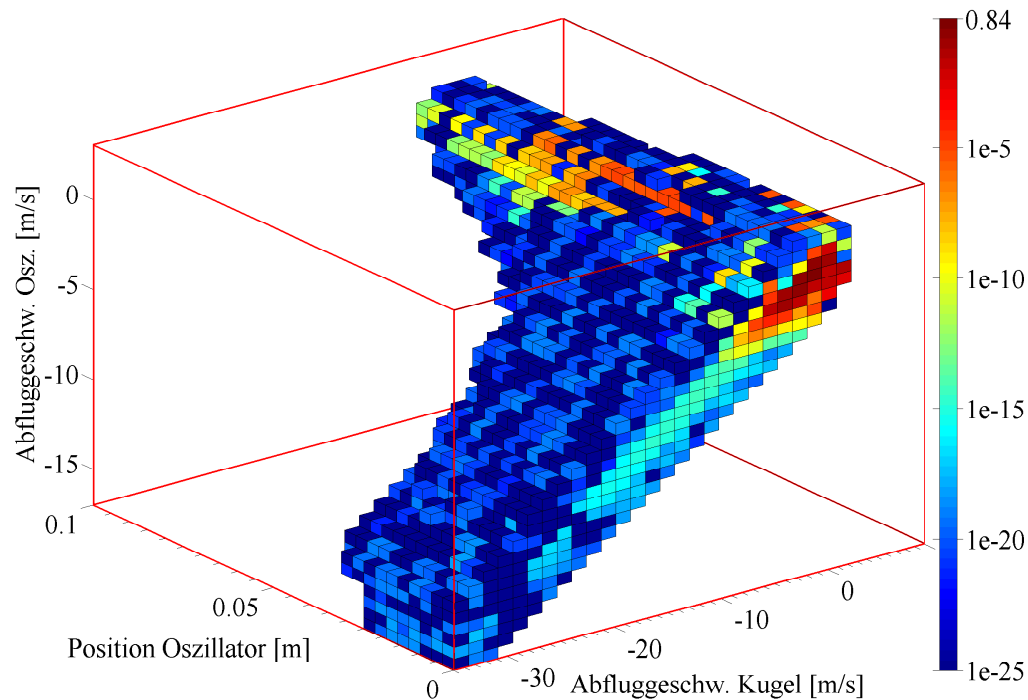


Bild 7.8: Projektion der Boxüberdeckung des relativen globalen Attraktors \mathcal{A}_Q nach 21 Unterteilungsschritten in den $\dot{y}-x-\dot{x}$ -Raum mit Farbkodierung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in [%].

Für die schrittweisen Boxunterteilungen innerhalb des `rga`-Algorithmus wurden für alle in diesem Unterkapitel gezeigten Rechnungen die Unterteilungsrichtungen zyklisch durch alle 4 Zustandsdimensionen gewechselt in der Reihenfolge $\phi - \dot{y} - x - \dot{x}$. Zur approximativen Abbildung der 4-dimensionalen Boxen wurden jeweils $3^4 = 81$ Testpunkte mit der Option „MonteCarlo“ innerhalb der Boxen einschließlich ihres Randes zufallsverteilt. Diese Testpunktanzahl zeigte sich als hinreichend groß für die Annäherung des dynamischen Verhaltens. Gleichzeitig blieb die Rechenzeit in einem akzeptablen Rahmen. Die gewählte, 4-dimensionale Startbox Q wurde in allen Bildern durch einen roten Rahmen angedeutet. In der Phasendimension überdeckte sie stets den gesamten Zustandsbereich $\phi \in [0, 2\pi]$.

Zur Erläuterung der Analyse eines Systems 4. Ordnung werden auf diesen Seiten exemplarisch einige Ergebnisse dargestellt: Bild 7.8 zeigt die Ausdehnung der Boxmenge nach 21 Unterteilungsschritten. Durch die zyklische Permutation der Unterteilungsrichtungen wurden die Boxen somit 6-mal in ϕ -Richtung und 5-mal in den 3 übrigen Dimensionen zweigeteilt.

In Bild 7.8 ist ersichtlich, dass die Boxmenge den Rand der Startbox Q in negative \dot{x} -Richtung und in negative \dot{y} -Richtung tangiert. Es scheint naheliegend zu sein, die Startbox in diesem Beispiel größer zu wählen, um die globale Dynamik zu beschreiben. Jedoch liegt die Ursache für die Randberührung in der langsamen Konvergenz dieses Systems.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, um solch einem Systemverhalten zu begegnen. Das Vorgehen, eine wesentlich größere Anzahl an Unterteilungsschritten zu durchlaufen, ist aus praktischen Gründen begrenzt. Durch die

langsame Konvergenz fallen die transienten Boxen nur sehr langsam weg und müssen sehr oft mitunterteilt werden. Dies führt zu sehr hohen Boxzahlen und hohem Speicherbedarf sowie großer Rechenzeit.

Alternativ wäre es denkbar, eine *adaptive Boxunterteilungsstrategie* anzuwenden: dabei wird das invariante Maß berechnet und Boxen mit einem Maß unter dem Durchschnittswert aller Boxmaße werden nicht unterteilt bzw. Boxen, deren Maß unter einem gewählten Schwellenwert liegt, werden aus der Menge gelöscht.

Eine weitere Möglichkeit, mit langsamer Konvergenz umzugehen, ist die Folgende. Anstatt für die Iterationsvorschrift die einfache Abbildungsvorschrift \mathbf{T} anzuwenden, kann die Iterationsschrittweite auf einen Wert größer Eins gesetzt werden. Für das betrachtete System wurde die Schrittweite auf 5 gesetzt. Somit wurde die Abbildung \mathbf{T}^5 betrachtet, die eine schnellere Konvergenz zum invarianten Maß besitzt als die ursprüngliche Abbildung \mathbf{T}^1 . Die Bilder 7.11 und 7.12 zeigen eine Attraktorüberdeckung nach 22 Unterteilungsschritten für die Abbildung \mathbf{T}^5 desselben Systems mit denselben Parametern.

Der folgende Abschnitt erläutert dieses Vorgehen.

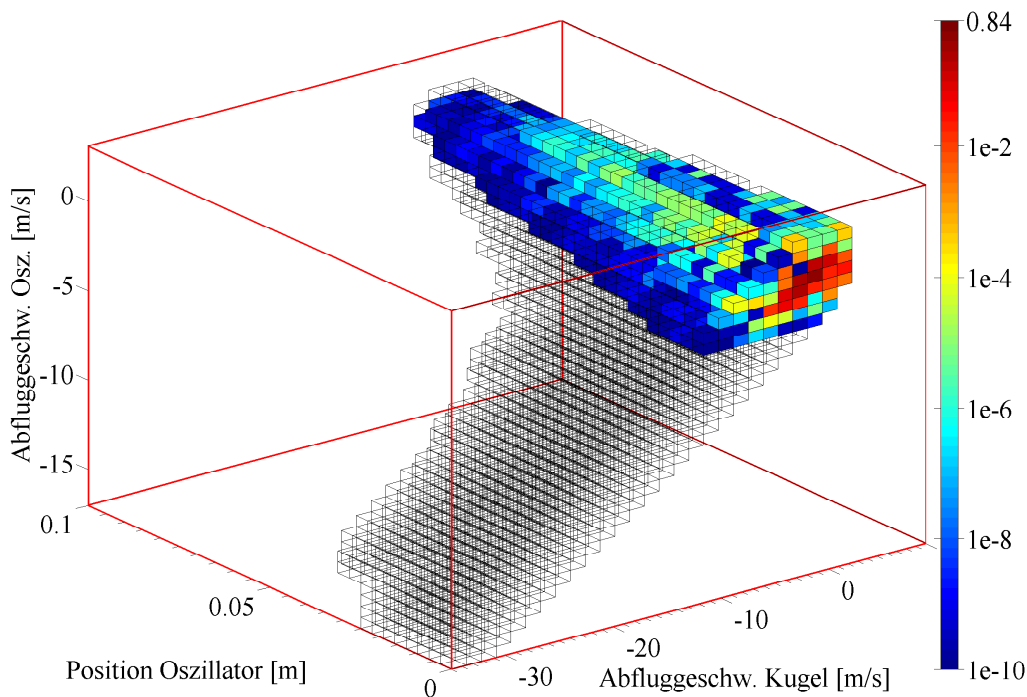


Bild 7.9: Ausblenden transienter Boxen des Attraktors aus Bild 7.8.

7.2.2 Analyseergebnisse und Diskussion

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Berechnung von invarianten Mengen, den relativen globalen Attraktoren des Modells 4. Ordnung, erläutert. Da das System im 4-dimensionalen Zustandsraum definiert ist, besitzt auch die Gestalt der Attraktoren 4 Dimensionen. Für die grafische Darstellung der Attraktoren auf einem 2-dimensionalen Medium (Papier, Bildschirm) oder

3-dimensional perspektivisch muss der Attraktor zwei- bzw. einmal entlang einer Zustandsgröße projiziert werden. Dies erschwert die Auswertung, da bei der Betrachtung der projizierten Gestalt Informationen vernachlässigt werden müssen. Daher muss überlegt werden, entlang welcher Achse projiziert werden soll.

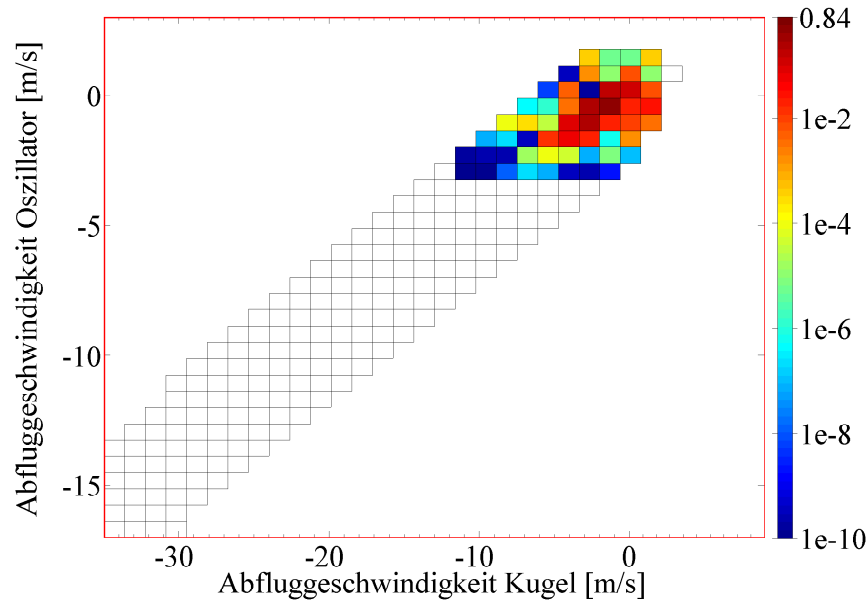


Bild 7.10: 2D-Ansicht der Attraktordarstellung aus Bild 7.9, farbkodierte Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in [%].

Zum Erkennen der dynamischen Eigenschaften des Bohrer-Modells ist die zeitliche Information, die Auskunft über die Phasenlage ϕ_k der Stoßkontakte gibt, im Vergleich zu den drei anderen Zustandsgrößen entbehrlich. Integriert man die 4-dimensionalen Boxen des Attraktors über eine Periodendauer, erhält man eine 3-dimensionale Abbildung des Attraktors. Bild 7.8 zeigt das Resultat dieses Vorgehens. Die Boxmenge approximiert einen Bereich im Zustandsraum. Zur Quantifizierung des dynamischen Verhaltens auf der Boxmenge wurde wie für das System 2. Ordnung die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix berechnet und deren Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert, der fast Eins ist, numerisch berechnet. Nach einer Normierung, so dass die Summe aller Eigenvektoreinträge Eins ergibt, stellen die Eigenvektorelemente die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Systems für jede Box dar. In den dargestellten Boxüberdeckungen innerhalb dieses Unterkapitels sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeitswerte durch eine Farbkodierung den Boxen zugeordnet, wobei die Skalenwerte auf den Farbskalen stets in der Einheit [%] angegeben sind. Durch die logarithmische Skalierung der Wahrscheinlichkeitswerte auf der Farbskala werden die um einige Größenordnungen unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten deutlich. Blaue bis grüne Farbtöne stehen für sehr kleine Wahrscheinlichkeiten von etwa $10^{-25}\%$ bis $10^{-10}\%$. Da Langzeititerationen zeigen, dass Geschwindigkeitsbeträge von Oszillator bzw. Kugel größer 3 m/s bzw. 10 m/s nicht zu erwarten sind, zeigt Bild 7.9

die gleiche Boxüberdeckung wie in Bild 7.8, jedoch sind hier nur Boxen mit Wahrscheinlichkeiten über dem Schwellenwert von $10^{-10}\%$ dargestellt. Die verbleibenden Boxen stellen eine bessere Annäherung an die invariante Mannigfaltigkeit des Systems, die die Langzeitdynamik beschreibt, dar. In der Seitenansicht von Bild 7.9, die in Bild 7.10 gezeigt ist, lässt sich erkennen, dass sich im stationären Systemverhalten nie Kugel- oder Oszillatorabfluggeschwindigkeiten größer 2 m/s in positive Richtung (sich vom Bohrstab entfernend) ergeben. In Richtung auf den Bohrstab (in negative Koordinatenrichtung) liegen die maximalen Geschwindigkeiten im Bereich um 8 m/s bzw. 2.5 m/s. Aus den maximalen Geschwindigkeiten lassen sich für das betrachtete Anwendungsbeispiel des Stoßbohrsystems maximale Stoßenergien ableiten und über das invariante Maß gewichten.

Im vorigen Abschnitt wurde auf die Tangierung des Startboxrandes durch die Boxmenge eingegangen. Ausblenden der Boxen, die aufgrund ihres Wahrscheinlichkeitsmaßes der transienten Menge zugeordnet werden können, war eine Maßnahme, um das stationäre Verhalten der langsam konvergenten Menge anzunähern. Die zweite, hier umgesetzte Maßnahme ist die Untersuchung einer mehrfach Iterierten der einfachen Abbildung. Bei fünffacher Iteration der Testpunkte bildet die in den Bildern 7.11 und 7.12 dargestellte Boxüberdeckung eine Annäherung an die invariante Menge. Die Boxmenge in Bild 7.11 zeigt einen sehr schmalen Bereich um große, negative Geschwindigkeiten herum. Es lässt sich daraus ablesen, dass hohe Geschwindigkeiten sowohl von der Kugel als auch vom Oszillatorschwerpunkt nur in direkter Nähe zum Bohrstab (bei minimaler Position x) auftreten können. Die größten auftretenden Abstände x von Kugel und Oszillator vom Bohrstab im Stoßaugenblick liegen im Bereich von 2 cm. Kleinere Flughöhen sind jedoch um Größenordnungen wahrscheinlicher.

Die Ursache der abgeflachten Seite der Attraktormenge in Richtung $-x$ liegt in der Bedingung $x_k - u_0 \cos \Omega t_k > 0$, nach der die Kugel und der Oszillator nicht in den Bohrstab eindringen können. Diese Bedingung stellt eine Grenzebene Γ_1 in diesem projizierten Zustandsraum dar:

$$\Gamma_1 = \{(\dot{y}, x, \dot{x}) | x = u_0\} .$$

Eine weitere, schräg liegende Ebene Γ_2 begrenzt die Boxmenge in Richtung $+\dot{y}$ und $-\dot{x}$ durch die Nichteindringbedingung von Kugel und Oszillator direkt nach einem Stoß:

$$\Gamma_2 = \{(\dot{y}, x, \dot{x}) | \dot{x} - u_0 \Omega = \dot{y}\} .$$

Bild 7.12 zeigt die Projektion derselben Boxmenge wie in Bild 7.11 in den ϕ - \dot{y} - \dot{x} -Raum. Im Unterschied zum Ergebnis der chaotischen Bewegung des Systems 2. Ordnung lässt sich hier ablesen, dass keine Phasenlage ein prädestinierter Stoßzustand ist. In dieser Ansicht lässt sich wieder die Information gewinnen, dass Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten kleinerer Geschwindigkeiten von Kugel und Oszillator hoch sind. Die Boxmenge in dieser Projektion wird wegen der Nichteindringbedingung nach unten durch

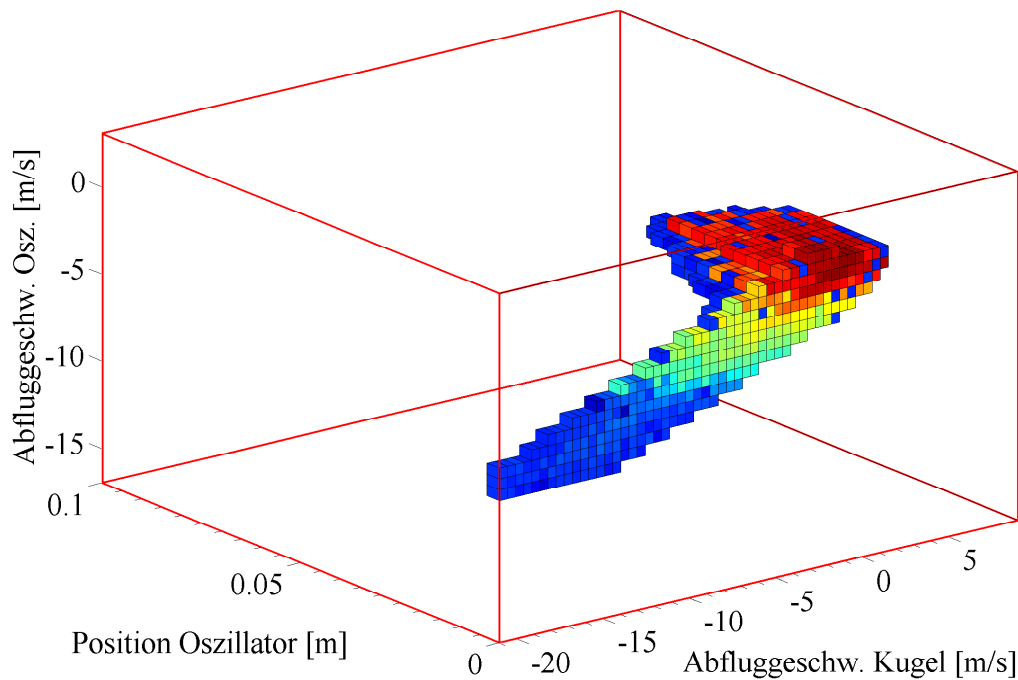


Bild 7.11: Projektion des relativen globalen Attraktors \mathcal{A}_Q der fünffach iterierten Abbildung \mathbf{T}^5 in den $\dot{y} - x - \dot{x}$ -Raum. Blau-grüne Einfärbungen der Boxen entsprechen kleiner, rot-braune Farben entsprechen großer Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Systems in der jeweiligen Box.

die Fläche

$$\Gamma_3 = \{(\dot{y}, x, \dot{x}) | \dot{x} + u_0 \Omega \sin \Omega t = \dot{y}\}$$

begrenzt, was die sinuswellenförmige Gestalt der Boxmenge begründet. Zustände jenseits der Grenzebenen Γ_1 , Γ_2 oder Γ_3 können physikalisch nicht auftreten.

Die Berechnung von relativen globalen Attraktoren des Systems 4. Ordnung ermöglicht die Identifizierung struktureller Systemeigenschaften des Langzeitverhaltens. Statistische Eigenschaften können als invariantes Maß auch für höherdimensionale Systeme aus Eigenvektoren berechnet werden. Sie stellen eine weitere Information zur Bewertung des Attraktorgebietes auf der Boxmenge dar. In Kombination mit adaptiven Algorithmen können Verfahren angewendet werden, um die Approximation invarianter Mengen langsam konvergenter Systeme zu beschleunigen.

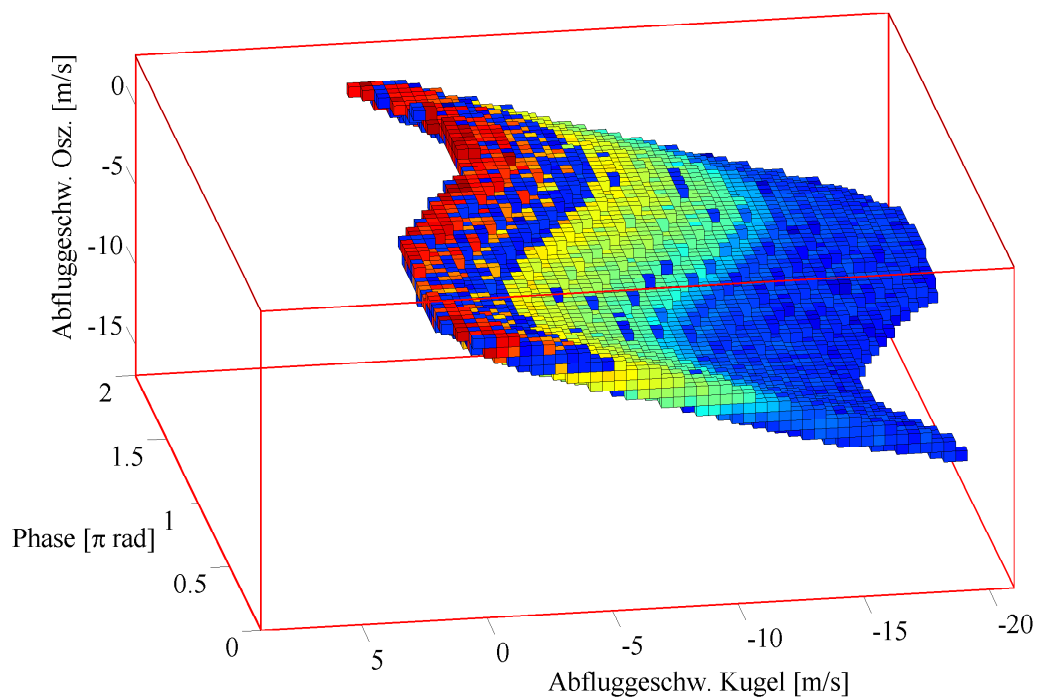


Bild 7.12: Projektion des relativen globalen Attraktors \mathcal{A}_Q der fünffach iterierten Abbildung \mathbf{T}^5 in den ϕ - y - x -Raum. Blaue Boxen entsprechen einem kleinen, rot-braune Boxen einem großen Wahrscheinlichkeitsmaß.

Kapitel 8

Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit stand die Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme — im speziellen die Beschreibung und Analyse nichtglatter Systemdynamik — im Mittelpunkt. Für diese Aufgabe, die für Ingenieure aller Fachrichtungen ein wichtiges Thema darstellt, sollte der Einsatz einer neuartigen Methodenklasse, der „mengenorientierten numerischen Methoden“, geprüft und demonstriert werden. Diese Methoden hatten sich bereits vielfach im Einsatz auf nichtlineare Systeme bewährt. Für die Klasse der nichtglatten dynamischen Systeme war in dieser Arbeit zu untersuchen, inwiefern sie sich für deren Analyse eignen. Exemplarisch für eine Vielzahl von Schwingstoßsystemen wurde eine vor wenigen Jahren entstandene Entwicklung eines Stoßbohrsystems für sprödharte Stoffe wie Gestein herangezogen. Dieses System zeichnet sich durch seinen einfachen Aufbau aus und wird dennoch von einer hochkomplexen Dynamik beherrscht. Weiterhin motivierte die Erlangung von tiefergehendem Verständnis des dynamischen Verhaltens des Bohrprozesses die Untersuchung dieses Systems, welches in der Literatur bisher nur in wenigen Arbeiten behandelt wurde.

Zur mathematischen Beschreibung des Systemverhaltens waren geeignete Modelle zu bilden. Zur Validierung der theoretischen Simulationen waren Prüfstände mit Laborprototypen aufzubauen und mittels geeigneter Messverfahren Zeitreihen der Stoßmassendynamik aufzunehmen.

Zentrale Komponente dieses Systems ist eine Stoßmasse, die mit Frequenzen im Schallbereich zwischen einem Bohrstab und einem Ultraschall-Oszillator Flugbewegungen ausführt. Die zum Gesteinsbohren nötige Stoßenergie wird von der Stoßmasse in ihrer Intensität und Frequenz transformiert. Im Zentrum der Untersuchung stand die Bewegungsanalyse dieser Stoßmasse.

Für das Erreichen der Ziele wurde das Stoßbohrsystem in zwei Schritten untersucht: zunächst wurde die Dynamik des Systems in ihrer Komplexität reduziert, indem die Annahme getroffen wurde, dass nur die Stoß-

masse Bewegungen ausführen kann. Das reduzierte System wurde aufgrund der Stoßkontakte als zeitdiskretes dynamisches System mathematisch modelliert. Differenzgleichungen 2. Ordnung wurden hergeleitet und ein spezieller Algorithmus zur Lösung der impliziten, transzendenten Modellgleichungen aufgestellt. In einem zweiten Schritt wurde das Modell verfeinert, um die Dynamik des beweglichen Ultraschalloszillators mit einzubeziehen. Dies führte auf ein verfeinertes Differenzgleichungssystem 4. Ordnung.

Das Verhalten beider Systeme wurde sowohl in der Praxis als auch in der Theorie untersucht. Ein Laborprüfstand wurde für das reduzierte System entwickelt und aufgebaut. Mit verschiedenen berührungslosen Messverfahren wurden Zeitreihen des realen Verhaltens aufgenommen. Techniken aus dem Gebiet der nichtlinearen Dynamik wurden angewandt sowie Fixpunkte und periodische Lösungen bestimmt, in Zeitreihen wurden periodische mit chaotischen Lösungen verglichen, Bifurkationsanalysen stabiler periodischer Lösungen wurden für verschiedene Systemparameter durchgeführt, und ein Einzugsgebiet der periodischen Lösung wurde berechnet.

Bestätigt und ergänzt durch diese Grunduntersuchungen wurden mithilfe der mengenorientierten numerischen Methoden relative globale Attraktoren und Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilungen auf diesen Attraktoren bestimmt. Aufbauend auf einem Boxunterteilungsalgorithmus, auf dem die mengenorientierten Methoden basieren, wurde ein Algorithmus zur Berechnung von Einzugsgebieten der periodischen Lösungen implementiert, mit dem instabile Mannigfaltigkeiten der Umkehrabbildung des Systems iteriert wurden.

8.2 Diskussion der Ergebnisse

Die Anwendung der mengenorientierten numerischen Methoden hat verdeutlicht, dass diese Techniken zur Analyse nichtglatter Systeme der Stoßdynamik eine wichtige und sinnvolle Ergänzung der bisherigen „klassischen Methoden“ bilden. Es hat sich gezeigt, dass die mengenorientierten Ansätze dafür keiner Anpassung bedürften. Allerdings ist eine besondere, zeitdiskrete Modellierungsweise, die dem nichtglatten Systemcharakter gerecht wird, nötig. Sofern die Beschreibung der Bewegungsabläufe mit Differenzgleichungssystemen möglich ist, kann der mengenorientierte Ansatz angewendet werden, ohne Anpassungen für Stoßsysteme vornehmen zu müssen. Gezeigt wurde die Bestimmung relativer Attraktoren, die ein komplettes Bild der gesamten Systemdynamik liefern, ohne dass eine Vorkenntnis über das Systemverhalten nötig ist. Der Nachweis von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten über die Attraktorenzustände war für nichtglatte Systeme möglich. Fixpunkte, die durch Attraktoren lokalisiert werden konnten, wurden für eine Robustheits- und Parameterstudie einer Verzweigungsanalyse unterzogen. Dabei hat sich gezeigt, dass periodische Lösungen nur auf einem sehr schmalen Parameterintervall existieren und durch Periodenverdoppelungsbifurkationen ins Chaos übergehen.

Besonderen Wert zeigen die Methoden beim Ermitteln des stationären Langzeitverhaltens. Die exponentielle Divergenz benachbarter Lösungen

erschwert aufgrund der begrenzten Rechenpräzision den iterativen Einsatz von Integrationsmethoden. Hier liefern die mengenorientierten Methoden einen wichtigen Beitrag, da sie das Langzeitverhalten ausschließlich durch Ein-Schritt-Integrationen (im Fall langsamer Konvergenz diskreter Systeme kann die Iterationsschrittweite geringfügig erhöht werden) ermitteln.

Für das konkrete Beispiel eines Ultraschall-Stoßbohrers mit eindimensionaler Bewegung einer Stoßmasse und doppelseitigem Stoßkontakt wurde eine Modellierungstechnik dargestellt, die allein auf Differenzgleichungen beruht. Die Technik ist auch anwendbar auf ähnliche Systeme, in denen es sinnvoll ist, von Stoß zu Stoß zu iterieren. Beispielsweise resultierte aus der Analyse, dass in der stationären, chaotischen Bewegung nur Geschwindigkeiten unterhalb eines Grenzbereichs erreicht wurden. Die Betrachtung der statistischen Ergebnisse offenbarte, dass Zustände hoher Geschwindigkeit im System 2. Ordnung dominieren und trägt somit zur Erklärung des Funktionsprinzips des Bohrsystems bei.

Periodische Lösungen konnten nur am reduzierten Modell 2. Ordnung gezeigt werden. Sie besaßen für alle untersuchten Parameterkombinationen eine größere Energieübertragungsleistung als chaotische Lösungen, was aus den höheren Abfluggeschwindigkeiten der Stoßmasse bei periodischem Verhalten hervorgeht.

In der Analyse dieses Bohrsystems hat sich gezeigt, dass eine große Sensibilität bezüglich der Systemparameter besteht. Einige Parameterbereiche konnten gefunden werden, innerhalb derer verschiedene Lösungen nebeneinander koexistieren können. So wurden mehrfach-periodische Lösungen neben chaotischen nachgewiesen. Eine große Streuung der Stoßzahlen, die in Versuchen beobachtet wurde, trug dazu bei, dass periodische Lösungen in der Praxis nicht auftreten konnten. Der Grund hierfür liegt in der starken Abhängigkeit des Lösungstypus (irregulär/regulär) von den Stoßzahlen.

Weiterhin zeigte die Berechnung von Einzugsgebieten, dass bei zufälligen Anfangsbedingungen die Wahrscheinlichkeit für chaotische Bewegung sehr groß ist.

Die Auswertung experimenteller Daten bestätigte eine Hypothese, die der Modellbildung zugrunde lag. Es wurde angenommen, dass die Resonanzlängsschwingungen des Oszillators vor jedem Stoß ihre maximale Resonanzamplitude besitzen. Die beim Stoß übertragene Schwingungsenergie war in einem Bruchteil der Stoßmassenflugzeit wieder der Schwingungsform zugeführt worden, so dass sich die stationäre Schwingung wieder vor dem nächsten Stoß einstellen konnte.

Die Analyse des verfeinerten Systems 4. Ordnung resultierte in einer begrenzten Boxmenge, aus der die transienten Boxen durch Berechnung eines invarianten Maßes herausgefiltert wurden. So konnten die möglichen Systemzustände unter der chaotisch-deterministischen Langzeitdynamik als stationäre, invariante Menge extrahiert werden.

8.3 Ausblick

Die mengenorientierten numerischen Methoden liefern einen wichtigen Beitrag nicht nur für die Systemanalyse nichtlinearer Systeme, sondern können auch das Systemverständnis nichtglatter Systeme verstärken. In der vorliegenden Arbeit wurde ein reduziertes System in 2 Dimensionen und ein verfeinertes System in 4 Dimensionen analysiert. Das verfeinerte System beanspruchte deutlich mehr Rechenleistung, was darauf zurückzuführen ist, dass die beobachteten Mannigfaltigkeiten die volle Systemdimension beibehalten. Für die vorliegenden Untersuchungen wurden zur Überwindung der langsamen Konvergenz des Systems dessen Mehrfachiterierte untersucht. Zur Anwendung der mengenorientierten Methoden wird es hilfreich sein, das Konvergenzverhalten realer Systeme - insbesondere langsam konvergenter Systeme - unter verschiedenen Kombinationen von Parametern wie Anzahl der Testpunkte, Boxunterteilungstiefen oder Iterationsschrittweiten exemplarisch zu betrachten.

Zwei mechanische Ersatzsysteme wurden aus dem Ultraschall-Bohrsystem zur Untersuchung abgeleitet. Zeitreihensimulationen und Poincaré-Portraits beider Modelle als auch Laboruntersuchungen an realen Systemen wiesen im Einklang mit mengenorientierten Analysen eine starke Dominanz von chaotischem Verhalten nach. Im Zuge einer Optimierung der Bohrfortschrittsgeschwindigkeit wäre es denkbar, eine Regelung zu entwerfen, die das System in periodischen Zustand führt. Auf die Nichtvorhersagbarkeit der Stoßzahlen und die hohe Störanfälligkeit der periodischen Lösungen wäre hierbei zu achten.

Literaturverzeichnis

- [Abraham & Shaw 2000] Ralph H. Abraham, Christopher D. Shaw, 2000: *Dynamics — the geometry of behavior. Part I, Periodic Behavior* — 4th ed., ISBN 0-942344-18-9, Aerial Press. [21](#)
- [Babitsky 1998] Vladimir I. Babitsky (Babickij), 1998: *Theory of Vibro-Impact Systems and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. [28](#)
- [Badescu et al. 2005] Badescu, M., Bao, X., Bar-Cohen, Y., Chang, Z., Sherrit, S.: *Integrated Modeling of the Ultrasonic/Sonic Drill/Corer — Procedure and Analysis Results*. In Proc. SPIE Smart Struct. Conf., San Diego, CA., SPIE Vol. 5764-37, Marc 7-10, 2005. [5](#), [29](#)
- [Bar-Cohen et al. 2001a] Yoseph Bar-Cohen, Stewart Sherrit, Benjamin P. Dolgin, Xiaqi Bao, Zensheu Chang, Dharmendra S. Pal, Ron Krahe, Jason Kroh, Shu Du and Thomas Peterson, 2001: *Ultrasonic/sonic drilling/coring (USDC) for planetary applications*. In Proceedings of SPIE's 8th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials, March 5-8, 2001, Newport. [18](#), [67](#), [93](#)
- [Bar-Cohen et al. 2001b] Bar-Cohen, Y., Sherrit, S., Dolgin, B., Bridges, N., Bao, X., Chang, Z., Yen, A., Saunders, R.: *Ultrasonic/Sonic Driller/Corer (USDC) as a sampler for planetary exploration*. In IEEE Aerospace Conference on the topic of *Missions, Systems and Instruments for In Situ Sensing* (Session 2.05), March 10-17, 2001 Big Sky, Montana. [18](#), [29](#)
- [Brockhaus 1989] Brockhaus, Naturwissenschaften und Technik, Band 3. Brockhaus GmbH, Wiesbaden, 1989. [5](#)
- [Brogliato 1996] Bernard Brogliato, 1996: *Nonsmooth Impact Mechanics. Models, Dynamics and Control*. Springer-Verlag London Limited, 1996. [28](#), [30](#), [36](#)
- [Dellnitz & Hohmann 1997] Dellnitz, M. and Hohmann, A., 1997: *A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors*. In Numerische Mathematik Vol. 75, No. 3, Seiten 293-317. [8](#)
- [Dellnitz & Junge 1999] Michael Dellnitz, Oliver Junge, 1999: *On the approximation of complicated dynamical behavior*. SIAM Journal on Nu-

merical Analysis, Vol. 36, No. 2, Seiten 491-515, Society for Industrial and Applied Mathematics. [89](#)

[Dellnitz, Froyland, Junge 2001] Dellnitz, M., Froyland, G. and Junge, O., 2001: *The algorithms behind GAIO — Set oriented numerical methods for dynamical systems*. In B. Fiedler: Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Simulation of Dynamical Systems. Seiten 145–174, Springer-Verlag, Berlin. [8](#), [10](#), [12](#), [84](#), [95](#)

[Dellnitz & Junge 2002] Michael Dellnitz and Oliver Junge, 2002: *Set oriented numerical methods for dynamical systems*. In B. Fiedler, G. Iooss and N. Kopell (eds.): Handbook of Dynamical Systems III: Towards Applications. World Scientific. [8](#), [9](#), [10](#), [17](#)

[Goldschmidt 2003] Stefan Goldschmidt, 2003: *Anwendung mengenorientierter numerischer Methoden zur Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme am Beispiel der Spurführungsdynamik von Schienenfahrzeugen*. In Jörg Wallaschek (Hrsg.): Heinz Nixdorf Institut-Verlagsschriftenreihe, Band 112. Dissertation Universität Paderborn. [8](#)

[Guckenheimer & Holmes 1983] John Guckenheimer and Philip J. Holmes, 1983: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York. [29](#), [36](#), [38](#)

[Holmes 1982] Philip J. Holmes, 1982: *The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table*. In Journal of Sound and Vibration, Vol. 84, No. 2, Seiten 173-189, Academic Press Inc., London. [29](#), [36](#), [38](#)

[Hsu 1980] Chieh-Su Hsu, 1980: *A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems*. In Journal of Applied Mechanics, Vol. 47: Seiten 931-939. ASME, Transactions; American Society of Mechanical Engineers, Winter Annual Meeting, Chicago, Ill., Nov. 16-21, 1980. [4](#), [26](#)

[Hsu 1981] Chieh-Su Hsu, 1981: *A generalized theory of cell-to-cell mapping for nonlinear dynamical systems*. In Journal of Applied Mechanics, Vol. 48: Seiten 634-642. [26](#)

[Hsu 1987] Chieh-Su Hsu, 1987: *Cell-to-Cell Mapping. A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems* In Applied Mathematical Sciences, Vol. 64, Springer-Verlag, 1987. [8](#), [26](#)

[Hsu 1992] Chieh-Su Hsu, 1992: *Global analysis by cell mapping*. In International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 2, No. 4, Seiten 727-771, World Scientific Publishing Company. [26](#)

[Kraker, van der Spek und van Campen 1999] Bram de Kraker, Jeroen A. W. van der Spek and Dick H. van Campen, 1999: *Extensions of Cell Mapping for Discontinuous Systems*. In Applied Nonlinear Dynamics and Chaos of Mechanical Systems with Discontinuities, Chapter 4, Seiten 61–102, Editors: Marian Wiercigroch, Bram de Kraker; In World

-
- Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 28, Series Editor: Leon O. Chua, 2000. [27](#)
- [Leine et al. 2000] Remco I. Leine, D. H. van Campen and B. L. van de Vrande, 2000: *Bifurcations in Nonlinear Discontinuous Systems*. In: Nonlinear Dynamics, Vol. 23, Seiten 105-164, Kluwer Academic Publishers, Niederlande, 2000. [28](#)
- [Leine & Nijmeijer 2004] Remco I. Leine and Nijmeijer, H., 2004: *Dynamics and Bifurcations in Non-Smooth Mechanical Systems*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol. 18, Berlin, Heidelberg, New-York, Springer-Verlag. [28](#)
- [Lorenz 1963] Edward N. Lorenz, 1963: *Deterministic Nonperiodic Flow*. In Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 20, No. 2, 130-141, März 1963. Ref. aus: Wikipedia, Stand 29. Juni 2007. [21](#)
- [Mello, Tuffillaro 1985] T. M. Mello and N. B. Tuffillaro, 1985: *Strange attractors of a bouncing ball*. In Am. J. Phys. Vol. 55, No. 4, American Association of Physics Teachers, 1987. [29](#), [36](#)
- [Nayfeh 1995] Ali Hasan Nayfeh and Balakumar Balachandran, 1995: *Applied nonlinear dynamics. analytical, computational and experimental methods*. Wiley Series in Nonlinear Science. John Wiley & Sons, Inc., New York. [23](#)
- [Neumann 2002] Nicolai Neumann, 2002: *Nichtlineare Effekte bei Längsschwingungen axial polarisierter piezokeramischer Stäbe: Experimentelle Untersuchungen und Parameteridentifikation*. Diplomarbeit, Institut für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt, 2002. [2](#)
- [Neumann & Sattel 2007] Nicolai Neumann und Thomas R. Sattel, 2007: *Set-oriented Numerical Analysis of a Vibro-Impact Drilling System with Several Contact Interfaces*. In Journal of Sound and Vibration, Special Issue on Vibro-Impact Systems, Elsevier Science. [36](#)
- [Neumann et al. 2007] Nicolai Neumann, Thomas Sattel und Jörg Wallaschek, 2007: *On set-oriented numerical methods for global analysis of non-smooth mechanical systems*. In Journal of Vibration and Control, Special Issue on Mathematical Methods in Engineering. Hrsg.: Ali H. Nayfeh; Guest Editors: Kenan Tas, J. Tenreiro Machado, Dumitru Baleanu. Verlag Sage Publications, 2007. [5](#), [28](#), [29](#)
- [Norris 1997] J. R. Norris, 1997: *Markov Chains*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. [15](#)
- [Pavlovskaja & Wiercigroch 2003] Ekaterina Pavlovskaja, Marian Wiercigroch, 2003: *Analytical drift reconstruction for visco-elastic impact oscillators operating in periodic and chaotic regimes*. In Chaos, Solitons & Fractals Vol. 19, Seiten 151-161, Elsevier Ltd., 2003. [28](#)

- [Potthast et al. 2007a] Christian Potthast, Jens Twiefel and Jörg Wallaschek, 2007: *Modelling Approaches for an Ultrasonic Percussion Drill*. In Journal of Sound and Vibration, Vibro-Impact Systems, Elsevier Science, 2007. 5, 29, 73, 79, 80
- [Potthast et al. 2007b] Christian Potthast, Rocco Eisseler, Uwe Heisel, Detlef Klotz, Jörg Wallaschek, 2007: *Piezoelectric Actuator Design for Ultrasonically Assisted Deep Hole Drilling*. In Journal of Electroceramics, Springer Netherlands, 2007. 29
- [Seifried, Schiehlen, Eberhard 2004] R. Seifried, W. Schiehlen, P. Eberhard, 2004: *Numerical and experimental evaluation of the coefficient of restitution for repeated impacts*. In International Journal of Impact Engineering, Vol. 32, Seiten 508–524, Elsevier Ltd., 2005. 63
- [Strogatz 1994] Steven H. Strogatz, 1994: *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Publishing, LLC, Cambridge, Massachusetts. 67
- [Thompson & Stewart 1986] Michael Thompson, Bruce Stewart, 1986: *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore. 22, 29
- [Tongue 1987] Benson H. Tongue and K. Gu, 1987: *A higher order method of interpolated cell mapping*. In Journal of Sound and Vibration, Vol. 125(1), Seiten 169-179. 1988. 26, 27
- [Tuffillaro, Mello, Choi, Albano 1986] N. B. Tuffillaro, T. M. Mello, Y. M. Choi and A. M. Albano: *Period doubling boundaries of a bouncing ball*. In Journal Physique, Vol. 47, Seiten 1477-1482. 29
- [Van der Pol 1920] Balthasar van der Pol, 1920: *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*. Radio Review, 1, 701-710, 754-762. Ref. aus: Takashi Kanamaru, Jan. 2007: Van der Pol Oscillator. Scholpedia, p.7075. 21
- [White & Tongue 1994] M. T. White and Benson H. Tongue, 1994: *Application of interpolated cell mapping to an analysis of the Lorenz equations*. In Journal of Sound and Vibration, Vol. 188(2), Seiten 209-226. 1995. 26
- [Wiercigroch, Wojewoda, Krivtsov 2000] M. Wiercigroch, J. Wojewoda, A. M. Krivtsov, 2000: *Dynamics of ultrasonic percussive drilling of hard rocks*. In Journal of Sound and Vibration, Vol. 280, Seiten 739-757, Elsevier Ltd., 2004. 29
- [Wikipedia 2007] Freie Enzyklopädie Wikipedia, 2007: *Joseph-Louis Lagrange*. Internetreferenz: http://de.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange. Wikimedia Foundation Inc., Stand 30. Juli 2007. 22