# Eine Bemerkung zu Derivationen von Potenzreihen

Von PETER BENDER in Neuss

In [1] analysiert A. Schreiber die logische Abhängigkeit von Summen-, Produkt- und Kettenregel bei der Ableitung. Die Ergebnisse sind für Ringe von Polynomfunktionen (bzw. Körper rationaler Funktionen) auf einem Körper formuliert, sie gelten aber auch fast ohne Einschränkung für Ringe formaler Polynome und können dann zum Teil auf Ringe formaler Potenzreihen über kommutativen unitären Ringen ausgedehnt werden:

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, F der Ring der formalen Potenzreihen über R, $a = \sum_{k=o}^{\infty} a_k X^k \in F$, $P \subseteq F$ der Unterring der Polynome, $':F \to F$ die gewöhnliche Ableitung; $D:F \to F$ schließlich sei eine Derivation, d.h. es erfülle folgende Bedingungen:

(1) $D(a+b) = D(a) + D(b)$ $\quad (a,b \in F)$ $\quad$ (Summenregel)

(2) $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ $\quad (a,b \in F)$ $\quad$ (Produktregel) .

Nach [1] ist dann (sei vorübergehend $D = D|_P$)

(3) $D(a) = D(X)a'$ $\quad (a \in P)$ ,

und für normierte Derivationen (d.h. $D(X) = 1$) ist

$$D(a) = a' \quad (a \in P),$$

die Ableitung ist also die einzige normierte Derivation auf P, d.h. aus Summen-, Produktregel und Normiertheit folgt bereits die Kettenregel der Ableitung auf P.

Darüber hinaus gilt folgender

Satz. *Für jede Derivation* D *auf* F, *die* P *in* P *abbildet, gibt es ein* $c \in P$, *so daß*

$$D(a) = ca' \quad (a \in F) .$$

Die Fortsetzung von Derivationen auf P auf solche auf F ist also eindeutig bestimmt. Ist D normiert, ist es die gewöhnliche Ableitung auf F; auch in F folgt aus Summen-, Produktregel und Normiertheit die Kettenregel, soweit die Hintereinanderausführung definiert ist.

Beweis. Setze $c = D(X)$ $\left(c = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k \in P\right.$ nach Voraussetzung

Sei $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in F$ und $D(a) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$. Zu zeigen ist

$$D(a) = ca', \text{ d.h. } b_k = \sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1} c_{k-j} \quad (k \in \mathbb{N}_0) .$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Mit

$$a^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} X^k \quad \left(\text{mit } a_k^{(n)} = \begin{cases} a_k & \text{für } k \leq n+1 \\ o & \text{für } k > n+1 \end{cases} ; \text{ also } a^{(n)} \in P\right)$$

ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1}^{(n)} c_{k-j} X^k = D(a) - ca^{(n)\prime} =$

(nach (3)) $D(a) - D(a^{(n)}) =$ (nach (1))

$D(a-a^{(n)}) = D\left(\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k X^k\right) = D\left(X^{n+2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+2} X^k\right) =$ (nach (2))

$D(X^{n+2}) \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+2} X^k + X^{n+2} D\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+2} X^k\right) =$

$(n+2) c X^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+2} X^k + X^{n+2} D\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+2} X^k\right) =$

$X^{n+1} f$ für ein geeignetes $f \in F$ .

Also wird $\sum\limits_{k=o}^{\infty} (b_k - \sum\limits_{j=o}^{k} (j+1)a_{j+1}^{(n)}c_{k-j})X^k$ von $X^{n+1}$ geteilt,

d.h. für $k=o,1,\ldots,n$ ist $b_k = \sum\limits_{j=o}^{k} (j+1)a_{j+1}c_{k-j}$ .

## Literatur

[1] SCHREIBER, A.: Zur algebraischen Analyse der Kettenregel. Math.Phys.Sem.Ber. XXV, S.79-96 (1978).

Eingegangen: 15. 2. 1978

## Mitarbeiter dieses Heftes

BENDER,Peter,Dr., Pädagogische Hochschule Rheinland, Abteilung Neuss Humboldtstraße 2, 4040 Neuss.- HEILMANN, Wolf-Rüdiger, Dr., Universität Hamburg, Institut für Math. Stochastik, Bundesstraße 55,2000 Hamburg.- HEINE, J. und HENSEL, H., Technische Universität Hannover, Mathematisches Institut, Welfengarten 1, 3000 Hannover.- KIENLE, Lothar, Prof.Dr., Berufspädagogische Hochschule, Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften, Flandernstraße 103, 7330 Esslingen.- MENNICKE,J., Prof.Dr., Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Universitätsstraße 1, 4800 Bielefeld 1.- REICHEL, Hans-Christian,Dozent Dr.,Mathematisches Institut der Technischen Universität Wien, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien.- REIMERS, Bernd, Altes Schulhaus, 2381 Selk.- TIETZ, Horst, Prof.Dr., Technische Universität Hannover, Mathematisches Institut, Welfengarten 1, 3000 Hannover.- TÖRNER, Günter,Dr.,Universität Duisburg, Fachbereich Mathematik, Lotharstraße 65, 4100 Duisburg.